M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Chapitre 5
Intégration sur un intervalle quelconque

David BLOTTIÈRE

Table des matières

1 Fonctions continues par morceaux sur un intervalle

C5. 1. *Notation.* — Dans cette partie, la lettre I désigne un intervalle de $\mathbf{R}$ et la lettre $\mathbf{K}$ l'un des corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

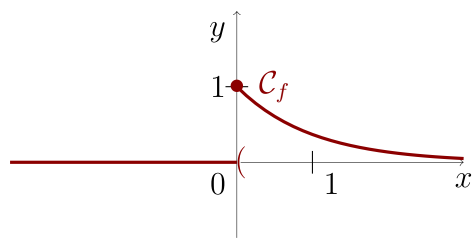
C5. 2. Définition (Fonction continue par morceaux sur un intervalle). — *Soit une fonction $f\colon I \longrightarrow \mathbf{K}$. La fonction f est dite continue par morceaux sur I si et seulement si pour tout segment $[\,a\,,\,b\,]$ inclus dans I, la restriction de la fonction f au segment $[\,a\,,\,b\,]$ est continue par morceaux sur le segment $[\,a\,,\,b\,]$.*

C5. 3. *Exemple.* — Toute fonction continue sur I est continue par morceaux sur I.

C5. 4. *Exemple.* — La fonction partie entière est continue par morceaux sur $\mathbf{R}$.

C5. 5. *Exemple (Fonction continue par morceaux sur $\mathbf{R}$).* — La fonction f définie par

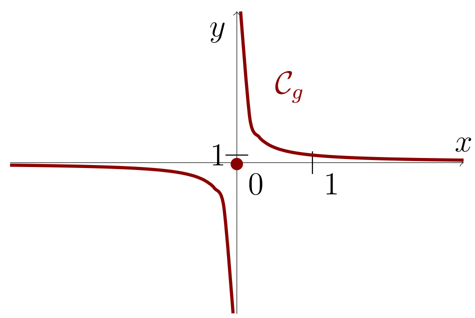
$$f \;\left|\; \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right.$$



est continue par morceaux sur $\mathbf{R}$.

C5. 6. *Exemple (Fonction non continue par morceaux sur $\mathbf{R}$).* — La fonction g définie par

$$g \;\left|\; \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0\,; \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$



n'est pas continue par morceaux sur $\mathbf{R}$.

C5. 7. Proposition (Structure de l'ensemble des fonctions c.p.m. sur un intervalle). — *On note $\mathcal{CM}(I, \mathbf{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux, définies sur I et à valeurs dans $\mathbf{K}$. Alors $\mathcal{CM}(I, \mathbf{K})$ est une sous-$\mathbf{K}$-algèbre de la $\mathbf{K}$-algèbre $\mathcal{F}(I, \mathbf{K})$ des fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbf{K}$.*

C5. 8. *Remarque.* — L'ensemble $\mathcal{C}^0(I, \mathbf{K})$ des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbf{K}$ est une sous-$\mathbf{K}$-algèbre de la $\mathbf{K}$-algèbre $\mathcal{CM}(I, \mathbf{K})$.

C5. 9. *Question.* — Une composée de fonctions continues par morceaux est-elle nécessairement continue par morceaux ?

C5. 10. *Exercice.* — Construire une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})^{\mathbf{N}}$ telle que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ converge avec une fonction limite simple f définie par ;

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) \end{array} \right.$$

qui n'est pas continue par morceaux sur $\mathbf{R}$.

2 Définition de la convergence d'une intégrale sur un intervalle semi-ouvert

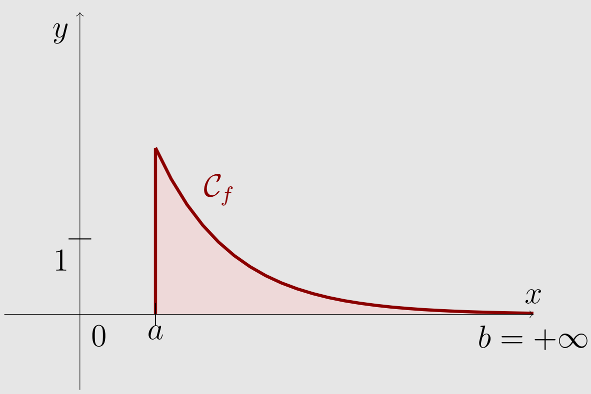
C5. 11. Définition (Intégrale convergente possédant une singularité éventuelle). —

Soit $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ *et soit* $f\colon [a\,,\,b[\longrightarrow \mathbf{C}$ *une fonction continue par morceaux sur* $[a\,,\,b[$.

1 – *On dit que l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ *est convergente si les intégrales partielles* $\displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$*, définies pour* $x \in [a\,,\,b[$*, admettent une limite finie lorsque* x *tend vers* b.

2 – *Si l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ *est convergente, alors sa valeur est définie par :*

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t := \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t \in \mathbf{C}.$$

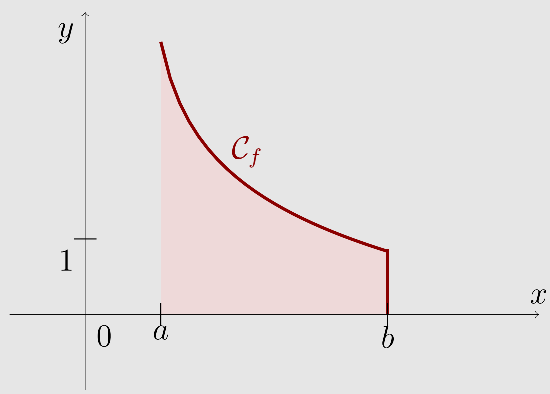


Soit $-\infty \leqslant a < b < +\infty$ *et soit* $f\colon]a\,,\,b] \longrightarrow \mathbf{C}$ *une fonction continue par morceaux sur* $]a\,,\,b]$.

1 – *On dit que l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ *est convergente si les intégrales partielles* $\displaystyle\int_x^b f(t)\ \mathrm{d}t$*, définies pour* $x \in]a\,,\,b]$*, admettent une limite finie lorsque* x *tend vers* a.

2 – *Si l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ *est convergente, alors sa valeur est définie par :*

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t := \lim_{x \to a} \int_x^b f(t)\ \mathrm{d}t \in \mathbf{C}.$$



C5. 12. *Exercice (Première intégrale de référence).* — Soit λ un réel strictement positif. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\ \mathrm{d}t$ converge et préciser sa valeur.

C5. 13. *Exercice (Deuxième intégrale de référence).* — Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ \mathrm{d}t$ converge et préciser sa valeur.

C5. 14. *Exercice.* — Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t) \, \mathrm{d}t$ diverge.

C5. 15. *Exercice.* — Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} \, \mathrm{d}t$ converge et préciser sa valeur.

C5. 16. *Exercice.* — Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\, e^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t$ converge et préciser sa valeur.

3 Intégrales de Riemann

C5. 17. Théorème (Intégrales de Riemann). — *Soit α un nombre réel.*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \textit{ converge} \iff \alpha > 1 \qquad \Bigg| \qquad \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \textit{ converge} \iff \alpha < 1$$

4 Relation de Chasles sur un intervalle semi-ouvert

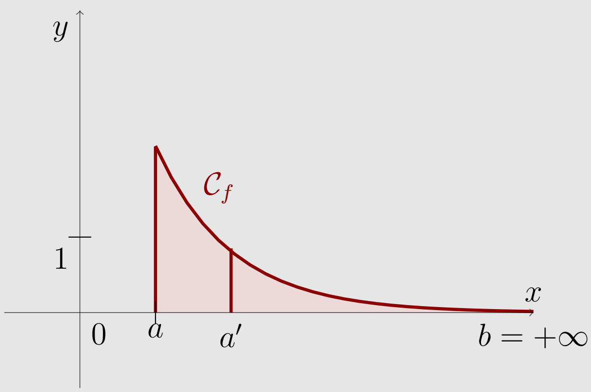
C5. 18. Proposition (Relation de Chasles). —

Soit $-\infty < a < a' < b \leqslant +\infty$ *et soit* $f\colon [\,a\,,\,b\,[\longrightarrow \mathbf{C}$ *une fonction continue par morceaux sur* $[\,a\,,\,b\,[$.

1 – *L'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ *converge si et seulement si l'intégrale* $\displaystyle\int_{a'}^b f(t)\ \mathrm{d}t$.

