16. Fonctions à valeurs dans un e.v.n. de dim. finie

§ 1 Notations

Dans tout ce chapitre :

- I désigne un intervalle non vide de $\mathbb{R}$;
- E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;
- $||\cdot||_E$ une norme quelconque sur E.

C16.1. Remarque Comme E est de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes. Dans ce qui suit, toutes les notions liées aux limites dans E sont donc indépendantes de la norme $||\cdot||_E$ choisie.

§ 2 Dérivée en un point, fonction de classe $\mathscr{C}^1$

C16.2. Définition (Dérivée en un point) Soit $f \in \mathscr{F}(I,E)$, soit $a \in I$.

1. On dit que f est **dérivable en a** s'il existe $\ell \in E$ tel que :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x \longrightarrow a]{} \ell.$$

2. Si ce vecteur ℓ existe, il est unique. On le note $f'(a)$ et on l'appelé **vecteur dérivé de f en a**.

C16.3. Remarque (Indépendance vis-à-vis de la norme choisie) La notion de dérivabilité et de vecteur dérivé ne dépend par de la norme choisie sur E.

C16.4. Remarque

1. Si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite à gauche (respectivement à droite) en a, on la note $f'_g(a)$ (respectivement $f'_d(a)$) et on l'appelle vecteur dérivé à gauche (respectivement à droite) de f en a.
2. En cinématique, si la fonction f donne la position d'un objet en fonction du temps, alors sa dérivée est le vecteur vitesse.

C16.5. Rappel (Notation de Landau o)

1. Soit $g \in \mathscr{F}(I,E)$, soit $a \in I$. On dit que le vecteur $g(x)$ de E est un o de $(x-a)$ au voisinage de a, et on écrit $g(x) \underset{x \to a}{=} o(x-a)$, si :

$$\frac{g(x)}{x-a} \xrightarrow[x \to a]{} 0_E \quad \text{ou de manière équivalente si} \quad \left\| \frac{g(x)}{x-a} \right\|_E \xrightarrow[x \to a]{} 0_{\mathbb{R}}.$$

2. Soient $g_1, g_2 \in \mathscr{F}(I,E)$, soit $a \in I$. On écrit $g_1(x) \underset{x \to a}{=} g_2(x) + o(x-a)$, si $g_1(x) - g_2(x) \underset{x \to a}{=} o(x-a)$, i.e. si :

$$\frac{g_1(x)-g_2(x)}{x-a} \xrightarrow[x \to a]{} 0_E.$$

C16.6. Proposition (Dérivabilité, vecteur dérivé et DL à l'ordre 1) Soit $f \in \mathscr{F}(I,E)$, soit $a \in I$.

1. f est dérivable en a si et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a, i.e. si et seulement s'il existe $\alpha \in E$ tel que :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + (x-a)\,\alpha + o(x-a)\ .$$

2. Si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a, i.e. s'il existe $\alpha \in E$ tel que :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + (x-a)\,\alpha + o(x-a)$$

alors $f'(a) = \alpha$.

Démonstration

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons f dérivable en a. Pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $a+h \in I$, posons :

$$\varepsilon(h) := \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)$$

de sorte que $\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0_{\mathbb{R}}]{} 0_E$. Alors $\varepsilon(x-a) \xrightarrow[x\to a]{} 0_E$, et :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon(x-a)$$

Donc f admet un DL en a à l'ordre 1.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que f possède un DL en a à l'ordre 1, i.e. qu'il existe $\alpha \in E$ tel que :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + (x-a)\alpha + o(x-a)\,.$$

Alors $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - \alpha \xrightarrow[x\to a]{} 0_E$ et donc $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} \alpha$. Ainsi f est dérivable en a et $f'(a) = \alpha$.

