M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Programme de khôlle de la semaine 10

15–19 novembre

Polynômes

David BLOTTIÈRE

Déroulement de la khôlle

La khôlle comporte trois phases.

1. Rédaction d'une question de cours (6 points - 15 minutes maximum) : la khôlle débute par une des questions de cours listées dessous.
2. Résolution d'un exercice CCINP listé en fin de document (6 points - 15 minutes maximum) : la deuxième partie de la khôlle est consacrée à la résolution d'un des trois exercices issus de la banque CCINP listés ci-après. Vous aurez préalablement préparé ces exercices et vous mettrez en avant votre compréhension des notions en jeu, lors de l'exposé.
3. Résolution d'exercices proposés par l'examinatrice/teur (8 points) : la khôlle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

Programme

Chapitre 6 « Polynômes » [PDF]
— Rappels sur la construction de la $\mathbf{K}$-algèbre $\mathbf{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$
— Degré d'un polynôme
— Division euclidienne dans $\mathbf{K}[X]$
— Polynôme dérivé
— Racines d'un polynôme

À venir

Fin du chapitre 6 « Polynômes » : Idéaux de $\mathbf{K}[X]$; PGCD et PPCM dans $\mathbf{K}[X]$; Décomposition d'un polynôme de $\mathbf{K}[X]$ en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbf{K}$.

Chapitre 7 « Sous-espaces stables et matrices par blocs ».

Questions de cours

Q1. — Définition du degré d'un polynôme (C6.7). Propriétés du degré d'un polynôme (C6.11, énoncé et démonstration sans les cas d'égalité (a),(b),(c) pour la somme).

Q2. — Division euclidienne dans $\mathbf{K}[X]$ (C6.21, énoncé et démonstration).

Q3. — Polynôme dérivé d'un produit et formule de Leibniz (C6.33, énoncé intégral et démonstration de la formule de Leibniz).

Q4. — Polynômes dérivés itérés de $(X-a)^k$ (C6.34, énoncé). Formule de Taylor exacte dans $\mathbf{K}[X]$ (C6.35, énoncé et démonstration).

Q5. — Critère pour être racine via une relation de divisibilité (C6.43, énoncé). Factorisation d'un polynôme possédant n racines deux-à-deux distinctes (C6.44, énoncé et démonstration).

Q6. — Déterminant de Vandermonde (C6.50, énoncé et démonstration polynomiale).

Q7. — Théorème de d'Alembert-Gauß (C6.55, énoncé) ; Scindage de $\sum_{k=0}^{n} X^k$ dans $\mathbf{C}[X]$ et calcul de $\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$, où $n \in \mathbf{N}^*$ (C6.64).

Exercices issus de la banque CCINP

Des corrections des exercices suivants, proposées par la banque CCINP, sont disponibles [PDF].

Exercice CCINP n°28. — *N.B. : les deux questions sont indépendantes.*

1. La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2, +\infty[$?
2. Soit a un réel strictement positif. La fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

Exercice CCINP n°84. —

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
3. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

Exercice CCINP n°90. — $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes.
Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.

1. Montrer que $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ P & \longmapsto & \big(P(a_1), P(a_2), P(a_3)\big) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
2. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k \in \{1,2,3\},\ L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.
   (a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
   (b) Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3.
3. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).
4. **Application** : on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0,1), B(1,3), C(2,1)$.
   Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.

Après la khôlle

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'examinatrice/teur. Vous collerez cet énoncé sur une feuille **simple** et vous en rédigerez une solution soignée que vous me remettrez *sans faute à la fin du TD du lundi suivant votre khôlle.*