2 – *Si les intégrales* $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ *et* $\displaystyle\int_{a'}^b f(t)\ \mathrm{d}t$ *convergent, alors :*

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t := \int_a^{a'} f(t)\ \mathrm{d}t + \int_{a'}^b f(t)\ \mathrm{d}t\ .$$

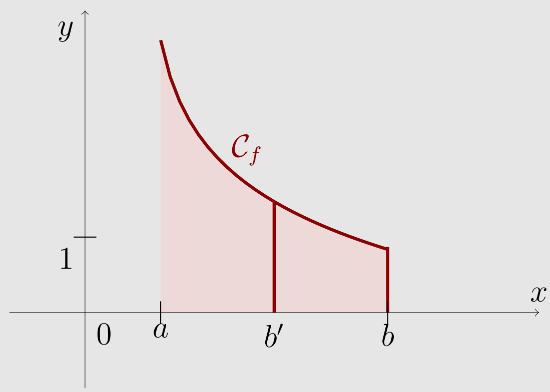


Soit $-\infty \leqslant a < b' < b < +\infty$ *et soit* $f\colon]\,a\,,\,b\,] \longrightarrow \mathbf{C}$ *une fonction continue par morceaux sur* $]\,a\,,\,b\,]$.

1 – *L'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ *converge si et seulement si l'intégrale* $\displaystyle\int_a^{b'} f(t)\ \mathrm{d}t$.

2 – *Si les intégrales* $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ *et* $\displaystyle\int_a^{b'} f(t)\ \mathrm{d}t$ *convergent, alors :*

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t := \int_a^{b'} f(t)\ \mathrm{d}t + \int_b^{b'} f(t)\ \mathrm{d}t\ .$$



Démonstration. Nous établissons les résultats de la colonne de gauche, celui de la colonne de droite pouvant être prouvé de manière analogue.

1. Soit x un nombre réel tel que $a < a' < x < b \leqslant +\infty$. En appliquant la relation de Chasles sur le segment $[a, x]$, qui contient le point a', il vient :

$$(\star) \qquad \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t = \underbrace{\int_a^{a'} f(t)\ \mathrm{d}t}_{\text{indépendant de } x} + \int_{a'}^x f(t)\ \mathrm{d}t\ .$$

Nous en déduisons que $\displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ possède une limite finie quand x tend vers b si et seulement si $\displaystyle\int_{a'}^x f(t)\ \mathrm{d}t$ possède une limite finie quand x tend vers b.

2. Supposons que les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{a'}^b f(t)\ \mathrm{d}t$ convergent. En faisant tendre x vers b dans l'identité $(\star)$, nous obtenons :

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t := \int_a^{a'} f(t)\ \mathrm{d}t + \int_{a'}^b f(t)\ \mathrm{d}t\ .$$

Q.E.D.

C5. 19. *Remarque.* — D'après la proposition précédente, nous pouvons modifier une borne non singulière d'intégrale pour étudier sa nature.

5 Du comportement asymptotique d'une fonction dont l'intégrale converge au voisinage de $+\infty$

C5. 20. *Remarque.* — Soit $f\colon [0\,,+\infty] \to \mathbf{C}$ une fonction continue par morceaux sur $[0\,,+\infty]$ telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Alors $f(t)$ **ne tend pas nécessairement vers 0, lorsque** t **tend vers** $+\infty$. Cf. Exemple ci-dessous.

C5. 21. *Exemple (Une chaîne de montagnes).* —

Définition de la fonction f. On vérifie que pour tout $k \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$:

$$k + \frac{1}{k^2} < (k+1) - \frac{1}{(k+1)^2}$$

et on en déduit que les intervalles $\left[k - \dfrac{1}{k^2}\,, k + \dfrac{1}{k^2}\right]$, où $k \in \mathbf{N}$, sont deux-à-deux disjoints. On peut alors définir la fonction $f\colon [0\,,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}_+$ par :

— pour tout $k \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$, la restriction de f au segment $\left[k - \dfrac{1}{k^2}\,, k\right]$ coïncide avec la fonction affine définie par $f\left(k - \dfrac{1}{k^2}\right) = 0$ et $f(k) = 1$;

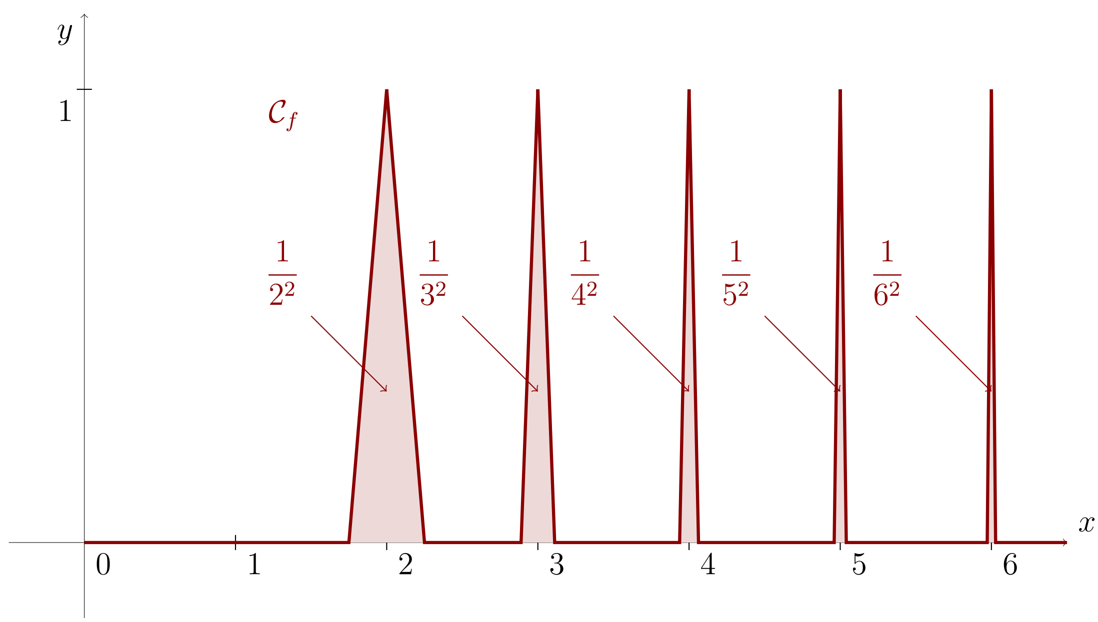
— pour tout $k \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$, la restriction de f au segment $\left[k\,, k + \dfrac{1}{k^2}\right]$ coïncide avec la fonction affine définie par $f(k) = 1$ et $f\left(k + \dfrac{1}{k^2}\right) = 0$;

— la fonction f est nulle sur l'ensemble $[0\,,+\infty[\setminus \displaystyle\bigcup_{k=2}^{+\infty} \left[k - \dfrac{1}{k^2}\,, k + \dfrac{1}{k^2}\right]$.

On a donc, pour tout $k \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$:

$$\forall\, x \in \left[k - \frac{1}{k^2}\,, k\right] \quad f(x) = k^2\left(x - k + \frac{1}{k^2}\right) \qquad \text{et} \qquad \forall\, x \in \left[k\,, k + \frac{1}{k^2}\right] \quad f(x) = k^2\left(k + \frac{1}{k^2} - x\right).$$

Représentation graphique de la fonction f.



Convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$.

• On vérifie que la fonction f est continue par morceaux (et positive ou nulle) sur $[\,0\,,\,+\infty\,[$.

• Soit φ la fonction définie par :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} [\,0\,,\,+\infty\,[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t\ . \end{array} \right.$$

• Comme, pour tout $0 \leqslant x \leqslant y$:

$$\underbrace{\int_0^y f(t)\ \mathrm{d}t}_{\varphi(y)} = \underbrace{\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t}_{\varphi(x)} + \int_x^y f(t)\ \mathrm{d}t\ .$$

Comme la fonction f est positive sur le segment $[\,x\,,\,y\,]$, on a $\displaystyle\int_x^y f(t)\ \mathrm{d}t \geqslant 0$ (positivité de l'intégrale). On en déduit que la fonction φ est croissante. D'autre part, pour tout $x > 2$, si on pose $n := E(x)$:

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{n+\frac{1}{n^2}} f(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{k=2}^{n} \int_{k-\frac{1}{k^2}}^{k+\frac{1}{k^2}} f(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \underbrace{\frac{\pi^2}{6}}_{\text{indépendant de } x}\ .$$

• Comme la fonction φ est croissante et majorée, le Théorème de la limite monotone pour les fonctions assure que la fonction φ possède une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.

