M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Programme de la journée de révisions n°8
Calcul intégral

David BLOTTIÈRE

En MPSI, une construction de l'intégrale de Riemann vous a été exposée. On définit tout d'abord la notion d'intégrale pour des fonctions en escalier comme « aire sous la courbe », puis on étend cette définition aux fonctions continues par morceaux grâce à un résultat d'approximation, reposant sur le Théorème de Heine : toute fonction continue sur un segment est uniformément continue. L'intégrale ainsi construite possède des propriétés agréables : linéarité, croissance, relation de Chasles, majoration de la valeur absolue d'une intégrale. En outre, on dispose du Théorème fondamental de l'analyse : si I est un intervalle de $\mathbf{R}$, si $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction continue sur I et si a est un point de I, alors la fonction :

$$\left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est l'unique primitive de f sur I, qui s'annulle en a. C'est d'ailleurs grâce à ce Théorème que l'on peut effectivement calculer une intégrale, connaissant une primitive de l'intégrande : si F est une primitive d'une fonction continue par morceaux f sur un segment $[a, b]$, alors :

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = F(b) - F(a)\ .$$

R8. 1. *Travail sur le cours.* — Le document support est le polycopié de cours sur l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment [PDF].

On fixe deux nombres réels a et b tels que $a < b$. On considère trois ensembles de fonctions :
- $\mathcal{E}([a,b],\mathbf{R}) := \{f \in \mathcal{F}([a,b],\mathbf{R}) \ : \ f$ est une fonction en escalier sur $[a,b]\}$;
- $\mathcal{C}([a,b],\mathbf{R}) := \{f \in \mathcal{F}([a,b],\mathbf{R}) \ : \ f$ est une fonction continue sur $[a,b]\}$;
- $\mathcal{C}_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbf{R}) := \{f \in \mathcal{F}([a,b],\mathbf{R}) \ : \ f$ est une fonction continue par morceaux sur $[a,b]\}$.

Il faut commencer par revoir les définitions précises de « fonction en escalier sur $[a,b]$ » et de « fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ ». Ces trois ensembles $\mathcal{E}([a,b],\mathbf{R})$, $\mathcal{C}([a,b],\mathbf{R})$, $\mathcal{C}_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbf{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de l'ensemble $\mathcal{F}([a,b],\mathbf{R})$ des fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$. En outre, on a les inclusions suivantes :

$$\mathcal{E}([a,b],\mathbf{R}) \subset \mathcal{C}_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbf{R}) \supset \mathcal{C}([a,b],\mathbf{R}) \ .$$

L'objectif de ce chapitre est de construire une théorie de l'intégration (due à Riemann), modelée sur l'interprétation (géométrique) d'aire sous une courbe que l'on peut approcher par des rectangles.

(A) Construction d'une intégrale sur $\mathcal{E}([a,b],\mathbf{R})$

On définit l'intégrale d'une fonction en escalier sur $[a,b]$ à l'aide d'une somme d'aires de rectangles (cf. Définition de la partie 1.2 du document support). Cette intégrale :

$$(\star) \qquad \int_a^b : \mathcal{E}([a,b],\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}$$

possède les propriétés suivantes.

- Linéarité : $\forall\,(f_1,f_2) \in \mathcal{E}([a,b],\mathbf{R})^2 \quad \forall(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbf{R}^2 \qquad \int_a^b \lambda_1.f_1 + \lambda_2.f_2 = \lambda_1 \int_a^b f_1 + \lambda_2 \int_a^b f_2$
- Croissance : $\forall\,(f_1,f_2) \in \mathcal{E}([a,b],\mathbf{R})^2 \quad f_1 \leqslant f_2 \implies \int_a^b f_1 \leqslant \int_a^b f_2$
- Majoration de la valeur absolue d'une intégrale : $\forall\, f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbf{R}) \qquad \left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$
- Relation de Chasles : $\forall\,(f,c) \in \mathcal{E}([a,b],\mathbf{R}) \times [a,b] \qquad \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

(B) Construction d'une intégrale sur $\mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbf{R})$

On commence par établir un théorème d'approximation (uniforme) des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ par des fonctions en escalier, qui résulte du théorème de Heine (Théorème 2 du document support). Celui-ci est la pierre angulaire du chapitre et permet d'étendre l'intégrale de $\mathcal{E}([a,b],\mathbf{R})$ à $\mathcal{C}_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbf{R})$. On dispose alors d'une application :

$$(\star\star) \qquad \int_a^b : \mathcal{C}_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}$$

qui prolonge $(\star)$ et qui possède des propriétés analogues.

- Linéarité : $\forall\,(f_1,f_2) \in \mathcal{C}_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbf{R})^2 \quad \forall(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbf{R}^2 \qquad \int_a^b \lambda_1.f_1 + \lambda_2.f_2 = \lambda_1 \int_a^b f_1 + \lambda_2 \int_a^b f_2$

- Croissance : $\forall\,(f_1,f_2)\in \mathcal{C}_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbf{R})^2 \quad f_1\leqslant f_2 \implies \displaystyle\int_a^b f_1 \leqslant \int_a^b f_2$
- Majoration de la valeur absolue d'une intégrale : $\forall\, f\in \mathcal{C}_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbf{R}) \qquad \left|\displaystyle\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$
- Relation de Chasles : $\forall\,(f,c)\in \mathcal{C}_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbf{R})\times[a,b] \qquad \displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

Le théorème sur les sommes de Riemann découle quasi immédiatement de la définition de l'intégrale $(\star\star)$.

