M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Programme de la journée de révisions n°8
Calcul intégral

David BLOTTIÈRE

En MPSI, une construction de l'intégrale de Riemann vous a été exposée. On définit tout d'abord la notion d'intégrale pour des fonctions en escalier comme « aire sous la courbe », puis on étend cette définition aux fonctions continues par morceaux grâce à un résultat d'approximation, reposant sur le Théorème de Heine : toute fonction continue sur un segment est uniformément continue. L'intégrale ainsi construite possède des propriétés agréables : linéarité, croissance, relation de Chasles, majoration de la valeur absolue d'une intégrale. En outre, on dispose du Théorème fondamental de l'analyse : si I est un intervalle de $\mathbf{R}$, si $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction continue sur I et si a est un point de I, alors la fonction :

$$\left|\begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t \end{array}\right.$$

est l'unique primitive de f sur I, qui s'annulle en a. C'est d'ailleurs grâce à ce Théorème que l'on peut effectivement calculer une intégrale, connaissant une primitive de l'intégrande : si F est une primitive d'une fonction continue par morceaux f sur un segment $[a,b]$, alors :

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = F(b) - F(a)\ .$$

R8. 1. *Travail sur le cours.* — Le document support est le polycopié de cours sur l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment [PDF].

On fixe deux nombres réels a et b tels que $a < b$. On considère trois ensembles de fonctions :

- $\mathcal{E}([a,b],\mathbf{R}) := \{f \in \mathcal{F}([a,b],\mathbf{R}) \ : \ f$ est une fonction en escalier sur $[a,b]\}$;
- $\mathcal{C}([a,b],\mathbf{R}) := \{f \in \mathcal{F}([a,b],\mathbf{R}) \ : \ f$ est une fonction continue sur $[a,b]\}$;
- $\mathcal{C}_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbf{R}) := \{f \in \mathcal{F}([a,b],\mathbf{R}) \ : \ f$ est une fonction continue par morceaux sur $[a,b]\}$.

Il faut commencer par revoir les définitions précises de « fonction en escalier sur $[a,b]$ » et de « fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ ». Ces trois ensembles $\mathcal{E}([a,b],\mathbf{R})$, $\mathcal{C}([a,b],\mathbf{R})$, $\mathcal{C}_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbf{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de l'ensemble $\mathcal{F}([a,b],\mathbf{R})$ des fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$. En outre, on a les inclusions suivantes :

$$\mathcal{E}([a,b],\mathbf{R}) \subset \mathcal{C}_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbf{R}) \supset \mathcal{C}([a,b],\mathbf{R}) \ .$$

L'objectif de ce chapitre est de construire une théorie de l'intégration (due à Riemann), modelée sur l'interprétation (géométrique) d'aire sous une courbe que l'on peut approcher par des rectangles.

(A) Construction d'une intégrale sur $\mathcal{E}([a,b],\mathbf{R})$

On définit l'intégrale d'une fonction en escalier sur $[a,b]$ à l'aide d'une somme d'aires de rectangles (cf. Définition de la partie 1.2 du document support). Cette intégrale :

$$(\star) \qquad \int_a^b : \mathcal{E}([a,b],\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}$$

possède les propriétés suivantes.

- Linéarité : $\forall\,(f_1,f_2) \in \mathcal{E}([a,b],\mathbf{R})^2 \quad \forall(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbf{R}^2 \qquad \int_a^b \lambda_1.f_1 + \lambda_2.f_2 = \lambda_1 \int_a^b f_1 + \lambda_2 \int_a^b f_2$
- Croissance : $\forall\,(f_1,f_2) \in \mathcal{E}([a,b],\mathbf{R})^2 \quad f_1 \leqslant f_2 \implies \int_a^b f_1 \leqslant \int_a^b f_2$
- Majoration de la valeur absolue d'une intégrale : $\forall\, f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbf{R}) \qquad \left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$
- Relation de Chasles : $\forall\,(f,c) \in \mathcal{E}([a,b],\mathbf{R}) \times [a,b] \qquad \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

(B) Construction d'une intégrale sur $\mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbf{R})$

On commence par établir un théorème d'approximation (uniforme) des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ par des fonctions en escalier, qui résulte du théorème de Heine (Théorème 2 du document support). Celui-ci est la pierre angulaire du chapitre et permet d'étendre l'intégrale de $\mathcal{E}([a,b],\mathbf{R})$ à $\mathcal{C}_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbf{R})$. On dispose alors d'une application :

$$(\star\star) \qquad \int_a^b : \mathcal{C}_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}$$

qui prolonge $(\star)$ et qui possède des propriétés analogues.

- Linéarité : $\forall\,(f_1,f_2) \in \mathcal{C}_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbf{R})^2 \quad \forall(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbf{R}^2 \qquad \int_a^b \lambda_1.f_1 + \lambda_2.f_2 = \lambda_1 \int_a^b f_1 + \lambda_2 \int_a^b f_2$

- Croissance : $\forall\,(f_1,f_2)\in\mathcal{C}_{\rm pm}([a,b],\mathbf{R})^2 \quad f_1\leqslant f_2 \implies \displaystyle\int_a^b f_1 \leqslant \int_a^b f_2$
- Majoration de la valeur absolue d'une intégrale : $\forall\,f\in\mathcal{C}_{\rm pm}([a,b],\mathbf{R}) \qquad \left|\displaystyle\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$
- Relation de Chasles : $\forall\,(f,c)\in\mathcal{C}_{\rm pm}([a,b],\mathbf{R})\times[a,b] \quad \displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

Le théorème sur les sommes de Riemann découle quasi immédiatement de la définition de l'intégrale ($\star\star$).

