M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Programme de khôlle de la semaine 11

22–26 novembre

Polynômes II

David BLOTTIÈRE

Déroulement de la khôlle

La khôlle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (6 points - 15 minutes maximum) : la khôlle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un exercice CCINP listé en fin de document (6 points - 15 minutes maximum) : la deuxième partie de la khôlle est consacrée à la résolution d'un des trois exercices issus de la banque CCINP listés ci-après. Vous aurez préalablement préparé ces exercices et vous mettrez en avant votre compréhension des notions en jeu, lors de l'exposé.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examinatrice/teur (8 points) : la khôlle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

Programme

Chapitre 6 « Polynômes » [PDF]

— Idéaux de $\mathbf{K}[X]$
— PGCD et PPCM dans $\mathbf{K}[X]$
— Décomposition d'un polynôme de $\mathbf{K}[X]$ en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbf{K}$.
— Idéaux de $\mathbf{K}[X]$;
— PGCD et PPCM dans $\mathbf{K}[X]$;
— Décomposition d'un polynôme de $\mathbf{K}[X]$ en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbf{K}$.

À venir

Chapitre 7 « Matrices par blocs et sous-espaces stables » [PDF]

Questions de cours

Q1. — Définition d'un idéal d'un anneau commutatif (C6.66). Critère pour être un idéal d'un anneau commutatif (C6.67, énoncé). Opérations sur les idéaux (C6.68, énoncé intégral et démonstration pour la somme).

Q2. — Si $A \in \mathbf{K}[X]$, alors $A\,\mathbf{K}[X] := \{AP \,:\, P \in \mathbf{K}[X]\}$ est un idéal de $\mathbf{K}[X]$ (C6.70-1, démonstration). Si $(A, B) \in (\mathbf{K}[X] \setminus \{0\})^2$ alors $A\,\mathbf{K}[X] \subset B\,\mathbf{K}[X]$ si et seulement si B divise A (C6.70-2, démonstration). Si $(A, B) \in (\mathbf{K}[X] \setminus \{0\})^2$ alors $A\,\mathbf{K}[X] = B\,\mathbf{K}[X]$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbf{K}^*$ tel que $A = \lambda B$ (C6.71, démonstration).

Q3. — Description des idéaux de $\mathbf{K}[X]$ (C6.75, énoncé et démonstration).

Q4. — Définition du PGCD et du PPCM de deux polynômes non nuls (C6.78). Le PGCD de deux polynômes non nuls A et B est le plus grand polynôme unitaire qui divise A et B, au sens de la relation de divisibilité (C6.79, démonstration).

Q5. — Théorème de Bézout (C6.83, énoncé et démonstration) Théorème de Gauß (C6.90, énoncé et démonstration).

Q6. — Définition d'un polynôme de $\mathbf{K}[X]$ irréductible sur $\mathbf{K}$ (C6.102). Si $P \in \mathbf{K}[X]$ est de degré 2, alors P est irréductible sur $\mathbf{K}$ si et seulement s'il ne possède aucune racine dans $\mathbf{K}$ (C6.107-Q2, démontration).

Q7. — Tout polynôme de $\mathbf{K}[X]$ de degré 1 est irréductible sur $\mathbf{K}$ (C6.107-Q1, démonstration). Description des irréductibles de $\mathbf{C}[X]$ (C6.111-1, énoncé et démonstration).

Q8. — Description des irréductibles de $\mathbf{R}[X]$ (C6.111-2, énoncé et démonstration).

Q9. — Décomposition en produit d'irréductibles dans $\mathbf{C}[X]$ (C6.112, énoncé). Décomposition en produit d'irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$ (C6.115, énoncé).

Q10. — Si $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$, décomposition de $X^n - 1$ en produit d'irréductibles dans $\mathbf{C}[X]$, puis dans $\mathbf{R}[X]$ (C6. 117).

Exercices issus de la banque CCINP

Des corrections des exercices suivants, proposées par la banque CCINP, sont disponibles [PDF].

Exercice CCINP n°43. — Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = \operatorname{Arctan}(u_n)$.

1. (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de (u_n).
   (b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions h, continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\operatorname{Arctan} x)$.

Exercice CCINP n°85. —

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.
   (a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $\left(1, X-a, (X-a)^2, \cdots, (X-a)^n\right)$.
   (b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que :
   a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in [\![0, r-1]\!]$, $P^{(k)}(a) = 0$.
2. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice CCINP n°89. — Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$.

1. On suppose $k \in [\![1, n-1]\!]$.
   Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
2. On pose $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|z^k - 1\right|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

Après la khôlle

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'examinatrice/teur. Vous collerez cet énoncé sur une feuille **simple** et vous en rédigerez une solution soignée que vous me remettrez *sans faute à la fin du TD du lundi suivant votre khôlle.*