C16.7. Proposition (Dérivabilité implique continuité – version ponctuelle) Soit $f \in \mathscr{F}(I,E)$, soit $a \in I$. Alors :

$$f \text{ est dérivable en } a \quad \Longrightarrow \quad f \text{ est continue en } a\,.$$

Démonstration

- Commençons par remarquer que si $g(x) \underset{x\to a}{=} o(x-a)$, alors :

$$g(x) = \underbrace{(x-a)}_{\xrightarrow[x\to a]{} 0_{\mathbb{R}}} \underbrace{\frac{g(x)}{x-a}}_{\xrightarrow[x\to a]{} 0_E} \xrightarrow[x\to a]{} 0_E\,.$$

Ainsi « un $o(x-a)$ tend vers 0_E quand x tend vers a ».
- Supposons f dérivable en a. Alors f possède le développement limité en a à l'ordre 1 suivant (cf. C16.6) :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + (x-a)f'(a) + o(x-a)$$

et donc, d'après le • précédent $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$. Ainsi f est continue en a.

C16.8. Définition (Dérivabilité et dérivée sur un intervalle) Soit $f \in \mathscr{F}(I,E)$.

1. On dit que f est dérivable sur I, si f est dérivable en tout point de I.
2. Si f est dérivable sur I, sa fonction dérivée, notée f', est définie par :

$$f' \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & f'(x)\,. \end{array} \right.$$

3. On note $\mathscr{D}(I,E)$ l'ensemble des fonctions dérivables de I vers E.
4. On note $\mathscr{C}^1(I,E)$ l'ensemble des fonctions f dérivables de I vers E telles que f' soit continue de I vers E.

C16.9. Remarque (Dérivabilité implique continuité – version globale) Un fonction de I dans E qui est dérivable sur I, est continue sur I, d'après C16.7.

C16.10. Théorème (Espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$)

1. $\mathscr{C}^1(I,E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I,E)$.
2. L'application

$$D \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^1(I,E) & \longrightarrow & \mathscr{C}^0(I,E) \\ f & \longmapsto & f' \end{array} \right.$$

est linéaire.

Démonstration

- La fonction nulle, i.e. la fonction
$$\left|\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & 0_E \end{array}\right.$$
est clairement dérivable sur I, avec pour dérivée elle-même. Elle est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
- Soient $f\colon I \to E$ et $g\colon I \to E$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$.
  — Soit $a \in I$. Comme f et g sont dérivables en a, elles admettent le développement limité à l'ordre 1 suivant :
  $$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a)+(x-a)f'(a)+o(x-a) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x\to a}{=} g(a)+(x-a)g'(a)+o(x-a)$$
  donc :
  $$(\lambda f+\mu g)(x) \underset{x\to a}{=} (\lambda f+\mu g)(a)+(x-a)(\lambda f'(a)+\mu g'(a))+o(x-a)\,.$$
  D'après C16.6, la fonction $\lambda f+\mu g$ est donc dérivable en a et $(\lambda f+\mu g)'(a)=\lambda f'(a)+\mu g'(a)$.
  — Comme a est un point quelconque de ce qui précède sur I, $\lambda f+\mu g$ est dérivable sur I et :
  $$\left(\lambda f+\mu g\right)' = \lambda f'+\mu g' \tag{1}$$
  — Comme f' et g' sont continues sur I et que l'ensemble des fonctions continues sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I,E)$, la fonction $\left(\lambda f+\mu g\right)'=\lambda f'+\mu g'$ est continue sur I.
- Nous avons ainsi démontré que $\mathscr{C}^1(I,E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I,E)$, ce qui prouve le point 1. Quant au point 2, il résulte de (1).