(C) Théorème fondamental de l'analyse pour les fonctions continues et méthodes de calculs

En restreignant $(\star\star)$ à $\mathcal{C}([a,b],\mathbf{R})$ on obtient une application :

$$(\star\star\star) \qquad \int_a^b : \mathcal{C}([a,b],\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}$$

qui possède des propriétés analogues

- Linéarité : $\forall\,(f_1,f_2)\in \mathcal{C}([a,b],\mathbf{R})^2 \quad \forall(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbf{R}^2 \qquad \displaystyle\int_a^b \lambda_1.f_1+\lambda_2.f_2 = \lambda_1\int_a^b f_1 + \lambda_2\int_a^b f_2$
- Croissance : $\forall\,(f_1,f_2)\in \mathcal{C}([a,b],\mathbf{R})\times\mathcal{C}([a,b],\mathbf{R}) \quad f_1\leqslant f_2 \implies \displaystyle\int_a^b f_1 \leqslant \int_a^b f_2$
- Majoration de la valeur absolue d'une intégrale : $\forall\, f\in \mathcal{C}([a,b],\mathbf{R}) \qquad \left|\displaystyle\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$
- Relation de Chasles : $\forall\,(f,c)\in \mathcal{C}([a,b],\mathbf{R})\times[a,b] \qquad \displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

mais aussi une une propriété additionnelle importante.

- Séparation : $\forall\, f\in \mathcal{C}([a,b],\mathbf{R}) \qquad \left(f\geqslant 0 \;\text{ et }\; \displaystyle\int_a^b f = 0\right) \implies f=0$

La théorie de l'intégrale de Riemann ainsi construite est intimement liée au calcul différentiel. Le résultat qui encode ce lien est le théorème fondamental de l'analyse (Théorème 13 du document support). Il a deux conséquences fondamentales :

- il assure que toute fonction continue sur $[a,b]$ possède une primitive sur $[a,b]$;
- il permet de calculer effectivement des intégrales.

Pour atteindre ce dernier but, on apprendra parfaitement les deux tables, pages 6 et 7 du document support.

Deux outils plus sophistiqués et fort pratiques sont également à retravailler (énoncés et, bien sûr, démonstration) :

- la formule d'intégration par parties ;
- la formule de changement de variable.

On étudiera enfin la notion d'intégrale pour une fonction continue par morceaux à valeurs complexes.

Ce travail sur le cours est fondamental. Il convient de connaître toutes les définitions, ainsi que les énoncés et des démonstrations de chacun des résultats de ce chapitre.

R8. 2. *Vrai-Faux.* — Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Si la réponse est « Vrai », alors démontrer le résultat. Si la réponse est « Faux », argumenter au moyen un contre-exemple.

1. Une primitive de la fonction $f\colon x \longmapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ sur $]-1,1[$ est la fonction $x \longmapsto \arctan(x)$.

Faux. En effet, la fonction $\arctan$ est dérivable sur $]-1,1[$ (en fait $\arctan$ est définie et dérivable sur $\mathbf{R}$) et a pour dérivée la fonction :

$$x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$$

qui ne coïncide pas avec la fonction f sur $]-1,1[$ puisque leurs valeurs en $1/2$ diffèrent.

Remarque. En décomposant la fraction rationnelle $\dfrac{1}{1-X^2}$ en éléments simples :

$$\frac{1}{1-X^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-X} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+X}$$

on démontre qu'une primitive de f sur $]-1,1[$ est la fonction :

$$F\colon x \longmapsto \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) .$$

Cette fonction F se trouve être la bijection réciproque (nommée « argument tangente hyperbolique ») de la fonction bijective :

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow &]-1,1[\\ x & \longmapsto & \tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \end{array}\right. .$$

2. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^{2021}(\ln(7)x)\,\sin^{1977}(\sqrt{2}\,x)}{\cos^{2022}(e^3\,x) + \arctan(\cosh(x)+\pi^5)}\ \mathrm{d}x = 0.$

Vrai. La fonction $x \longmapsto \dfrac{\cos^{2021}(\ln(7)x)\,\sin^{1977}(\sqrt{2}\,x)}{\cos^{2022}(e^3\,x) + \arctan(\cosh(x)+\pi^5)}$ est (continue et) impaire sur $[-\pi,\pi]$. Comme l'intervalle $[-\pi,\pi]$ est symétrique par rapport à 0, on démontre le résultat grâce au changement de variable $u=-x$.

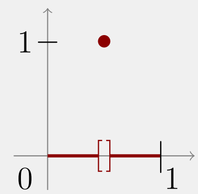
Remarque. Si l'on traçait la représentation graphique de l'intégrande (i.e. de la fonction qu'on intègre) sur $[-\pi,\pi]$, nous observerions un phénomène de compensation d'aires algébriques.

3. Si une fonction $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ est continue par morceaux, positive ou nulle sur $[0,1]$ et vérifie $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t = 0$, alors, pour tout $t \in [0,1]$, $f(t)=0$.

Faux. La fonction $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par, pour tout $t \in [0,1]$:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 1/2 \\ 1 & \text{si } t = 1/2 \end{cases}$$

dont le graphe est représenté ci-dessous, livre un contre-exemple.



Remarque. Si l'on demande à f d'avoir une régularité plus forte, à savoir d'être continue (et pas uniquement continue par morceaux) sur $[0,1]$, alors la conclusion est valide. Il s'agit d'un cas particulier de la propriété de séparation de l'intégrale pour les fonctions continues sur un segment.