• L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ est convergente. On peut démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{6} - 1$.

La fonction f n'admet pas de limite en $+\infty$.
Supposons qu'il existe $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ tel que :

$$f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \ell\ .$$

On en déduit que $1 = f(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, d'où $\ell = 1$.
Comme $n + \dfrac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, on en déduit $0 = f\left(n + \dfrac{1}{n^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, d'où $\ell = 0$. Contradiction.
Ainsi la fonction f ne possède aucune limite en $+\infty$.

C5. 22. *Exercice.* — Construire une fonction $f\colon [\,0\,,\,+\infty\,[\longrightarrow \mathbf{R}$ continue par morceaux, positive ou nulle telle que :

(a) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge ;

(b) $f\,(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

C5. 23. *Exercice.* — Soit une fonction $f : [\,0\,,\,+\infty\,[\longrightarrow \mathbf{R}$ continue par morceaux, telle que :

(a) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge ;

(b) il existe $\ell \in \mathbf{R}$ tel que $f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \ell$.

Démontrer que $\ell = 0$.

C5. 24. *Exercice.* — Soit une fonction $f : [\,0\,,\,+\infty\,[\longrightarrow \mathbf{R}$ continue par morceaux, telle que :

(a) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge ;

(b) la fonction f est décroissante sur $[\,0\,,\,+\infty\,]$.

1. Démontrer $f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.
2. Démontrer $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} 0$. On pourra considérer les intégrales $\displaystyle\int_x^{2x} f(t)\ \mathrm{d}t$, où $x \geqslant 0$.

6 Propriétés élémentaires des intégrales convergentes sur un intervalle semi-ouvert

C5. 25. Proposition (Propriétés élémentaires des intégrales convergentes sur un intervalle semi-ouvert. —

Soit $-\infty < a < b \leqslant +\infty$.

1. Linéarité – *Soit* $(f_1, f_2) \in \mathcal{CM}([\,a\,,\,b\,[\,, \mathbf{C})^2$, *soient* $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{C}^2$. *Si les intégrales* $\int_a^b f_1$ *et* $\int_a^b f_2$ *sont convergentes, alors l'intégrale* $\int_a^b \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ *est également convergente et :*

$$\int_a^b \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = \lambda_1 \int_a^b f_1 + \lambda_2 \int_a^b f_2.$$

2. Positivité – *Soit* $f \in \mathcal{CM}([\,a\,,\,b\,[\,, \mathbf{R})$ *telle que pour tout* $t \in [\,a\,,\,b\,[$, $f(t) \geqslant 0$. *Si l'intégrale* $\int_a^b f$ *converge, alors* $\int_a^b f \geqslant 0$.

3. Croissance – *Soit* $(f, g) \in \mathcal{CM}([\,a\,,\,b\,[\,, \mathbf{R})^2$ *telles que, pour tout* $t \in [\,a\,,\,b\,[$, $f(t) \leqslant g(t)$. *Si les intégrales* $\int_a^b f$ *et* $\int_a^b g$ *convergent, alors* $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.

4. Dérivation – *Soit* $f \in \mathcal{C}^0([\,a\,,\,b\,[\,, \mathbf{C})$. *On suppose que l'intégrale* $\int_a^b f$ *converge. Alors :*

(a) *pour tout* $x \leqslant a$, *l'intégrale* $\int_x^b f$ *converge ;*

(b) *la fonction :*

$$F \left| \begin{array}{ccc} [\,a\,,\,b\,[& \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_x^b f(t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ *sur* $[\,a\,,\,b\,[$ *et vérifie* $F' = -f$.

Soit $-\infty \leqslant a < b < +\infty$

1. Linéarité. *Soit* $(f_1, f_2) \in \mathcal{CM}(\,]\,a\,,\,b\,], \mathbf{C})^2$, *soient* $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{C}^2$. *Si les intégrales* $\int_a^b f_1$ *et* $\int_a^b f_2$ *sont convergentes, alors l'intégrale* $\int_a^b \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ *est également convergente et :*

$$\int_a^b \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = \lambda_1 \int_a^b f_1 + \lambda_2 \int_a^b f_2.$$

2. Positivité – *Soit* $f \in \mathcal{CM}(\,]\,a\,,\,b\,], \mathbf{R})$ *telle que pour tout* $t \in]\,a\,,\,b\,]$, $f(t) \geqslant 0$. *Si l'intégrale* $\int_a^b f$ *converge, alors* $\int_a^b f \geqslant 0$.

3. Croissance – *Soit* $(f, g) \in \mathcal{CM}(\,]\,a\,,\,b\,], \mathbf{R})^2$ *telles que, pour tout* $t \in]\,a\,,\,b\,]$, $f(t) \leqslant g(t)$. *Si les intégrales* $\int_a^b f$ *et* $\int_a^b g$ *convergent, alors* $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.

4. Dérivation – *Soit* $f \in \mathcal{C}^0(\,]\,a\,,\,b\,], \mathbf{C})$. *On suppose que l'intégrale* $\int_a^b f$ *converge. Alors :*

(a) *pour tout* $x \leqslant b$, *l'intégrale* $\int_a^x f$ *converge ;*

(b) *la fonction :*

$$F \left| \begin{array}{ccc}]\,a\,,\,b\,] & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ *sur* $]\,a\,,\,b\,]$ *et vérifie* $F' = f$.

C5. 26. *Exercice.* — Soient $(f, g) \in \mathcal{CM}([\,0\,,\,+\infty\,[\,)^2$ tel que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g$ diverge. Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f + g$?

7 Résultat fondamental pour les intégrales de fonctions positives sur un intervalle semi-ouvert

C5. 27. *Rappels.* —

Soit $-\infty < a < b \leqslant +\infty$.
Soit $\varphi\colon [\,a\,,\,b\,[\longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction croissante.

1. Si φ est majorée, alors φ admet une limite finie en b et $\lim\limits_{x\to b} \varphi(x) = \sup\limits_{x\in[\,a\,,\,b\,[} \varphi(x)$.
2. Si φ n'est pas majorée, alors $\varphi(x) \xrightarrow[x\to b]{} +\infty$.

Dans tous les cas, la fonction φ admet une limite en b.

Soit $-\infty \leqslant a < b < +\infty$.
Soit $\varphi\colon \,]\,a\,,\,b\,] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction décroissante.

1. Si φ est majorée, alors φ admet une limite finie en a et $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \sup\limits_{x\in]\,a\,,\,b\,]} \varphi(x)$.
2. Si φ n'est pas majorée, alors $\varphi(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$.

Dans tous les cas, la fonction φ admet une limite en a.

C5. 28. Proposition (Convergence pour une intégrale de fonction positive sur un intervalle semi-ouvert). —

Soit $-\infty < a < b \leqslant +\infty$.
Soit $f \in \mathcal{CM}([\,a\,,\,b\,[\,,\mathbf{R})$ *telle que, pour tout* $t \in [\,a\,,\,b\,[\,,\ f(t) \geqslant 0$. *Alors l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f$ *converge si et seulement si la fonction*

$$F \;\left|\; \begin{array}{ccc} [\,a\,,\,b\,[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t \end{array}\right.$$

est majorée.

Soit $-\infty \leqslant a < b < +\infty$.
Soit $f \in \mathcal{CM}(\,]\,a\,,\,b\,],\mathbf{R})$ *telle que, pour tout* $t \in \,]\,a\,,\,b\,],\ f(t) \geqslant 0$. *Alors l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f$ *converge si et seulement si la fonction*

$$F \;\left|\; \begin{array}{ccc}]\,a\,,\,b\,] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_x^b f(t)\ \mathrm{d}t \end{array}\right.$$

est majorée.

8 Théorème de domination pour les intégrales de fonctions positives sur un intervalle semi-ouvert

C5. 29. Théorème (Domination pour les intégrales de fonctions positives sur un intervalle semi-ouvert. —

Soit $-\infty < a < b \leqslant +\infty$.
Soient $(f, g) \in \mathcal{CM}([\,a\,,\,b\,[\,, \mathbf{R})^2$ *tel que*

$$0 \leqslant f \leqslant g\ .$$

Alors :

$$\int_a^b g \text{ converge} \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f \text{ converge.}$$

Soit $-\infty \leqslant a < b < +\infty$.
Soient $(f, g) \in \mathcal{CM}(\,]\,a\,,\,b\,], \mathbf{R})^2$ *tel que*

$$0 \leqslant f \leqslant g\ .$$

Alors :

$$\int_a^b g \text{ converge} \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f \text{ converge.}$$

C5. 30. *Exercice.* — Soient $(f, g) \in \mathcal{CM}(\,]\,0\,,\,1\,])^2$ tel que $0 \leqslant f \leqslant g$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f$ diverge. Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g$?