C16.11. Proposition (Composition d'une fonction dérivable par une application linéaire) Soit $(F,||\cdot||_F)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors pour tout fonction $f \in \mathscr{D}(I,E)$, $u\circ f \in \mathscr{D}(I,F)$ et :
$$(u\circ f)' = u\circ f'\,.$$

Démonstration

Soit $a\in I$. Soit $x \in I$. Alors d'après C16.6 :
$$f(x) = f(a)+(x-a)f'(a)+(x-a)\,\varepsilon(x-a)$$
où $\varepsilon(x-a) \xrightarrow[x\to a]{} 0_E$. On a donc :
$$u\circ f(x) = u\big(f(a)+(x-a)f'(a)+(x-a)\,\varepsilon(x-a)\big) = u(f(a))+(x-a)u(f'(a))+(x-a)\,u(\varepsilon(x-a)).$$
Comme E et F sont de dimension finie, u est continue, d'où :
$$u(\varepsilon(x-a)) \xrightarrow[x\to a]{} 0_F$$
et donc $(x-a)u(\varepsilon(x-a)) = o(x-a)$. Ainsi, $u\circ f$ possède un DL en a à l'ordre 1 :
$$u\circ f(x) \underset{x\to a}{=} u(f(a))+(x-a)u(f'(a))+o(x-a)$$
D'après C16.6, $u\circ f$ est dérivable en a et $(u\circ f)'(a) = u\circ f'(a)$.

C16.12. Proposition (Composition de fonctions dérivables par une application bilinéaire) Soient $(F,||\cdot||_F)$ et $(G,||\cdot||_G)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie. Soit $B\colon E\times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire. Soient $f\in\mathscr{D}(I,E)$ et $g\in\mathscr{D}(I,F)$. Soit l'application $B(f,g)$ définie par :
$$B(f,g)\left|\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & B\big(f(x),g(x)\big)\,. \end{array}\right.$$
Alors $B(f,g)\in\mathscr{D}(I,G)$ et :
$$B(f,g)' = B\left(f',g\right)+B\left(f,g'\right)\,.$$

Démonstration

Soit $a \in I$. Soit $x \in I$. Alors d'après C16.6 :

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + (x-a)\,\varepsilon_1(x-a) \quad \text{et} \quad g(x) = g(a) + (x-a) g'(a) + (x-a)\,\varepsilon_2(x-a)$$

où $\varepsilon_1(x-a) \xrightarrow[x\to a]{} 0_E$ et $\varepsilon_2(x-a) \xrightarrow[x\to a]{} 0_F$. Alors :

$$\begin{aligned} B(f(x),g(x)) &= B\big(f(a)+(x-a)f'(a)+(x-a)\,\varepsilon_1(x-a),\, g(a)+(x-a)g'(a)+(x-a)\,\varepsilon_2(x-a)\big) \\ &= B\big(f(a),g(a)\big) + (x-a)\,\big[B\big(f'(a),g(a)\big)+B\big(f(a),g'(a)\big)\big] + (x-a)\,\varepsilon(x-a) \end{aligned}$$

où $\varepsilon(x-a) := B(\varepsilon_1(x-a), g(x)) + B(f(x), \varepsilon_2(x-a))$.
Comme E, F, G sont de dimensions finies, B est continue. Il existe donc $M > 0$ telle que pour tout $(u, v) \in E \times F$, $||B(u,v)||_G \leqslant M\,||u||_E\,||v||_F$, d'où :

$$0 \leqslant ||\varepsilon(x-a)||_G \leqslant M\left[||\varepsilon_1(x-a)||_E\,\big|\big|g(x)\big|\big|_F + \big|\big|f(x)\big|\big|_E\,||\varepsilon_2(x-a)||_F\right].$$

Ainsi, comme f et g sont bornées au voisinage de a (puisque continues en a), $\varepsilon(x-a) \xrightarrow[x\to a]{} 0$. Donc $B(f,g)$ admet un DL en a à l'ordre 1 :

$$B(f(x),g(x)) \underset{x\to a}{=} B\big(f(a),g(a)\big) + (x-a)\,\big[B\big(f'(a),g(a)\big)+B\big(f(a),g'(a)\big)\big] + o(x-a)$$

D'après C16.6, $B(f,g)$ est dérivable en a et $(B(f,g))'(a) = B(f'(a),g(a)) + B(f(a),g'(a))$.