4. Soit $n \in \mathbf{N}$, soient $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ et soit $P := \sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k \in \mathbf{R}[X]$. Alors :

$$\int_0^1 P^2(t)\ \mathrm{d}t = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\forall\, k \in [\![0,n]\!], \quad a_k = 0)\,.$$

Vrai. Supposons $\displaystyle\int_0^1 P^2(t)\ \mathrm{d}t = 0$. La fonction $t \longmapsto P^2(t)$ est continue et positive ou nulle sur $[0,1]$. D'après la propriété de séparation de l'intégrale pour des fonctions continues sur un segment :

$$\forall\, t \in [0,1], \quad P^2(t) = 0\ .$$

Nous en déduisons que, pour tout $t \in [0,1]$, $P(t) = 0$. Comme le polynôme P possède une infinité de racines, P est le polynôme nul. Par définition, tous les coefficients de P sont donc nuls.

5. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln^2(x)}{x}\ \mathrm{d}x = \frac{\ln^3(2)}{3}$.

Vrai. On rappelle que, si I est un intervalle de $\mathbf{R}$, si $u\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur I et si $n \in \mathbf{N}$, alors une primitive de la fonction :

$$x \longmapsto u'(x)\, u^n(x)$$

est donnée par la fonction :

$$x \longmapsto \frac{1}{n+1}\, u^{n+1}(x).$$

Grâce à ce résultat de cours (qui admet des généralisations à connaître) :

$$\int_1^2 \frac{\ln^2(x)}{x}\ \mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{x} \times (\ln(x))^2\ \mathrm{d}x = \left[\frac{(\ln(x))^3}{3}\right]_1^2 = \frac{\ln^3(2)}{3}.$$

R8. 3. *Neuf calculs d'intégrales.* — Calculer les intégrales suivantes.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}\ \mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_{1/e}^{1/e^3} \frac{1}{t\ln(t)}\ \mathrm{d}t$ (c) $\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_0^{\ln(3)} \frac{1}{e^x+3e^{-x}}\ \mathrm{d}x$ (e) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\ \mathrm{d}t$ (f) $\displaystyle\int_0^1 x^2\ e^{-x}\ \mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int_0^1 x\ \ \mathrm{Arctan}^2(x)\ \mathrm{d}x$ (h) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\sin(x)}\ \mathrm{d}x$ (i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\ \mathrm{d}x$

(a) Pour tout $x \in \mathbf{R}_{>0}$

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}} = x^{\frac{1}{8}} := \exp\left(\frac{1}{8}\ln(x)\right).$$

Remarque : Cette relation n'est pas valide pour $x = 0$ car le membre de droite n'est pas défini.

Donc une primitive de la fonction $f\colon x \longmapsto \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$ est $x \longmapsto \frac{8}{9}x^{\frac{9}{8}}$ sur $\mathbf{R}_{>0}$. Cette dernière fonction admet un prolongement par continuité en 0 défini par

$$F\colon \mathbf{R}_{\geq 0} \to \mathbf{R}\ ,\ x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{8}{9}x^{\frac{9}{8}} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

On vérifie que $\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \frac{8}{9}x^{\frac{1}{8}} \underset{x\to 0^+}{\to} 0 = f(0)$. Donc F est dérivable en 0 à droite avec comme nombre dérivée en 0 à droite $f(0)$. Par suite la fonction F est une primitive de f sur $\mathbf{R}_{\geq 0}$. Nous pouvons remarquer

$$F(x) = \frac{8}{9}x\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$$

pour tout $x \in \mathbf{R}_{\geq 0}$.
Ainsi :

$$\int_0^1 \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}} = F(1) - F(0) = \frac{8}{9}.$$

(b) Pour tout $t \in \mathbf{R}_{>0}$,

$$\frac{1}{t\ln(t)} = \frac{\frac{1}{t}}{\ln(t)}.$$

On reconnaît ainsi une « forme » $\dfrac{u'(t)}{u(t)}$, où $u\colon t \longmapsto \ln(t)$. Ainsi

$$\int_{1/e}^{1/e^3} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t = \left[\ln\left(|\ln(t)|\right)\right]_{1/e}^{1/e^3} = \ln(3).$$

(c) On effectue le changement de variable $u = \sqrt{x}$, mais pour ce faire le point 0 pose problème ; en effet $x \longmapsto \sqrt{x}$ n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ (mais cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$).
Soit $\varepsilon > 0$.

$$\int_{\varepsilon}^{1} e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_{\varepsilon}^{1} 2ue^u\,du = 2\int_{\varepsilon}^{1} ue^u\,du. \tag{1}$$

Par intégration par parties

$$\int_{\varepsilon}^{1} ue^u\,du = \left[ue^u\right]_{\varepsilon}^{1} - \int_{\varepsilon}^{1} e^u\,du = e - \varepsilon e^{\varepsilon} - (e - e^{\varepsilon}) = -\varepsilon e^{\varepsilon} + e^{\varepsilon}. \tag{2}$$

D'après (1) et (2)

$$\int_{\varepsilon}^{1} e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\left(-\varepsilon e^{\varepsilon} + e^{\varepsilon}\right). \tag{3}$$

La fonction $x \longmapsto e^{\sqrt{x}}$ est continue sur $[0,1]$, donc

$$\int_{\varepsilon}^{1} e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \int_{0}^{1} e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

De $-\varepsilon e^{\varepsilon} + e^{\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 1$, (3) et (4), nous déduisons

$$\int_{0}^{1} e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2.$$

(d) On effectue le changement de variable $u = e^x$.

$$\int_{0}^{\ln(3)} \frac{1}{e^x + 3e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{3} \frac{1}{u^2+3}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\int_{1}^{3} \frac{1}{\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}u. \tag{5}$$

On calcule l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{1}{\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}u$ à l'aide du changement de variable $v = \frac{u}{\sqrt{3}}$:

$$\int_{1}^{3} \frac{1}{\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}u = \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{v^2+1}\sqrt{3}\,\mathrm{d}v = \sqrt{3}\;\left[\mathrm{Arctan}(v)\right]_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}$$

d'où :

$$\int_1^3 \frac{1}{\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\, \mathrm{d}u = \sqrt{3}\ \left[\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{3}\right) - \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right] \tag{6}$$

De (5), (6), $\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ et $\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{\pi}{6}$ nous déduisons

$$\int_0^{\ln(3)} \frac{1}{e^x+3e^{-x}}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi\sqrt{3}}{18}.$$

(e) Nous effectuons le changement de variable $t = \cos(x)$.