C5. 31. *Exercice.* — Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t$ est convergente.

C5. 32. *Exercice.* — Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(t^2)}{1+t^3}\, \mathrm{d}t$ est convergente.

C5. 33. *Exercice.* — Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2\ |\ln(t)|}{2+\sin(t)}\, \mathrm{d}t$ est convergente.

9 Fonctions intégrables sur un intervalle semi-ouvert

C5. 34. Définition (Fonctions intégrables sur un intervalle semi-ouvert). —

Soit $-\infty < a < b \leqslant +\infty$.
Soit $f \in \mathcal{CM}([\,a\,,\,b\,[\,,\mathbf{C})$. On dit que f est intégrable sur $[\,a\,,\,b\,[$ ou que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est absolument convergente, si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t$ est convergente.

Soit $-\infty \leqslant a < b < +\infty$.
Soit $f \in \mathcal{CM}(\,]\,a\,,\,b\,],\mathbf{C})$. On dit que f est intégrable sur $]\,a\,,\,b\,]$ ou que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est absolument convergente, si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t$ est convergente.

C5. 35. *Exemple.* — La fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc}]0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \ln(t) \end{array} \right.$$

est intégrable sur $]0,1]$.

C5. 36. Théorème (La convergence absolue implique la convergence sur un intervalle semi-ouvert). —

Soit $-\infty < a < b \leqslant +\infty$.
Soit $f \in \mathcal{CM}([\,a\,,\,b\,[\,,\mathbf{C})$. Si f est intégrable sur $[\,a\,,\,b\,[$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est convergente.

Soit $-\infty \leqslant a < b < +\infty$.
Soit $f \in \mathcal{CM}(\,]\,a\,,\,b\,],\mathbf{C})$. Si f est intégrable sur $]\,a\,,\,b\,]$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est convergente.

C5. 37. *Exercice.* — Démontrer que la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin(x)}{x^2} \end{array} \right.$$

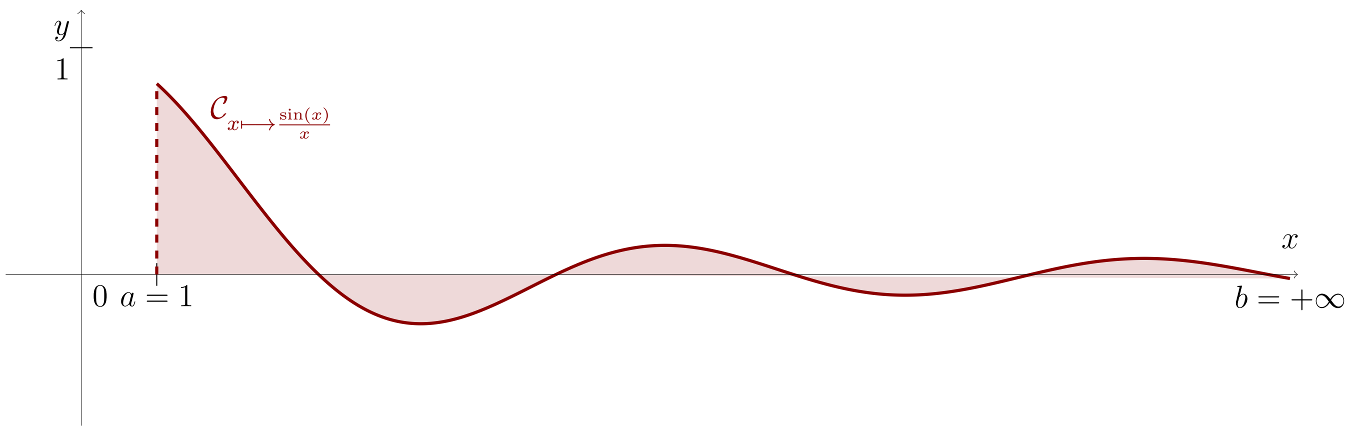
est intégrable sur $[1,+\infty[$.

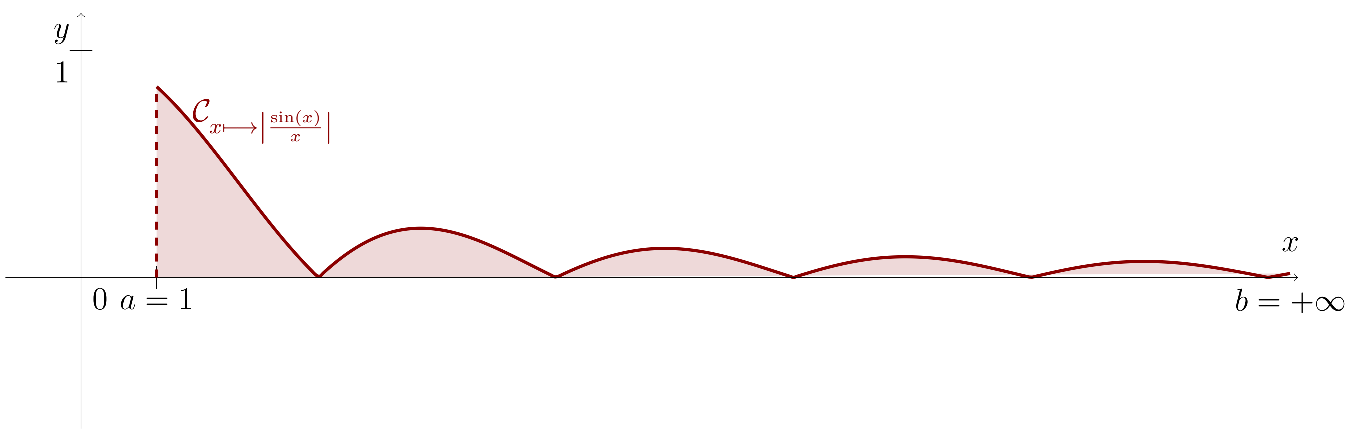
C5. 38. *Exercice.* — Démontrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)\,e^{-t}\ \mathrm{d}t$ et calculer sa valeur. On pourra envisager deux méthodes de calculs.

C5. 39. *Exercice.* — Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Étudier en fonction de α l'intégrabilité de la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} [1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & \dfrac{e^{it}}{t^{\alpha}} \end{array} \right. .$$

C5. 40. *Exercice (Une intégrale convergente, mais non absolument convergente).* — L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente, mais non absolument convergente.





10 Relations de comparaison pour les intégrales de fonctions positives sur un intervalle semi-ouvert

C5. 41. Théorème (Intégration des o pour les intégrales de fonctions positives sur un intervalle semi-ouvert). —

Soit $-\infty < a < b \leqslant +\infty$.
Soient $f \in \mathcal{CM}([\,a\,,\,b\,[\,,\mathbf{C})$ *et* $g \in \mathcal{CM}\,([\,a\,,\,b\,[\,,\mathbf{R}_+)$ *telles que* $f(t) \underset{t\to b}{=} o(g(t))$.

(a) *Si* $\displaystyle\int_a^b g$ *converge, alors* $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ *converge et*

$$\int_x^b f \underset{x\to b}{=} o\left(\int_x^b g\right).$$

(b) *Si* $\displaystyle\int_a^b g$ *diverge, alors*

$$\int_a^x f \underset{x\to b}{=} o\left(\int_a^x g\right).$$

Soit $-\infty \leqslant a < b < +\infty$.
Soient $f \in \mathcal{CM}(\,]\,a\,,\,b\,],\mathbf{C})$ *et* $g \in \mathcal{CM}\,(\,]\,a\,,\,b\,],\mathbf{R}_+)$ *telles que* $f(t) \underset{t\to a}{=} o(g(t))$.

(a) *Si* $\displaystyle\int_a^b g$ *converge, alors* $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ *converge*

$$\int_a^x f \underset{x\to a}{=} o\left(\int_a^x g\right).$$

(b) *Si* $\displaystyle\int_a^b g$ *diverge, alors*

$$\int_x^b f \underset{x\to a}{=} o\left(\int_x^b g\right).$$

C5. 42. Théorème (Intégration des O pour les intégrales de fonctions positives sur un intervalle semi-ouvert). —

Soit $-\infty < a < b \leqslant +\infty$.
Soient $f \in \mathcal{CM}([\,a\,,\,b\,[\,,\mathbf{C})$ *et* $g \in \mathcal{CM}\,([\,a\,,\,b\,[\,,\mathbf{R}_+)$ *telles que* $f(t) \underset{t\to b}{=} O(g(t))$.