C16.13. Remarque Les résultats C16.11 et C16.12 restent vrais, si l'on remplace « dérivable » par « de classe $\mathscr{C}^1$ ».

C16.14. Exemple Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$, alors pour tout $(f,g) \in \mathscr{C}^1(I,E)^2$, $\langle f, g\rangle \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$ et $\langle f, g\rangle' = \langle f', g\rangle + \langle f, g'\rangle$.

C16.15. Exercice Supposons E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Notons $||\cdot||_E$ la norme associée. Soit $f \in \mathscr{D}(I,E)$ telle que :

$$\forall t \in I, \qquad \big|\big|f(t)\big|\big|_E = 1$$

En d'autres termes, f prend ses valeurs sur la sphère unité de $(E, ||\cdot||_E)$. Démontrer que pour tout $t \in I$, les vecteurs $f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux.

C16.16. Théorème (Dérivabilité et dérivée via les fonctions coordonnées) Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $f \in \mathscr{F}(I,E)$. Il existe n fonctions $f_1 : I \longrightarrow \mathbb{K}, \ldots, f_n : I \longrightarrow \mathbb{K}$, appelées fonctions coordonnées, telles que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i.$$

1. f est dérivable sur I si et seulement si f_i est dérivable sur I pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.
2. Si f est dérivable sur I, alors :

$$f' = \sum_{i=1}^{n} f_i' e_i.$$

Démonstration

Notons $||.||$ la norme définie sur E par :

$$\forall x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \in E, \quad ||x|| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|.$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons f dérivable sur I. Soit $a \in I$. Le DL de f en a à l'ordre A s'écrit :

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + (x-a)\varepsilon(x-a)$$

où $\varepsilon(x-a) \xrightarrow[x\to a]{} 0_E$. Décomposons les vecteurs $f'(a)$ et $\varepsilon(x-a)$ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$:

$$f'(a) = y_1 e_1 + \ldots + y_n e_n \quad \text{et} \quad \varepsilon(x-a) = \varepsilon_1(x-a) e_1 + \ldots + \varepsilon_n(x-a) e_n\,.$$

Alors :

$$f_1(x)e_1 + \ldots + f_n(x)e_n = (f_1(a) + (x-a)y_1 + (x-a)\varepsilon_1(x-a))e_1 + \ldots + (f_n(a) + (x-a)y_n + (x-a)\varepsilon_n(x-a))e_n\,.$$

donc la famille $(e_1,\dots,e_n)$ étant libre, on peut identifier les coefficients et obtenir, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$f_i(x) = f_i(a) + (x-a)y_i + (x-a)\varepsilon_i(x-a)\,.$$

Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Comme :

$$0 \leqslant |\varepsilon_i(x-a)| \leqslant ||\varepsilon(x-a)|| \xrightarrow[x\to a]{} 0$$

le théorème d'encadrement livre : $\varepsilon_i(x-a) \xrightarrow[x\to a]{} 0$. D'où :

$$f_i(x) \underset{x\to a}{=} f_i(a) + (x-a)y_i + o(x-a)\,.$$

Donc f_i admet un DL en a à l'ordre 1, donc f_i est dérivable en a, et $f_i'(a) = y_i$.
En particulier, $f'(a) = f_1'(a)e_1 + \dots + f_n'(a)e_n$. Ceci étant vrai pour tout $a \in I$, les f_i sont dérivables sur I et $f' = \sum_{i=1}^{n} f_i' e_i$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons toutes les f_i dérivables sur I. Soit $a \in I$. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a le DL de f_i en a à l'ordre 1 suivant :

$$f_i(x) = f_i(a) + (x-a)f_i'(a) + (x-a)\varepsilon_i(x-a)$$

où $\varepsilon_i(x-a) \xrightarrow[x\to a]{} 0_{\mathbb{K}}$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & f_1(x)e_1 + \dots + f_n(x)e_n \\ & = & f(a) + (x-a)\left(f_1'(a)e_1 + \dots + f_n'(a)e_n\right) + (x-a)\left(\varepsilon_1(x-a)e_1 + \dots + \varepsilon_n(x-a)e_n\right). \end{array}$$