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\, \mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^0 \sqrt{1-(\cos(x))^2}\, (-\sin(x))\, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} |\sin(x)|\ \sin(x)\, \mathrm{d}x. \tag{7}$$

Pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x) \geq 0$. Donc

$$\int_0^{\pi/2} |\sin(x)|\ \sin(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} (\sin(x))^2\, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(2x)}{2}\, \mathrm{d}x$$

d'où

$$\int_0^{\pi/2} |\sin(x)|\ \sin(x)\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}. \tag{8}$$

De (7) et (8), nous déduisons [a]

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$

(f) Nous effectuons deux intégrations par parties successives, en abaissant à chaque fois le degré du monôme $x^?$ qui apparaît.

$$\int_0^1 x^2\, e^{-x}\, \mathrm{d}x = \left[-x^2 e^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 2x\, e^{-x}\, \mathrm{d}x = -\frac{1}{e} + 2\int_0^1 x\, e^{-x}\, \mathrm{d}x \tag{9}$$

$$\int_0^1 x\, e^{-x}\, \mathrm{d}x = \left[-xe^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\, \mathrm{d}x = -\frac{1}{e} + \left[-e^{-x}\right]_0^1 = -\frac{2}{e} + 1 \tag{10}$$

De (9) et (10) nous déduisons

$$\int_0^1 x^2\, e^{-x}\, \mathrm{d}x = 2 - \frac{5}{e}.$$

(g) Par intégration par parties

$$\int_0^1 x \; \operatorname{Arctan}^2(x) \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} \operatorname{Arctan}^2(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} \operatorname{Arctan}(x) \, \mathrm{d}x$$

d'où :

$$\int_0^1 x \; \operatorname{Arctan}^2(x) \, \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{32} - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} \operatorname{Arctan}(x) \, \mathrm{d}x. \tag{11}$$

Nous observons

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} \operatorname{Arctan}(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) \operatorname{Arctan}(x) \, \mathrm{d}x$$

d'où :

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} \operatorname{Arctan}(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \operatorname{Arctan}(x) \, \mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \operatorname{Arctan}(x) \, \mathrm{d}x \tag{12}$$

Par intégration par parties

$$\int_0^1 \operatorname{Arctan}(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^1 1 \times \operatorname{Arctan}(x) \, \mathrm{d}x = [x \operatorname{Arctan}(x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$$

d'où :

$$\int_0^1 \operatorname{Arctan}(x) \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{2} \ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2). \tag{13}$$

Nous calculons

$$\int_0^1 \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{u'(x)} \underbrace{\operatorname{Arctan}(x)}_{u(x)} \, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2} \operatorname{Arctan}^2(x)\right]_0^1 = \frac{\pi^2}{32}. \tag{14}$$

De (11), (12), (13) et (14), nous déduisons

$$\int_0^1 x \; \operatorname{Arctan}^2(x) \, \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln(2).$$

(h) Nous observons

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\sin(x)} \, \mathrm{d}x = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{\sin^2(x)} \, \mathrm{d}x = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{1-\cos^2(x)} \, \mathrm{d}x. \tag{15}$$

Nous effectuons le changement de variable $u = \cos(x)$.

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{1-\cos^2(x)} \, \mathrm{d}x = \int_{1/2}^{0} -\frac{1}{1-u^2} \, \mathrm{d}u = \int_0^{1/2} \frac{1}{1-u^2} \, \mathrm{d}u \tag{16}$$

La décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{1-X^2}$ est

$$\frac{1}{1-X^2}=\frac{1}{(1-X)(1+X)}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-X}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+X}.$$

Par suite

$$\int_0^{1/2}\frac{1}{1-u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_0^{1/2}\frac{1}{1-u}\,\mathrm{d}u+\frac{1}{2}\int_0^{1/2}\frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u$$

d'où :

$$\int_0^{1/2}\frac{1}{1-u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\,\left[-\ln(|1-u|)\right]_0^{1/2}+\frac{1}{2}\,\left[\ln(|1+u|)\right]_0^{1/2}=\ln\left(\sqrt{3}\right). \tag{17}$$

De (15), (16) et (17), on déduit

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x=\ln\left(\sqrt{3}\right).$$

(i) La forme canonique de X^2+X+1 est $\left(X+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$. Nous observons

$$\int_0^1\frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\int_0^1\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x. \tag{18}$$

Pour calculer $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x$ nous effectuons le changement de variable :

$$u=\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

$$\int_0^1\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{\sqrt{3}}{2}\,\left[\mathrm{Arctan}(u)\right]_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\underset{\text{cf. (d)}}{=}\frac{\sqrt{3}\pi}{12} \tag{19}$$

De (18) et (19) nous déduisons

$$\int_0^1\frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}\pi}{9}.$$

---

a. Nous pourrions aussi donner une preuve géométrique du résultat, car nous calculons en fait l'aire d'un quart de disque de rayon 1.

R8. 4. *Douze calculs de primitives.* — Calculer une primitive de chacune des fonctions suivantes, en précisant dans chacun des cas un intervalle de définition.