(a) *Si* $\displaystyle\int_a^b g$ *converge, alors* $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ *converge et*

$$\int_x^b f \underset{x\to b}{=} O\left(\int_x^b g\right).$$

(b) *Si* $\displaystyle\int_a^b g$ *diverge, alors*

$$\int_a^x f \underset{x\to b}{=} O\left(\int_a^x g\right).$$

Soit $-\infty \leqslant a < b < +\infty$.
Soient $f \in \mathcal{CM}(\,]\,a\,,\,b\,],\mathbf{C})$ *et* $g \in \mathcal{CM}\,(\,]\,a\,,\,b\,],\mathbf{R}_+)$ *telles que* $f(t) \underset{t\to a}{=} O(g(t))$.

(a) *Si* $\displaystyle\int_a^b g$ *converge, alors* $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ *converge et*

$$\int_a^x f \underset{x\to a}{=} O\left(\int_a^x g\right).$$

(b) *Si* $\displaystyle\int_a^b g$ *diverge, alors et*

$$\int_x^b f \underset{x\to a}{=} O\left(\int_x^b g\right).$$

C5. 43. Théorème (Intégration des relations $\sim$ pour les intégrales de fonctions positives sur un intervalle semi-ouvert). —

Soit $-\infty < a < b \leqslant +\infty$.
Soit $(f, g) \in \mathcal{CM}([a, b[, \mathbf{R})^2$ *telle que* $g \geqslant 0$ *et* $f(t) \underset{t \to b}{\sim} g(t)$.

(a) *Les intégrales* $\displaystyle\int_a^b f$ *et* $\displaystyle\int_a^b g$ *ont même nature.*

(b) *Si* $\displaystyle\int_a^b f$ *et* $\displaystyle\int_a^b g$ *convergent alors*

$$\int_x^b f \underset{x \to b}{\sim} \int_x^b g.$$

(c) *Si* $\displaystyle\int_a^b f$ *et* $\displaystyle\int_a^b g$ *divergent alors*

$$\int_a^x f \underset{x \to b}{\sim} \int_a^x g.$$

Soit $-\infty \leqslant a < b < +\infty$.
Soit $(f, g) \in \mathcal{CM}(]a, b], \mathbf{R})^2$ *telle que* $g \geqslant 0$ *et* $f(t) \underset{t \to a}{\sim} g(t)$.

(a) *Les intégrales* $\displaystyle\int_a^b f$ *et* $\displaystyle\int_a^b g$ *ont même nature.*

(b) *Si* $\displaystyle\int_a^b f$ *et* $\displaystyle\int_a^b g$ *convergent alors*

$$\int_a^x f \underset{x \to a}{\sim} \int_a^x g.$$

(c) *Si* $\displaystyle\int_a^b f$ *et* $\displaystyle\int_a^b g$ *divergent alors*

$$\int_x^b f \underset{x \to b}{\sim} \int_x^b g.$$

C5. 44. *Exercice.* — Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2} + t + 1} \, \mathrm{d}t$.

C5. 45. *Exercice.* — Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$.

C5. 46. *Exercice.* — Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 \, e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$.

C5. 47. *Exercice (Règle t^α).* — Soit $a \in \mathbf{R}$. Soit $f \in \mathcal{CM}([a, +\infty[, \mathbf{R})$ telle que $f \geqslant 0$.

1. On suppose qu'il existe $\alpha > 1$ tel que la fonction $t \longmapsto t^\alpha f(t)$ soit bornée au voisinage de $+\infty$. Que dire de la nature de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t) \, \mathrm{d}t$?
2. On suppose qu'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que la fonction $t^\alpha f(t) \underset{t \to +\infty}{\to} +\infty$. Que dire de la nature de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t) \, \mathrm{d}t$?

11 Intégrale faussement impropre sur un intervalle semi-ouvert

C5. 48. Proposition (Intégrale faussement impropre sur un intervalle semi-ouvert). —

Soit $-\infty < a < b < +\infty$. ***Soit*** $f \in \mathcal{C}^0([\,a\,,\,b\,[\,,\mathbf{C})$. ***Si la fonction*** f ***admet une limite finie en*** b, ***alors l'intégrale*** $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ ***est convergente.***	***Soit*** $-\infty < a < b < +\infty$. ***Soit*** $f \in \mathcal{C}^0(\,]\,a\,,\,b\,],\mathbf{C})$. ***Si la fonction*** f ***admet une limite finie en*** a, ***alors l'intégrale*** $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ ***est convergente.***

C5. 49. *Exercice.* — Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{d}t$.

C5. 50. *Exercice.* — Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t\ \ln(t)\ \mathrm{d}t$ converge, puis calculer sa valeur.

C5. 51. *Exercice.* — Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)(e^t-1)}{\cos(t)-1}\ \mathrm{d}t$.

12 Définition de la convergence d'une intégrale sur un intervalle ouvert

C5. 52. DÉFINITION (INTÉGRALE CONVERGENTE SUR UN INTERVALLE OUVERT). — *Soit* $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. *Soit* $f \in \mathcal{CM}(\,]\,a\,,\,b\,[\,, \mathbf{C})$.

(a) *On dit que l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ *converge s'il existe* $c \in\,]\,a\,,\,b\,[$ *tel que les intégrales* $\displaystyle\int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t$ *et* $\displaystyle\int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t$ *convergent.*

(b) *Si tel est le cas on pose :*

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t.$$

C5. 53. *Remarque.* — Soit $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Soit $f \in \mathcal{CM}(\,]\,a\,,\,b\,[\,, \mathbf{C})$.

(a) D'après la Proposition **C5.18**, s'il existe un $c\ \in\,]\,a\,,\,b\,[$ tel que les intégrales $\displaystyle\int_a^{x_0} f(t)\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{x_0}^b f(t)\ \mathrm{d}t$ convergent, alors pour tout $d\ \in\,]\,a\,,\,b\,[$, les intégrales $\displaystyle\int_a^d f(t)\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_d^b f(t)\ \mathrm{d}t$ convergent. La convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ ne dépend donc pas du point $c \in\,]\,a\,,\,b\,[$ choisi.

(b) Toujours d'après la roposition **C5.18**, si on suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge, alors pour tout $c, d \in\,]\,a\,,\,b\,[\,$:

$$\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t + \int_x^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^y f(t)\ \mathrm{d}t + \int_y^b f(t)\ \mathrm{d}t\ .$$

Ainsi, la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ ne dépend pas du $c \in\,]\,a\,,\,b\,[$ choisi.

C5. 54. *Remarque (Étude pratique de la convergence d'une intégrale sur un ouvert).* — Soit $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Pour étudier la convergence d'une intégrale sur $]\,a\,,\,b\,[$, on scinde l'étude en deux parties, en introduisant un point c de $]\,a\,,\,b\,[$, et en étudiant séparément la convergence sur $]\,a\,,\,c\,]$ et sur $[\,c\,,\,b\,[$.

C5. 55. *Exercice.* — L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} t\ \mathrm{d}t$ est-elle convergente ?

C5. 56. *Exercice.* — Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\ \mathrm{d}t$ converge.

C5. 57. *Exercice.* — Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\ \mathrm{d}t$ converge et préciser sa valeur.

13 Propriétés élémentaires des intégrales convergentes sur un intervalle ouvert

C5. 58. Proposition (Propriétés élémentaires des intégrales convergentes sur un intervalle ouvert). — *Soit* $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

1. Linéarité – *Soit* $(f_1, f_2) \in \mathcal{CM}(\,]\,a\,,\,b\,[\,, \mathbf{C})^2$*, soient* $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{C}^2$*. Si les intégrales* $\displaystyle\int_a^b f_1$ *et* $\displaystyle\int_a^b f_2$ *sont convergentes, alors l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ *est également convergente et :*

$$\int_a^b \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = \lambda_1 \int_a^b f_1 + \lambda_2 \int_a^b f_2.$$

2. Positivité – *Soit* $f \in \mathcal{CM}(\,]\,a\,,\,b\,[\,, \mathbf{R})$ *telle que, pour tout* $t \in\,]\,a\,,\,b\,[\,,\ f(t) \geqslant 0$*. Si l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f$ *converge, alors* $\displaystyle\int_a^b f \geqslant 0$.