Or :

$$0 \leqslant ||\varepsilon_1(x-a)e_1 + \dots + \varepsilon_n(x-a)e_n|| \leqslant |\varepsilon_1(x-a)| + \dots + |\varepsilon_n(x-a)| \xrightarrow[x\to a]{} 0_{\mathbb{K}}$$

Par théorème d'encadrement, il vient :

$$\varepsilon_1(x-a)e_1 + \dots + \varepsilon_n(x-a)e_n \xrightarrow[x\to a]{} 0_E\,.$$

Donc :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + (x-a)\left(f_1'(a)e_1 + \dots + f_n'(a)e_n\right) + o(x-a)\,.$$

D'après C16.6, f est dérivable en a et $f'(a) = f_1'(a)e_1 + \dots + f_n'(a)e_n$.

C16.17. Remarque On se place dans le contexte de C16.16.

1. Pour que f soit dérivable sur I, il suffit qu'il existe une base $(e_1,\dots,e_n)$ telle que les fonctions coordonnées $f_1,\dots,f_n$ soient dérivables sur I.
2. Le théorème précédent reste vrai si l'on remplace « dérivable » par « de classe $\mathscr{C}^1$ ».
3. Soit $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{C})$. Alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$. Si tel est le cas, $f' = \mathrm{Re}(f)' + i\,\mathrm{Im}(f)'$.

C16.18. Exercice Soit la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos(3t),\sin(2t)) \end{array} \right. .$$

Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa fonction dérivée.

C16.19. Remarque (Intérieur de l'intervalle I) L'intérieur de l'intervalle I est l'ensemble que l'on obtient à partir de I en retirant éventuellement ses bornes. Il s'agit du plus grand ouvert de $\mathbb{R}$ qui est inclus dans I.

C16.20. Proposition (Caractérisation des fonctions constantes) Soit $f \in \mathscr{C}(I,E) \cap \mathscr{D}\left(\overset{o}{I},E\right)$. Alors f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur $\overset{o}{I}$.

Démonstration

Fixons une base $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ quelconque de E. Notons $f_1,\dots,f_n$ les fonctions coordonnées de f dans la base $\mathscr{B}$.

$$\begin{array}{rcl} f \text{ est constante sur } I & \Longleftrightarrow & \text{les fonctions } f_1, f_2, \dots, f_n \text{ sont constantes sur } I \\ & \Longleftrightarrow & f_1' = f_2' = \dots = f_n' = 0 \text{ sur } \overset{o}{I} \quad \text{[d'après le cours de MPSI]} \\ & \Longleftrightarrow & f' = 0 \text{ sur } \overset{o}{I} \quad \text{[d'après C16.16]} \end{array}$$

§ 3 Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

C16.21. Définition (Fonction de classe $\mathscr{C}^k$)

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Soit $f \in \mathscr{F}(I, E)$. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I si f est k fois dérivable et si sa dérivée k-ième $f^{(k)}$ est continue sur I.
   (b) L'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur I est noté $\mathscr{C}^k(I, E)$.
2. (a) On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I si f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   (b) On note $\mathscr{C}^\infty(I, E)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$. Ainsi $\mathscr{C}^\infty(I, F) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \mathscr{C}^k(I, F)$.

C16.22. Proposition (Caractère $\mathscr{C}^k$ via les fonctions coordonnées) Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $f \in \mathscr{F}(I, E)$. Il existe n fonctions $f_1 : I \longrightarrow \mathbb{K}, \ldots, f_n : I \longrightarrow \mathbb{K}$, appelées fonctions coordonnées, telles que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i.$$

1. f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I si et seulement si f_i est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
2. Si f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I alors pour tout $\ell \in [\![1, k]\!]$:

$$f^{(\ell)} = \sum_{i=1}^{n} f_i^{(\ell)} e_i.$$

Démonstration — Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$, en s'appuyant sur C16.16.