(a) $x \longmapsto \text{Arcsin}^2(x)$ (b) $x \longmapsto \dfrac{x^7}{(1+x^4)^2}$ (c) $x \longmapsto \dfrac{8}{(x^2-1)\,(x^2+1)^2}$

(d) $x \longmapsto \dfrac{1}{1+\text{ch}(x)}$ (e) $x \longmapsto \text{Arctan}\left(\sqrt[3]{x}\right)$ (f) $x \longmapsto \sin^4(x)\ \cos^3(x)$

(g) $x \longmapsto \cos^3(x)$ (h) $x \longmapsto \sin^4(x)$ (i) $x \longmapsto \dfrac{1}{\cos^4(x)-\sin^4(x)}$

(j) $x \longmapsto \dfrac{1+\tan(x)}{1+\sin(2x)}$ (k) $x \longmapsto \dfrac{\cos^6(x)}{\sin^5(x)}$ (l) $x \longmapsto \sqrt{e^x-1}$

(a) On se place sur $I =]-1,1[$. En effet nous allons utiliser l'intégration par parties, pour lesquelles la régularité $\mathcal{C}^1$ compte.
La fonction $f\colon x \longmapsto \text{Arcsin}^2(x)$ est continue sur I, et donc la fonction

$$F\colon x \longmapsto \int_0^x \text{Arcsin}^2(t)\ \mathrm{d}t$$

est une primitive de f sur I (précisément il s'agit de l'unique primitive de f sur I qui s'annule en 0).
Soit $x \in I$.
Nous faisons une intégration par parties. Alors

$$F(x) = \int_0^x 1 \times \text{Arcsin}^2(t)\ \mathrm{d}t = \left[t\ \text{Arcsin}^2(t)\right]_0^x - \int_0^x \frac{2t}{\sqrt{1-t^2}}\ \text{Arcsin}(t)\ \mathrm{d}t$$

et donc :

$$F(x) = x\ \text{Arcsin}^2(x) + 2\int_0^x \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}\ \text{Arcsin}(t)\ \mathrm{d}t. \tag{20}$$

Pour calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}\ \text{Arcsin}(t)\ \mathrm{d}t$, nous effectuons une nouvelle intégration par parties :

$$\int_0^x \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}\ \text{Arcsin}(t)\ \mathrm{d}t = \left[\sqrt{1-t^2}\ \text{Arcsin}(t)\right]_0^x - \int_0^x 1\ \mathrm{d}t$$

d'où :

$$\int_0^x \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}\ \text{Arcsin}(t)\ \mathrm{d}t = \sqrt{1-x^2}\ \text{Arcsin}(x) - x \tag{21}$$

De (20) et (21) nous déduisons que

$$F(x) = x\ \text{Arcsin}^2(x) + 2\sqrt{1-x^2}\ \text{Arcsin}(x) - 2x.$$

(b) On se place sur $I=\mathbf{R}$. La fonction $g\colon x\longmapsto \dfrac{x^7}{(1+x^4)^2}$ est continue sur I, et donc la fonction

$$G\colon x\longmapsto \int_0^x \frac{t^7}{(1+t^4)^2}\,\mathrm{d}t$$

est une primitive de g sur I.
Soit $x\in\ I$.
On effectue le changement de variable $u=t^4$:

$$G(x)=\int_0^{x^4}\frac{1}{4}\frac{u}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int_0^{x^4}\frac{(1+u)-1}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}t$$

d'où :

$$G(x)=\frac{1}{4}\left(\int_0^{x^4}\frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}t-\int_0^{x^4}\frac{1}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}t\right) \tag{22}$$

Or

$$\int_0^{x^4}\frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}t=\left[\ln(|1+u|)\right]_0^{x^4}=\ln(1+x^4) \tag{23}$$

et

$$\int_0^{x^4}\frac{1}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}t=\left[-\frac{1}{1+u}\right]_0^{x^4}=1-\frac{1}{1+x^4}. \tag{24}$$

De (22), (23) et (24), nous déduisons

$$G(x)=\frac{1}{4}\ln(1+x^4)+\frac{1}{4}\frac{1}{1+x^4}-\frac{1}{4}.$$

Par suite la fonction

$$x\longmapsto \frac{1}{4}\ln(1+x^4)+\frac{1}{4}\frac{1}{1+x^4}$$

est une primitive de g sur $\mathbf{R}$.

(c) On se place sur $I=]-1,1[$.

- La décomposition en éléments simples de $\dfrac{8}{(X^2-1)\,(X^2+1)^2}$ est donnée par :

$$\begin{aligned}\frac{8}{(X^2-1)\,(X^2+1)^2} &= \frac{8}{(X-1)\,(X+1)\,(X^2+1)^2}\\ &= \frac{1}{X-1}-\frac{1}{X+1}-2\,\frac{1}{1+X^2}-4\,\frac{1}{(X^2+1)^2}.\end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in I$

$$\frac{8}{(x^2-1)\,(x^2+1)^2} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - 2\,\frac{1}{1+x^2} - 4\,\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2} \tag{25}$$

- Pour répondre à la question, il nous reste essentiellement à primitiver $x \longmapsto \dfrac{1}{\left(x^2+1\right)^2}$ sur I. Cette fonction étant continue sur I, une de ses primitives sur I est $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\left(t^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}t$.
  Soit $x \in I$. On effectue le changement de variable $t = \tan(u)$ pour obtenir :

$$\int_0^x \frac{1}{\left(t^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\mathrm{Arctan}(x)} \frac{1}{1+\tan^2(u)}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\mathrm{Arctan}(x)} \cos^2(u)\,\mathrm{d}u\ .$$