3. Croissance – *Soit* $(f, g) \in \mathcal{CM}(\,]\,a\,,\,b\,[\,, \mathbf{R})^2$ *telles que, pour tout* $t \in\,]\,a\,,\,b\,[\,,\ f(t) \leqslant g(t)$*. Si les intégrales* $\displaystyle\int_a^b f$ *et* $\displaystyle\int_a^b g$ *convergent, alors* $\displaystyle\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.

14 Théorème de domination pour les intégrales de fonctions positives sur un intervalle ouvert

C5. 59. THÉORÈME (DOMINATION POUR LES INTÉGRALES DE FONCTIONS POSITIVES SUR UN INTERVALLE OUVERT). — *Soit* $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. *Soient* $(f, g) \in \mathcal{CM}(\,]\,a\,,\,b\,[\,, \mathbf{R})^2$ *tel que* $0 \leqslant f \leqslant g$. *Alors :*

$$\int_a^b g \textit{ converge} \qquad \Longrightarrow \qquad \int_a^b f \textit{ converge.}$$

15 Fonctions intégrables sur un intervalle ouvert

C5. 60. Définition (Fonction intégrable sur intervalle ouvert). — *Soit* $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. *Soit* $f \in \mathcal{CM}(\,]\,a\,,\,b\,[\,,\mathbf{C})$. *On dit que* f *est intégrable sur* $]\,a\,,\,b\,[$ *ou que l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ *est absolument convergente si l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t$ *est convergente.*

C5. 61. Théorème (La convergence absolue implique la convergence sur un intervalle ouvert). —

Soit $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. *Soit* $f \in \mathcal{CM}(\,]\,a\,,\,b\,[\,,\mathbf{C})$. *Si* f *est intégrable sur* $]\,a\,,\,b\,[$, *alors l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ *est convergente.*

C5. 62. *Exercice.* **—** Étudier l'intégrabilité de la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \end{array} \right. .$$

16 Théorème de changement de variable sur un intervalle ouvert

C5. 63. Théorème (Théorème de changement de variable). — *Soit $\varphi\colon\ ]\alpha\,,\,\beta[\longrightarrow]a\,,\,b[$ une fonction bijective, de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante, où $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$ et $-\infty\leqslant\alpha<\beta\leqslant+\infty$. Soit $f\colon\ ]a\,,\,b[\longrightarrow\mathbf{C}$ une fonction continue. Alors :*

(a) *les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\ \mathrm{d}u$ sont de même nature ;*

(b) *si ces intégrales convergent, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\ \mathrm{d}u$.*

C5. 64. *Exercice.* — Écrire une version du théorème précédent, dans le cas où la fonction φ est cette fois strictement décroissante.

C5. 65. *Exercice.* — Établir la convergence et calculer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t^2}\ \mathrm{d}t$.

C5. 66. *Exercice.* — Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(t)}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$ converge et qu'elle est nulle.

17 Relation de Chasles pour les intégrales convergentes sur un intervalle quelconque

C5. 67. Théorème (Relation de Chasles). —

(a) *Soit* $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. *Soit* $f \in \mathcal{CM}([\,a\,,\,b\,[\,,\mathbf{C})$ *telle que l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ *converge. Soit* $c \in [\,a\,,\,b\,[$. *Alors les intégrales* $\displaystyle\int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t$ *et* $\displaystyle\int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t$ *convergent et*

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t\ .$$

(b) *Soit* $-\infty \leqslant a < b < +\infty$. *Soit* $f \in \mathcal{CM}(\,]\,a\,,\,b\,],\mathbf{C})$ *telle que l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ *converge. Soit* $c \in \,]\,a\,,\,b\,]$. *Alors les intégrales* $\displaystyle\int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t$ *et* $\displaystyle\int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t$ *convergent et*

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t\ .$$

(c) *Soit* $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. *Soit* $f \in \mathcal{CM}(\,]\,a\,,\,b\,[\,,\mathbf{C})$ *telle que l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ *converge. Soit* $c \in \,]\,a\,,\,b\,[$. *Alors les intégrales* $\displaystyle\int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t$ *et* $\displaystyle\int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t$ *convergent et*

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t\ .$$

18 Majoration du module d'une intégrale de fonction intégrable sur un intervalle quelconque

C5. 68. Théorème (Majoration du module d'une intégrale de fonction intégrable). —

(a) *Soit* $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. *Soit* $f \in \mathcal{CM}([\,a\,,\,b\,[\,,\mathbf{C})$ *une fonction intégrable sur* $[\,a\,,\,b\,[$. *Alors :*

$$\left|\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t\,.$$

(b) *Soit* $-\infty \leqslant a < b < +\infty$. *Soit* $f \in \mathcal{CM}(\,]\,a\,,\,b\,],\mathbf{C})$ *une fonction intégrable sur* $]\,a\,,\,b\,]$. *Alors :*

$$\left|\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t\,.$$

(c) *Soit* $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. *Soit* $f \in \mathcal{CM}(\,]\,a\,,\,b\,[\,,\mathbf{C})$ *une fonction intégrable sur* $]\,a\,,\,b\,[$. *Alors :*

$$\left|\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t\,.$$

19 Séparation de l'intégrale d'une fonction continue, positive ou nulle, intégrable sur un intervalle quelconque

C5. 69. Théorème (Fonction positives, continues, intégrables, d'intégrale nulle). —

(a) *Soit* $-\infty < a < b \leqslant +\infty$*. Soit* $f\colon [a\,,\,b[\longrightarrow \mathbf{C}$ *une fonction intégrable sur* $[a\,,\,b[$*. Alors*

$$\left(f \text{ est continue, positive ou nulle sur } [a\,,\,b[\text{ et } \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = 0\right) \quad \Longrightarrow \quad (f = 0 \text{ sur } [a\,,\,b[)\ .$$

(b) *Soit* $-\infty \leqslant a < b < +\infty$*. Soit* $f\colon]a\,,\,b] \longrightarrow \mathbf{C}$ *une fonction intégrable sur* $]a\,,\,b]$*. Alors*

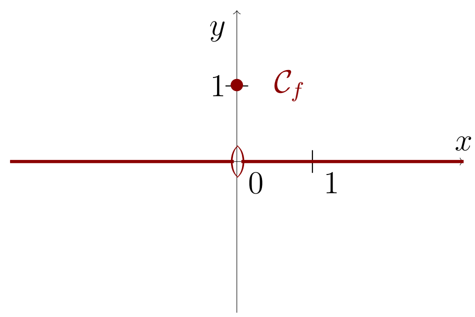
$$\left(f \text{ est continue, positive ou nulle sur }]a\,,\,b] \text{ et } \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = 0\right) \quad \Longrightarrow \quad (f = 0 \text{ sur }]a\,,\,b])\ .$$

(c) *Soit* $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$*. Soit* $f\colon]a\,,\,b[\longrightarrow \mathbf{C}$ *une fonction intégrable sur* $]a\,,\,b[$*. Alors*

$$\left(f \text{ est continue, positive ou nulle sur }]a\,,\,b[\text{ et } \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = 0\right) \quad \Longrightarrow \quad (f = 0 \text{ sur }]a\,,\,b[)\ .$$

C5. 70. *Remarque.* — Le résultat précédent est faux pour des fonctions qui sont uniquement continues par morceaux. Si, par exemple, f est la fonction indicatrice du singleton $\{0\}$, i.e. :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \end{array} \right.$$



alors f est continue par morceaux sur $\mathbf{R}$, intégrable sur $\mathbf{R}$, d'intégrale nulle sur $\mathbf{R}$, mais n'est pas identiquement nulle sur $\mathbf{R}$.