(C) Théorème fondamental de l'analyse pour les fonctions continues et méthodes de calculs

En restreignant ($\star\star$) à $\mathcal{C}([a,b],\mathbf{R})$ on obtient une application :

$$(\star\star\star) \qquad \int_a^b : \mathcal{C}([a,b],\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}$$

qui possède des propriétés analogues

- Linéarité : $\forall\,(f_1,f_2)\in\mathcal{C}([a,b],\mathbf{R})^2 \quad \forall(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbf{R}^2 \quad \displaystyle\int_a^b \lambda_1.f_1+\lambda_2.f_2 = \lambda_1\int_a^b f_1 + \lambda_2\int_a^b f_2$
- Croissance : $\forall\,(f_1,f_2)\in\mathcal{C}([a,b],\mathbf{R})\times\mathcal{C}([a,b],\mathbf{R}) \quad f_1\leqslant f_2 \implies \displaystyle\int_a^b f_1 \leqslant \int_a^b f_2$
- Majoration de la valeur absolue d'une intégrale : $\forall\,f\in\mathcal{C}([a,b],\mathbf{R}) \qquad \left|\displaystyle\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$
- Relation de Chasles : $\forall\,(f,c)\in\mathcal{C}([a,b],\mathbf{R})\times[a,b] \quad \displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

mais aussi une une propriété additionnelle importante.

- Séparation : $\forall\,f\in\mathcal{C}([a,b],\mathbf{R}) \quad \left(f\geqslant 0 \text{ et } \displaystyle\int_a^b f = 0\right) \implies f = 0$

La théorie de l'intégrale de Riemann ainsi construite est intimement liée au calcul différentiel. Le résultat qui encode ce lien est le théorème fondamental de l'analyse (Théorème 13 du document support). Il a deux conséquences fondamentales :

- il assure que toute fonction continue sur $[a,b]$ possède une primitive sur $[a,b]$;
- il permet de calculer effectivement des intégrales.

Pour atteindre ce dernier but, on apprendra parfaitement les deux tables, pages 6 et 7 du document support.

Deux outils plus sophistiqués et fort pratiques sont également à retravailler (énoncés et, bien sûr, démonstration) :

- la formule d'intégration par parties ;
- la formule de changement de variable.

On étudiera enfin la notion d'intégrale pour une fonction continue par morceaux à valeurs complexes.

Ce travail sur le cours est fondamental. Il convient de connaître toutes les définitions, ainsi que les énoncés et des démonstrations de chacun des résultats de ce chapitre.

R8. 2. *Vrai-Faux.* — Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Si la réponse est « Vrai », alors démontrer le résultat. Si la réponse est « Faux », argumenter au moyen un contre-exemple.

1. Une primitive de la fonction $f\colon x \longmapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ sur $]-1,1[$ est la fonction $x \longmapsto \arctan(x)$.
2. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^{2021}(\ln(7)x)\,\sin^{1977}(\sqrt{2}\,x)}{\cos^{2022}(e^3\,x)+\arctan(\cosh(x)+\pi^5)}\ \mathrm{d}x = 0.$
3. Si une fonction $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ est continue par morceaux, positive ou nulle sur $[0,1]$ et vérifie $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t = 0$, alors, pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) = 0$.
4. Soit $n \in \mathbf{N}$, soient $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ et soit $P := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k \in \mathbf{R}[X]$. Alors :
$$\int_0^1 P^2(t)\ \mathrm{d}t = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\forall\, k \in [\![0,n]\!], \quad a_k = 0)\,.$$
5. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln^2(x)}{x}\ \mathrm{d}x = \frac{\ln^3(2)}{3}.$

R8. 3. *Neuf calculs d'intégrales.* — Calculer les intégrales suivantes.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}\ \mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_{1/e}^{1/e^3} \frac{1}{t\ln(t)}\ \mathrm{d}t$ (c) $\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_0^{\ln(3)} \frac{1}{e^x+3e^{-x}}\ \mathrm{d}x$ (e) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\ \mathrm{d}t$ (f) $\displaystyle\int_0^1 x^2\, e^{-x}\ \mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int_0^1 x\ \mathrm{Arctan}^2(x)\ \mathrm{d}x$ (h) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\sin(x)}\ \mathrm{d}x$ (i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\ \mathrm{d}x$

R8. 4. *Douze calculs de primitives.* — Calculer une primitive de chacune des fonctions suivantes, en précisant dans chacun des cas un intervalle de définition.

(a) $x \longmapsto \mathrm{Arcsin}^2(x)$ (b) $x \longmapsto \dfrac{x^7}{(1+x^4)^2}$ (c) $x \longmapsto \dfrac{8}{(x^2-1)\,(x^2+1)^2}$

(d) $x \longmapsto \dfrac{1}{1+\mathrm{ch}(x)}$ (e) $x \longmapsto \mathrm{Arctan}\left(\sqrt[3]{x}\right)$ (f) $x \longmapsto \sin^4(x)\ \cos^3(x)$

(g) $x \longmapsto \cos^3(x)$ (h) $x \longmapsto \sin^4(x)$ (i) $x \longmapsto \dfrac{1}{\cos^4(x)-\sin^4(x)}$

(j) $x \longmapsto \dfrac{1+\tan(x)}{1+\sin(2x)}$ (k) $x \longmapsto \dfrac{\cos^6(x)}{\sin^5(x)}$ (l) $x \longmapsto \sqrt{e^x-1}$

R8. 5. *Autour de la séparation de l'intégrale d'une fonction continue.* —

1. Soient des nombres réels a, b tels que $a < b$. Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ telle que $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = 0$. Démontrer que f s'annule une fois sur $[a,b]$, i.e. qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.
2. Soit $g\colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $\displaystyle\int_0^1 g(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}$. Démontrer que g possède un point fixe, i.e. qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $g(c) = c$.