  En linéarisant $\cos^2$ à l'aide d'une formule de trigonométrie :

$$\int_0^x \frac{1}{\left(t^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\mathrm{Arctan}(x)} \frac{\cos(2u)+1}{2}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{4}\sin(2u) + \frac{1}{2}u\right]_0^{\mathrm{Arctan}(x)}\ .$$

  Donc

$$x \longmapsto \frac{1}{4}\sin\left(2\ \mathrm{Arctan}(x)\right) + \frac{1}{2}\mathrm{Arctan}(x)$$

  est une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{\left(x^2+1\right)^2}$ sur I.
  Nous remarquons :

$$\begin{array}{rcl}\sin\left(2\ \mathrm{Arctan}(x)\right) & = & 2\sin\left(\mathrm{Arctan}(x)\right)\cos\left(\mathrm{Arctan}(x)\right)\\ & = & 2\tan\left(\mathrm{Arctan}(x)\right)\cos^2\left(\mathrm{Arctan}(x)\right)\\ & = & \dfrac{2x}{1+\tan^2\left(\mathrm{Arctan}(x)\right)}\\ & = & \dfrac{2x}{1+x^2}.\end{array}$$

  Ainsi

$$x \longmapsto \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\mathrm{Arctan}(x)$$

  est une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{\left(x^2+1\right)^2}$ sur I.
- De l'étude précédente et de (25), nous déduisons qu'une primitive de la fonction

$$x \longmapsto \frac{8}{(x^2-1)\,(x^2+1)^2}$$

  sur I est :

$$x \longmapsto \ln(|x-1|) - \ln(|x+1|) - 4\mathrm{Arctan(x)} - 2\frac{x}{1+x^2} = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - 4\mathrm{Arctan(x)} - 2\frac{x}{1+x^2}.$$

(d) On se place sur $I = \mathbf{R}$. La fonction

$$h\colon x \longmapsto \frac{1}{1+\mathrm{ch}(x)} = \frac{1}{1+\frac{e^x+e^{-x}}{2}} = \frac{2}{2+e^x+e^{-x}}$$

est continue sur I. Donc la fonction

$$H\colon x \longmapsto \int_0^x \frac{2}{2+e^t+e^{-t}}\ \mathrm{d}t$$

est une primitive de h sur I.
Soit $x \in I$.
On effectue le changement de variable $u = e^x$.

$$H(x) = \int_1^{e^x} \frac{2}{u^2+2u+1}\ \mathrm{d}u = 2\int_1^{e^x} \frac{1}{(1+u)^2}\ \mathrm{d}u = 2\ \left[-\frac{1}{(1+u)}\right]_1^{e^x} = 2 - \frac{2}{1+e^x}$$

Nous en déduisons que la fonction

$$x \longmapsto -\frac{2}{1+e^x}$$

est une primitive de la fonction h.

(e) On se place sur $\mathbf{R}_{>0}$. On ne considère pas le point 0, car nous souhaitons que la fonction racine cubique soit $\mathcal{C}^1$ sur notre intervalle d'étude. La fonction $k\colon x \longmapsto \mathrm{Arctan}\left(\sqrt[3]{x}\right)$ est continue sur I. Donc la fonction

$$K\colon x \longmapsto \int_1^x \mathrm{Arctan}\left(\sqrt[3]{t}\right)\ \mathrm{d}t$$

est une primitive de k sur I.
Soit $x \in I$.
On effectue le changement de variable $u = \sqrt[3]{t} = t^{\frac{1}{3}}$.

$$K(x) = \int_1^{\sqrt[3]{x}} 3u^2\mathrm{Arctan}(u)\ \mathrm{d}u = 3\int_1^{\sqrt[3]{x}} u^2\mathrm{Arctan}(u)\ \mathrm{d}u \tag{26}$$

Par intégration par parties :

$$\int_1^{\sqrt[3]{x}} u^2\mathrm{Arctan}(u)\ \mathrm{d}u = \left[\frac{u^3}{3}\mathrm{Arctan}(u)\right]_1^{\sqrt[3]{x}} - \int_1^{\sqrt[3]{x}} \frac{u^3}{3}\frac{1}{1+u^2}\ \mathrm{d}u$$

et donc :

$$\int_1^{\sqrt[3]{x}} u^2\mathrm{Arctan}(u)\ \mathrm{d}u = \frac{x}{3}\,\mathrm{Arctan}\left(\sqrt[3]{x}\right) - \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3}\int_1^{\sqrt[3]{x}} \frac{u^3}{1+u^2}\ \mathrm{d}u \tag{27}$$

Nous calculons :

$$\int_1^{\sqrt[3]{x}} \frac{\overbrace{u^3}^{(u+u^3)-u}}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \int_1^{\sqrt[3]{x}} u - \frac{u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^2}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right)\right]_1^{\sqrt[3]{x}}$$

et donc :

$$\int_1^{\sqrt[3]{x}} \frac{u^3}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(2) \tag{28}$$

De (26), (27), (28), nous déduisons

$$K(x) = x\,\mathrm{Arctan}\left(\sqrt[3]{x}\right) - \frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln(2).$$

Donc la fonction

$$x \longmapsto x\,\mathrm{Arctan}\left(\sqrt[3]{x}\right) - \frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right)$$

est une primitive de k sur I.