20 Théorème d'intégration par parties sur un intervalle quelconque

C5. 71. Théorème (Théorème d'intégration par parties). —

(a) *Soit* $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. *Soit* $f, g \in \mathcal{C}^1([\,a\,,\,b\,[\,, \mathbf{C})$. *Supposons que* fg *ait une limite finie en* b *et posons :*
$$[fg]_a^b := \lim_{x \to b} f(x)g(x) - f(a)g(a).$$
Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)\ \mathrm{d}t$ *et* $\displaystyle\int_a^b f'(t)g(t)\ \mathrm{d}t$ *sont de même nature et, si elles convergent :*
$$\int_a^b f(t)g'(t) = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\ \mathrm{d}t.$$

(b) *Soit* $-\infty \leqslant a < b < +\infty$. *Soit* $f, g \in \mathcal{C}^1(\,]\,a\,,\,b\,], \mathbf{C})$. *Supposons que* fg *ait une limite finie en* a *et posons :*
$$[fg]_a^b := f(b)g(b) - \lim_{x \to a} f(x)g(x).$$
Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)\ \mathrm{d}t$ *et* $\displaystyle\int_a^b f'(t)g(t)\ \mathrm{d}t$ *sont de même nature et, si elles convergent :*
$$\int_a^b f(t)g'(t) = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\ \mathrm{d}t.$$

(c) *Soit* $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. *Soit* $f, g \in \mathcal{C}^1(\,]\,a\,,\,b\,[\,, \mathbf{C})$. *Supposons que* fg *ait des limites finies en* a *et en* b *et posons :*
$$[fg]_a^b := \lim_{x \to b} f(x)g(x) - \lim_{x \to a} f(x)g(x).$$
Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)\ \mathrm{d}t$ *et* $\displaystyle\int_a^b f'(t)g(t)\ \mathrm{d}t$ *sont de même nature et, si elles convergent :*
$$\int_a^b f(t)g'(t) = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\ \mathrm{d}t.$$

C5. 72. *Exercice.* — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'intégrale :
$$I_n := \int_0^{+\infty} t^n\, e^{-t}\ \mathrm{d}t$$
converge et calculer sa valeur.

21 Trois exercices classiques

C5. 73. *Exercice (Intégrales de Riemann translatées).* — Soient a et b des réels tels que $a < b$. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$.

1. Étudier l'intégrabilité de $f_a : x \longmapsto \dfrac{1}{(x-a)^\alpha}$ sur $]a\,, b]$.
2. Étudier l'intégrabilité de $f_b : x \longmapsto \dfrac{1}{|x-b|^\alpha}$ sur $[a\,, b[$.

C5. 74. *Remarque.* — Les résultats de l'exercice précédent figurent au programme. Ils peuvent être appliqués, sans les démontrer de nouveau.

C5. 75. *Exercice (Intégrales de Bertrand).* — Soit $\alpha\,, \beta \in \mathbf{R}$. Soit la fonction

$$f_{\alpha\,,\beta} \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^\alpha\ |\ln(x)|^\beta} \end{array} \right.$$

1. Démontrer que $f_{\alpha\,,\beta}$ est intégrable sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$ si et seulement si $\alpha < 1$ ou $(\alpha = 1$ et $\beta > 1)$.
2. Démontrer que $f_{\alpha\,,\beta}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$ ou $(\alpha = 1$ et $\beta > 1)$.

C5. 76. *Exercice (La Gaussienne).* —

1. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} e^{-t^2}\ \mathrm{d}t$ est convergente. Nous admettons, pour le moment, qu'elle vaut $\sqrt{\pi}$.
2. Soit $\sigma > 0$. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{t^2}{\sigma^2}}\ \mathrm{d}t$ est convergente et calculer sa valeur.

22 Une sélection d'exercices

C5. 77. *Exercice.* — Les fonctions suivantes sont-elles intégrables sur $[1,+\infty[$? sur $]0,+\infty[$?

$$f_1 : t \longmapsto \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}} \qquad f_2 : t \longmapsto \frac{\ln(t)}{t^2+1} \qquad f_3 : \ \longmapsto \ln(t)\ e^{-t}$$

$$f_4 : t \longmapsto \frac{\ln(1+|\sin(t)|)}{1+t} \qquad f_5 : t \longmapsto \frac{\sin^3(t)}{t^2} \qquad f_6 : t \longmapsto \frac{\sin\left(\ln(1+\frac{1}{t})\right)}{t}$$

$$f_7 : t \longmapsto \frac{\arctan(t^2+1)}{t^2+1} \qquad f_8 : t \longmapsto \arctan\left(\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) \qquad f_9 : t \longmapsto t\left(\frac{1}{t} - \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right)$$

$$f_{10} : t \longmapsto e^{\sin(t)} \qquad f_{11} : t \longmapsto e^{-\sqrt{t}} \qquad f_{12} : t \longmapsto e^{-t\ln(t)}$$

C5. 78. *Exercice.* — Les fonctions suivantes sont-elles intégrables sur $]0,1[$?

$$f_1 : t \longmapsto \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} \qquad f_2 : t \longmapsto \frac{\ln(\sin(t))}{t} \qquad f_3 : t \longmapsto \frac{\sqrt{\sin(t^2)}}{t^{3/2}} \qquad f_4 : t \longmapsto \ln(t)\ln(1-t)$$

$$f_5 : t \longmapsto e^{-\frac{1}{t^2}} \qquad f_6 : t \longmapsto e^{\frac{1}{\sqrt{t}}} \qquad f_7 : t \longmapsto e^{\frac{1}{\sqrt{|\ln(t)|}}} \qquad f_8 : t \longmapsto \frac{e^{-\frac{1}{t}}\sin\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}$$

C5. 79. *Exercice.* — Justifier l'existence des intégrales suivantes et les calculer.

$$I_1 := \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t \qquad I_2 := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\ \ln(\sin(t))\ \mathrm{d}t \qquad I_3 := \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}\ \mathrm{d}t$$

$$I_4 := \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+t}-1}{t(1+t)}\ \mathrm{d}t \qquad I_5 := \int_0^{+\infty} \frac{(1+t)^{1/3}-1}{t(1+t)^{2/3}}\ \mathrm{d}t \qquad I_6 := \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(t)}{3\cos^2(t)+1}\ \mathrm{d}t$$

$$I_7 := \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t-t^2}}\ \mathrm{d}t \qquad I_8 := \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t-1)} \qquad I_9 := \int_0^{\infty} \frac{dt}{(e^t+1)(e^{-t}+1)}$$

$$I_{10} := \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t \qquad I_{11} := \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-t}\ \mathrm{d}t$$

C5. 80. *Exercice.* —

1. La fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{1+x^2}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?
2. La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x-1}}$ est-elle intégrable sur $]1,+\infty[$?

C5. 81. *Exercice.* — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, posons $I_n := \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{-1}{1+t^2}\right)^n \, \mathrm{d}t$.

1. Justifier que I_n est bien définie.
2. Démontrer que la suite $(-1)^n I_n$ est décroissante et déterminer sa limite.
3. La série $\sum I_n$ est-elle convergente ?

C5. 82. *Exercice (CCINP).* — Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin^2(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $[\pi,+\infty[$.

C5. 83. *Exercice (CCINP).* — Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2} \, \mathrm{d}x$ converge et calculer sa valeur.

C5. 84. *Exercice (CCINP).* — Existence et calcul de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x^2} \, \mathrm{d}x$.

C5. 85. *Exercice (CCINP).* — Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan\left(x^2\right)}{x^2} \, \mathrm{d}x$.

C5. 86. *Exercice (CCINP).* — Étudier l'intégrabilité sur $[1,+\infty[$ de la fonction

$$f : t \longmapsto (t+1)^{\frac{1}{t+1}} - 1 - \frac{\ln(t)}{t} \, .$$

C5. 87. *Exercice (Mines).* — Étudier en fonction de a la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^a+\sin^2(t)}$.

C5. 88. *Exercice.* — Pour quelles valeurs de a et b les intégrales suivantes sont-elles bien définies ?

$$I_1 := \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^a(1-t)^b} \qquad I_2 := \int_1^{+\infty} \frac{t^a}{1+t^b} \, \mathrm{d}t \qquad I_3 := \int_0^{+\infty} \frac{t^a e^{-t}}{1+t^b} \, \mathrm{d}t$$

C5. 89. *Exercice.* — À quelle condition sur a la fonction $t \longmapsto \dfrac{t-\sin(t)}{t^a}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

C5. 90. *Exercice.* — Notons $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) \, \mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t)) \, \mathrm{d}t$. Justifier l'existence de ces deux intégrales et les calculer. ***Indication : on pourra calculer*** $I+J$ ***et*** $I-J$.

C5. 91. *Exercice.* — Soient $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ tels que $a^2-4b<0$. Établir l'existence de l'intégrale suivante et la calculer.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+at+b} \, \mathrm{d}t$$

C5. 92. *Exercice (Navale).* — Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}^+, \mathbf{R})$ soit $a>0$. On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que pour tout $x>a$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} \, \mathrm{d}t$ converge.

C5. 93. *Exercice (INT).* — Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{x}{1-e^{-x}}\right) \frac{e^{-ax}}{x} \, \mathrm{d}x$, où a est un paramètre réel.

