M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Programme de khôlle de la semaine 12

29 novembre – 4 décembre

Sous-espaces stables et matrices par blocs
Réduction I

David BLOTTIÈRE

Déroulement de la khôlle

La khôlle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (6 points - 15 minutes maximum) : la khôlle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un exercice CCINP listé en fin de document (6 points - 15 minutes maximum) : la deuxième partie de la khôlle est consacrée à la résolution d'un des trois exercices issus de la banque CCINP listés ci-après. Vous aurez préalablement préparé ces exercices et vous mettrez en avant votre compréhension des notions en jeu, lors de l'exposé.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examinatrice/teur (8 points) : la khôlle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

Programme

Chapitre 7 « Matrices par blocs et sous-espaces stables » [PDF]
- Matrices définies par blocs : sommes et produits
- Déterminant d'une matrice définie par blocs
- Généralités sur les sous-espaces stables
- Sous-espaces stables en dimension finie
- Droites stables
- Premiers résultats sur la décomposition des endomorphismes

Chapitre 8 « Réduction des endomorphismes et des matrices » [PDF]
- Éléments propres d'un endomorphisme et d'une matrice.
- Sous-espaces stables.
- Polynôme caractéristique.

À venir

Fin du Chapitre 8 « Réduction des endomorphismes et des matrices » [PDF] : diagonalisabilité, trigonalisabilité, polynômes d'endomorphismes.

Questions de cours

Q1. — Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs (C7.7, énoncé intégral et démonstration de la propriété 1).

Q2. — Matrice d'un endomorphisme dans une base adaptée à un sous-espace stable (C7.22, énoncé intégral et démonstration de la propriété 1).

Q3. — Condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme possède une droite stable (C7.24, énoncé et démonstration). Définitions d'une valeur propre et d'un vecteur propre d'un endomorphisme (C7.25). Critère pour être une valeur propre dans le cas où l'espace est de dimension finie (C7.31, énoncé et démonstration).

Q4. — Soit u un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. Définition de $\operatorname{Det}(u)$ (C7.30). $\operatorname{Det}(u)$ ne dépend pas du choix de la base de E (C7.30, démonstration). Définition de χ_u (C7.32). Nature polynomiale de χ_u (démonstration à l'aide d'une somme sur les éléments du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$) (C7.32).

Q5. — Définition d'un endomorphisme diagonalisable (C7.40). Endomorphisme diagonalisable et droites stables (C7.41, énoncé et démonstration).

Q6. — Définition d'un endomorphisme trigonalisable (C7.42). Réduction d'un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ (C7.49, énoncé). Toute matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est semblable à une matrice triangulaire stricte (C7.50, démonstration).

Q7. — Réduction d'un endomorphisme d'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ (C7.47, énoncé et démonstration).

Q8. — Définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre d'un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel (C8.1). Définition du spectre de d'un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel (C8.5). Définition d'un sous-espace propre d'un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel (C8.6). Les sous-espaces propres sont en somme directe (C8.16, énoncé formalisé et démonstration).

Q9. — Étant donnée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, définitions d'une valeur propre de M, d'un vecteur propre de M, du spectre de M sur $\mathbf{K}$, d'un sous-espace propre de M (C8.13). Éléments propres d'un endomorphisme versus éléments propres d'une matrice (C8.18, énoncé et démonstration).

Q10. — CS pour qu'un endomorphisme d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension $1 \leqslant n < \infty$ stabilise une droite (C7.37, énoncé et démonstration). Polynôme caractéristique de deux matrices semblables (C8.29, énoncé et démonstration).

Exercices issus de la banque CCINP

Des corrections des exercices suivants, proposées par la banque CCINP, sont disponibles [PDF].

Exercice CCINP n°55. — Soit a un nombre complexe. On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \qquad u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia-1)u_n$$

avec $(u_0, u_1) \in \mathbf{C}^2$.

1. (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$.
   (b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.
2. Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$. Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.
   Indication : discuter suivant les valeurs de a.

Exercice CCINP n°71. — Soit P le plan d'équation $x+y+z=0$ et D la droite d'équation $x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D.
   Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.
   Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

Exercice CCINP n°83. — Soit u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

1. Soit λ un réel non nul. Prouver que si λ est valeur propre de $u\circ v$, alors λ est valeur propre de $v\circ u$.
2. On considère, sur $E=\mathbb{R}[X]$ les endomorphismes u et v définis par $u : P \longmapsto \displaystyle\int_1^X P$ et $v : P \longmapsto P'$. Déterminer $\operatorname{Ker}(u\circ v)$ et $\operatorname{Ker}(v\circ u)$. Le résultat de la question 1. reste-t-il vrai pour $\lambda=0$?
3. Si E est de dimension finie, démontrer que le résultat de la première question reste vrai pour $\lambda=0$.
   Indication : penser à utiliser le déterminant.

Après la khôlle

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'examinatrice/teur. Vous collerez cet énoncé sur une feuille **simple** et vous en rédigerez une solution soignée que vous me remettrez *sans faute à la fin du TD du lundi suivant votre khôlle.*