(f) On se place sur $I = \mathbf{R}$. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}
\sin^4(x)\cos^3(x) &= \sin^4(x)\cos^2(x)\cos(x) \\
&= \sin^4(x)(1-\sin^2(x))\cos(x) \\
&= \underbrace{\cos(x)}_{u'(x)} \times \underbrace{\sin^4(x)}_{u^4(x)} - \underbrace{\cos(x)}_{u'(x)} \times \underbrace{\sin^6(x)}_{u^6(x)}
\end{aligned}$$

Donc une primitive de la fonction $x \longmapsto \sin^4(x)\cos^3(x)$ sur I est la fonction

$$x \longmapsto \frac{\sin^5(x)}{5} - \frac{\sin^7(x)}{7}.$$

(g) On se place sur $I = \mathbf{R}$. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\cos^3(x) = \cos^2(x)\cos(x) = (1-\sin^2(x))\cos(x) = \cos(x) - \underbrace{\cos(x)}_{u'(x)} \times \underbrace{\sin^2(x)}_{u^2(x)}$$

Donc une primitive de la fonction $x \longmapsto \cos^3(x)$ sur I est la fonction

$$x \longmapsto \sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3}.$$

(h) On se place sur $I = \mathbf{R}$. Soit $x \in \mathbf{R}$. Nous linéarisons $\sin^4(x)$, qui égale

$$\begin{aligned}
&\sin^4(x)\\
=\ & \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4 \quad \text{[Formule d'Euler]}\\
=\ & \frac{1}{16}\ \left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^4\\
=\ & \frac{1}{16}\ \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}\ \left(e^{ix}\right)^k\ \left(-e^{ix}\right)^{4-k} \quad \text{[Formule du binôme de Newton]}\\
=\ & \frac{1}{16}\ \left(\binom{4}{0}\left(e^{ix}\right)^0\ \left(-e^{ix}\right)^4+\binom{4}{1}\left(e^{ix}\right)^1\ \left(-e^{ix}\right)^3+\binom{4}{2}\left(e^{ix}\right)^2\ \left(-e^{ix}\right)^2\right.\\
&\left.+\binom{4}{3}\left(e^{ix}\right)^3\ \left(-e^{ix}\right)^1+\binom{4}{4}\left(e^{ix}\right)^4\ \left(-e^{ix}\right)^0\right)\\
=\ & \frac{1}{16}\ \left(e^{-i4x}-4e^{-i2x}+6-4e^{i2x}+e^{i4x}\right) \quad \text{[Formule de Moivre et relation fonctionnelle]}\\
=\ & \frac{1}{16}\ \left(\underbrace{e^{-i4x}+e^{i4x}}_{2\cos(4x)}-4\left(\underbrace{e^{-i2x}+e^{i2x}}_{2\cos(2x)}\right)+6\right) \quad \text{[Formule d'Euler]}\\
=\ & \frac{1}{8}\cos(4x)-\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{3}{8}
\end{aligned}$$

Nous en déduisons qu'une primitive de la fonction $x \longmapsto \sin^4(x)$ sur I est la fonction

$$x \longmapsto \frac{1}{32}\sin(4x)-\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{3}{8}x.$$

(i) Nous nous plaçons sur $I = \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$. Nous observons que, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$:

$$\frac{1}{\cos^4(x)-\sin^4(x)} = \frac{1}{\left(\cos^2(x)-\sin^2(x)\right)\left(\cos^2(x)+\sin^2(x)\right)} = \frac{1}{\cos^2(x)-\sin^2(x)} = \frac{1}{\cos(2x)}\ .$$

La fonction

$$\ell\colon x \longmapsto \frac{1}{\cos^4(x)-\sin^4(x)} = \frac{1}{\cos(2x)}$$

est continue sur I. Donc une de ses primitives sur I est donnée par

$$L\colon x \longmapsto \int_0^x \frac{1}{\cos(2t)}\ \mathrm{d}t.$$

Soit $x \in \mathbf{R}$. Nous observons

$$L(x) = \int_0^x \frac{1}{\cos(2t)}\ \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\cos(2t)}{\cos^2(2t)}\ \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\cos(2t)}{1-\sin^2(2t)}\ \mathrm{d}t.$$

On effectue le changement de variable $u = \sin(2t)$ pour trouver

$$L(x) = \int_0^{\sin(2x)} \frac{1}{2}\frac{1}{1-u^2}\ \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^{\sin(2x)} \frac{1}{1-u^2}\ \mathrm{d}u. \tag{29}$$

La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{1}{1-U^2}$ est donnée par

$$\frac{1}{1-U^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{U+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{U-1}. \tag{30}$$

De (29) et (30), nous déduisons

$$L(x) = \frac{1}{4}\int_0^{\sin(2x)} \frac{1}{u+1}\ \mathrm{d}u - \frac{1}{4}\int_0^{\sin(2x)} \frac{1}{u-1}\ \mathrm{d}u = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{\sin(2x)+1}{\sin(2x)-1}\right).$$

(j) On se place sur $I = \left]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right[$. Soit $x \in I$.

Nous observons

$$\begin{aligned}
\frac{1+\tan(x)}{1+\sin(2x)} &= \frac{1+\tan(x)}{\cos^2(x)+\sin^2(x)+2\sin(x)\cos(x)} \\
&= \frac{1+\tan(x)}{(\cos(x)+\sin(x))^2} \\
&= \frac{1}{\cos^2(x)}\ \frac{1+\tan(x)}{(1+\tan(x))^2} \\
&= \frac{1}{\cos^2(x)}\ \frac{1}{1+\tan(x)}.
\end{aligned}$$

Nous reconnaissons une « forme » du type $u'(x) \times \dfrac{1}{u(x)}$, avec $u(x) = 1+\tan(x)$. Donc une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1+\tan(x)}{1+\sin(2x)}$ sur I est donnée par

$$x \longmapsto \ln\left(|1+\tan(x)|\right) = \ln\left(1+\tan(x)\right).$$

(k) Nous nous plaçons sur $I =]0, \pi[$. La fonction $m\colon x \longmapsto \dfrac{\cos^6(x)}{\sin^5(x)}$ est continue sur I. Donc une de ses primitives sur I est donnée par

$$M\colon x \longmapsto \int_{\pi/2}^{x} \frac{\cos^6(t)}{\sin^5(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^{x} \frac{\cos^6(t)}{\sin^6(t)}\,\sin(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^{x} \frac{\cos^6(t)}{(1-\cos^2(t))^3}\,\sin(t)\,\mathrm{d}t.$$