C5. 94. *Exercice (Mines).* — Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x} \ln\left(\frac{2+x}{1+x}\right) \, \mathrm{d}x$.

C5. 95. *Exercice (Mines).* — Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t\ln(t)}{(1-t^2)^{3/2}} \, \mathrm{d}t$.

C5. 96. *Exercice (Mines).* — Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(t)} \, \mathrm{d}t$.

C5. 97. *Exercice (Mines).* —

1. Déterminer les valeurs de a telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+at+1} \, \mathrm{d}t$ converge. Déterminer alors sa valeur.
2. Même question pour l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+at+a^2} \, \mathrm{d}t$.

C5. 98. *Exercice (Centrale).* — Convergence et calcul de $\displaystyle\int_{2/\pi}^{+\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) \, \mathrm{d}t$.

C5. 99. *Exercice (Centrale).* — Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{ch}^2(t)} \, \mathrm{d}t$.

C5. 100. *Exercice (Télécom Sud-Paris).* — Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} E(x)\, e^{-x} \, \mathrm{d}x$.

C5. 101. *Exercice (CCINP).* — Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 x\, E\left(\frac{1}{x}\right) \, \mathrm{d}x$.

C5. 102. *Exercice (TPE).* — Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x} - E\left(\frac{1}{x}\right) \ \mathrm{d}x$.

C5. 103. *Exercice (Mines).* — Existence et calcul éventuel de $\displaystyle\int_0^1 \frac{(-1)^{E(1/x)}}{x} \ \mathrm{d}x$.

C5. 104. *Exercice (ENSAM).* — Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles définies par $u_0 := a > 0$, $v_0 := b > 0$, et pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$u_{n+1} := \frac{u_n + v_n}{2} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

1. Montrer que (u_n) et (v_n) convegent vers la même limite $M(a,b)$.
2. Justifier l'existence de $I(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{a^2+t^2}\sqrt{b^2+t^2}} \ \mathrm{d}t$.
3. On pose $g(x) = I(1,x)$. Montrer que $I(a,b) = \dfrac{1}{a} g\left(\dfrac{b}{a}\right)$.
4. Montrer que l'application $t \longmapsto \dfrac{1}{2}\left(t - \dfrac{ab}{t}\right)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbf{R}^*$ dans $\mathbf{R}$. En l'utilisant pour une changement de variables, relier $I(a,b)$ et $I\left(\dfrac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right)$.
5. Relier enfin $I(a,b)$ et $M(a,b)$.

C5. 105. *Exercice (Mines).* —

1. Pour quelles valeurs de r, s l'intégrale $I(r,s) = \displaystyle\int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{s-1} \ \mathrm{d}x$ est-elle définie ?
2. Calculer $I(1/2, 1/2)$.

C5. 106. *Exercice (Mines).* — Justifier l''existence de l'intégrale suivante et la calculer :

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\cos^3(x)}{\sqrt{\cos(2x)}} \ \mathrm{d}x \ .$$

C5. 107. *Exercice (Mines).* —

1. Soit $\lambda > 0$. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\lambda^2\sin^2(x)} \ \mathrm{d}x$.
2. Discuter selon la valeur de $a > 0$ l'intégrabilité sur $[0, +\infty[$ de la fonction

$$x \longmapsto \frac{1}{1+x^a\sin^2(x)}.$$

C5. 108. *Exercice.* — Notons $I := \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} \ \mathrm{d}t$.

1. Justifier l'existence de I.
2. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t} \ \mathrm{d}t$.
3. Montrer que $I = \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t} \ \mathrm{d}t$. Donner la valeur de I.

C5. 109. *Exercice (Mines).* —

1. Déterminer les racines du polynôme $X^{n-1} + \ldots + X + 1$.
2. En déduire que : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x)) \ \mathrm{d}x$.

C5. 110. *Exercice.* — Notons pour $x \in \mathbf{R}$:

$$f(x) := \lim_{y\to+\infty}\int_x^y \frac{\sin(t)}{t} \ \mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \ \mathrm{d}t.$$

1. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et calculer sa dérivée.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t) \ \mathrm{d}t$ après avoir donné une signification à cette intégrale.

C5. 111. *Exercice (Centrale).* — Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}^+, \mathbf{R})$ intégrable sur $[0, +\infty[$ et monotone au voisinage de $+\infty$ (i.e : il existe $a \geqslant 0$ tel que f soit monotone sur $[a, +\infty[$).

1. Démontrer que pour tout $h > 0$, la série de terme général $f(nh)$ est convergente.
2. Démontrer que :

$$h \sum_{n=0}^{+\infty} f(nh) \xrightarrow[h \to 0^+]{} \int_0^{+\infty} f(x) \ \mathrm{d}x.$$

C5. 112. *Exercice (Centrale).* —

1. Démontrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall \lambda > 0$, $\forall (a, b) \in \mathbf{R}^2$:

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda t^2} \ \mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{C}{\sqrt{\lambda}}.$$

2. Soit $\lambda > 0$, soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telle que $f'' \geqslant \lambda$. On veut Démontrer l'existence d'un réel $C > 0$ indépendant de λ tel que :

$$\forall (a, b) \in \mathbf{R}^2, \ \left| \int_a^b e^{if(t)} \ \mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{C}{\sqrt{\lambda}}.$$

   (a) Étudier les variations et les limites de f' et de f. Démontrer que f a une borne inférieure et que celle-ci est un minimum.
   (b) Pourquoi peut-on supposer que le minimum de f est atteint en 0 et vaut 0 ?
   (c) Notons g la restriction de f à $\mathbf{R}^+$ et posons $g = g' \circ g^{-1}$. Calculer h' et Démontrer que pour tout $t \in \mathbf{R}^+$, $h(t) \leqslant \sqrt{2\lambda t}$.
   (d) Conclure en s'inspirant du cas où $f(t) = \lambda t^2$.

C5. 113. *Exercice (Centrale).* — Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}^+, \mathbf{R})$ telle que f et f'' soient intégrables. Démontrer que $f(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.

C5. 114. *Exercice (Centrale).* —

1. Les intégrales impropres $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\cos(t) \ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\cos^2(t) \ \mathrm{d}t$ sont-elles convergentes ?
2. Plus généralement, étudier la convergence d'une intégrale de la forme $\displaystyle\int_0^{+\infty} tP(\cos(t)) \ \mathrm{d}t$ où P est un polynôme.

C5. 115. *Exercice (Centrale).* — Pour tout $a \in \mathbf{C}$, on note $I(a) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \left|e^{it} - a\right| \ \mathrm{d}t$.

1. Démontrer l'existence de $I(0)$ et donner sa valeur.
2. Démontrer l'existence de $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin(t)) \ \mathrm{d}t$ et en déduire l'existence de $I(1)$.
3. Démontrer que $I(a)$ existe pour tout $a \in \mathbf{C}$ et que $I(a) = I(|a|)$.
4. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$, notons $M(P) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \ln\left(\left|P\left(e^{it}\right)\right|\right) \ \mathrm{d}t$.
   (a) Démontrer que $M(P)$ existe pour tout polynôme P non nul.
   (b) Démontrer que pour tout $b > 0$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $M(X^n - b^n) = nM(X - b)$.
   (c) Déterminer la valeur de $M(X - b)$ pour tout $b \in]0, 1[$, puis pour $b > 1$.
   (d) Calculer $M(X - 1)$.
   (e) Calculer $M(P)$ pour tout $P \in \mathbf{C}[X]$ non nul.

C5. 116. *Exercice.* — Étudier l'intégrabilité de la fonction $f : t \longmapsto e^{-t\sin(t)}$ sur $[0, +\infty[$.
Indication : On pourra commencer par donner l'allure de la courbe représentative de f.

C5. 117. *Exercice.* — Notons f la fonction définie sur $]0, 1]$ par $f : x \longmapsto \displaystyle\int_x^1 \frac{e^t}{t} \ \mathrm{d}t$. Étudier l'intégrabilité de f sur $]0, 1]$.

C5. 118. *Exercice.* — Soit $f \in \mathcal{CM}([0, +\infty[, \mathbf{R})$ une fonction intégrable. Démontrer qu'il existe une suite (x_n) de réels convergeant vers $+\infty$ telle que :

$$x_n f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

C5. 119. *Exercice (X).* — Soit $f \in \mathcal{C}(0, +\infty[, \mathbf{R})$ une fonction positive et décroissante. Posons $g(x) := f(x)\sin(x)$, pour tout $x \geqslant 0$. Démontrer que f est intégrable si et seulement si g est intégrable.