Soit $x \in I$.
Nous effectuons le changement de variable $u = \cos(t)$.

$$M(x) = -\int_{0}^{\cos(x)} \frac{u^6}{(1-u^2)^6}\,\mathrm{d}u. \tag{31}$$

La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{U^6}{(1-U^2)^6}$ est donnée par

$$\frac{U^6}{(1-U^2)^6} = \begin{cases} -1 + \dfrac{15}{16}\dfrac{1}{U+1} - \dfrac{9}{16}\dfrac{1}{(U+1)^2} + \dfrac{1}{8}\dfrac{1}{(U+1)^3} - \dfrac{15}{16}\dfrac{1}{U-1} \\ -\dfrac{9}{16}\dfrac{1}{(U-1)^2} - \dfrac{1}{8}\dfrac{1}{(U-1)^3}. \end{cases} \tag{32}$$

De (31) et (32), nous déduisons que $M(x)$ égale :

$$\int_0^{\cos(x)} 1 - \frac{15}{16}\frac{1}{u+1} + \frac{9}{16}\frac{1}{(u+1)^2} - \frac{1}{8}\frac{1}{(u+1)^3} + \frac{15}{16}\frac{1}{u-1} + \frac{9}{16}\frac{1}{(u-1)^2} + \frac{1}{8}\frac{1}{(u-1)^3}\,\mathrm{d}u\ .$$

Cette intégrale vaut :

$$\left[u - \frac{15}{16}\ln(u+1) - \frac{9}{16}\frac{1}{u+1} + \frac{1}{16}\frac{1}{(u+1)^2} + \frac{15}{16}\ln(u-1) - \frac{9}{16}\frac{1}{u-1} - \frac{1}{16}\frac{1}{(u-1)^2}\right]_0^{\cos(x)}.$$

En évaluant ce crochet, il vient :

$$\begin{aligned} M(x) &= \cos(x) - \frac{15}{16}\ln(\cos(x)+1) - \frac{9}{16}\frac{1}{\cos(x)+1} + \frac{1}{16}\frac{1}{(\cos(x)+1)^2} \\ &\qquad + \frac{15}{16}\ln(\cos(x)-1) - \tfrac{9}{16}\frac{1}{\cos(x)-1} - \frac{1}{16}\frac{1}{(\cos(x)-1)^2} + \text{« constante réelle ».} \end{aligned}$$

Ainsi la fonction

$$\begin{aligned} x \longmapsto\ & \cos(x) - \frac{15}{16}\ln(\cos(x)+1) - \frac{9}{16}\frac{1}{\cos(x)+1} + \frac{1}{16}\frac{1}{(\cos(x)+1)^2} \\ & + \frac{15}{16}\ln(\cos(x)-1) - \tfrac{9}{16}\frac{1}{\cos(x)-1} - \frac{1}{16}\frac{1}{(\cos(x)-1)^2} \end{aligned}$$

est une primitive de la fonction m sur I.

(1) Nous nous plaçons sur $I =]0, +\infty[$. La fonction $n\colon x \longmapsto \sqrt{e^x - 1}$ est continue sur I, donc une de ses primitives sur I est donnée par

$$N\colon x \longmapsto \int_1^x \sqrt{e^t - 1}\,\mathrm{d}t.$$

Soit $x \in \mathbf{R}$. Nous effectuons le changement de variable $u = e^t$.

$$N(x) = \int_e^{e^x} \frac{\sqrt{u-1}}{u}\,\mathrm{d}u = \int_e^{e^x} \frac{\sqrt{u-1}}{\left(\sqrt{u-1}\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}u \tag{33}$$

Nous effectuons le changement de variable $v = \sqrt{u-1}$:

$$\int_e^{e^x} \frac{\sqrt{u-1}}{\left(\sqrt{u-1}\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}u = \int_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^x-1}} \frac{2v^2}{v^2+1}\,\mathrm{d}v = 2\int_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^x-1}} \frac{(v^2+1)-1}{v^2+1}\,\mathrm{d}v$$

d'où :

$$\int_e^{e^x} \frac{\sqrt{u-1}}{\left(\sqrt{u-1}\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}u = 2\int_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^x-1}} 1 - \frac{1}{v^2+1}\,\mathrm{d}v \tag{34}$$

De (33) et (34) nous déduisons

$$N(x) = 2\ \left[v - \mathrm{Arctan}(v)\right]_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^x-1}} = 2\sqrt{e^x-1} - 2\ \mathrm{Arctan}\left(\sqrt{e^x-1}\right) + \text{ « constante réelle ».}$$

Ainsi la fonction

$$x \longmapsto 2\sqrt{e^x-1} - 2\ \mathrm{Arctan}\left(\sqrt{e^x-1}\right)$$

est une primitive de n sur I.

R8. 5. *Autour de la séparation de l'intégrale d'une fonction continue.* —

1. Soient des nombres réels a, b tels que $a < b$. Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ telle que $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = 0$. Démontrer que f s'annule une fois sur $[a,b]$, i.e. qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.
2. Soit $g\colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $\displaystyle\int_0^1 g(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}$. Démontrer que g possède un point fixe, i.e. qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $g(c) = c$.

On pourra visionner un corrigé vidéo en cliquant sur le lien suivant [YouTube] (12 minutes).