C16.23. Exercice Soit la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} [0\,;\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (2\sin(t) + \sin(2t))\,,\, -2\cos(t) - \cos(2t)) \end{array} \right.$$

Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0\,;\,2\pi]$ et calculer f''.

C16.24. Proposition (Espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$)

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathscr{C}^k(I, E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I, E)$.
2. $\mathscr{C}^\infty(I, E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I, E)$.

Démonstration

1. Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$, en s'appuyant sur C16.16.
2. Une intersection de sous-espaces vectoriels de $\mathscr{F}(I, E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I, E)$. Donc $\mathscr{C}^\infty(I, F) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \mathscr{C}^k(I, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I, E)$.

C16.25. Théorème (Formule de Leibniz) Soient $(F, ||\cdot||_F)$ et $(G, ||\cdot||_G)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie, soit $B : E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire. Soient $f \in \mathscr{C}^k(I, E)$ et $g \in \mathscr{C}^k(I, F)$, où $k \in \mathbb{N}^*$.

1. $B(f, g) \in \mathscr{C}^k(I, G)$
2. $[B(f, g)]^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} B\left(f^{(i)}, g^{(k-i)}\right)$

Démonstration

Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$.

- *Initialisation à $k=1$*
  Il s'agit précisément du résultat établi en C16.12.
- *Hérédité*
  Supposons-le résultat vrai pour un $k \in \mathbb{N}^*$ fixé et montrons qu'il est encore vrai pour $k+1$.
  Soient $f \in \mathscr{C}^{k+1}(I,E)$ et $g \in \mathscr{C}^{k+1}(I,F)$. Alors d'après l'hypothèse de récurrence, $B(f,g)$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et :

$$[B(f,g)]^{(k)} = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} B\left(f^{(l)}, g^{(k-l)}\right) \tag{2}$$

  — Soit $\ell \in [\![0,k]\!]$, alors les fonctions $f^{(l)}$ et $g^{(k-l)}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. D'après C16.12, la fonction $B\left(f^{(l)}, g^{(k-l)}\right)$ est donc également de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. Le théorème C16.10 et l'identité (2) livrent alors que $[B(f,g)]^{(k)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$. Donc $B(f,g)$ est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ sur I.

  — En dérivant l'identité (2) à l'aide de C16.12, on obtient :

$$\begin{aligned}
B(f,g)^{(k+1)} &= \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \left[B\left(f^{(l+1)}, g^{(k-l)}\right) + B\left(f^{(l)}, g^{(k-l+1)}\right)\right] \\
&= \sum_{l=1}^{k+1} \binom{k}{l-1} B\left(f^{(l)}, g^{(k-l+1)}\right) + \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} B\left(f^{(l)}, g^{(k-l+1)}\right) \\
&= \sum_{l=1}^{k} \left[\binom{k}{l-1} + \binom{k}{l}\right] B\left(f^{(l)}, g^{(k+1-l)}\right) + B\left(f^{(k+1)}, g\right) + B\left(f, g^{(k+1)}\right) \\
&= \sum_{l=0}^{k+1} \binom{k+1}{l} B\left(f^{(l)}, g^{(k+1-l)}\right)
\end{aligned}$$

  car $\binom{k+1}{0} = \binom{k+1}{k+1} = 1$ et d'après la formule de Pascal, pour tout $l \in [\![1,k]\!]$, $\binom{k}{l-1} + \binom{k}{l} = \binom{k+1}{l}$.

C16.26. Théorème (Dérivation des applications composées) Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $f \in \mathscr{C}^k(I,E)$ et $\varphi \in \mathscr{C}^k(J,\mathbb{R})$ telle que $\varphi(J) \subset I$ (avec $k \in \mathbb{N}^*$).

1. $f \circ \varphi \in \mathscr{C}^k(J,E)$
2. $(f\circ\varphi)' = \varphi' . (f' \circ \varphi)$, i.e. :

$$\forall\, t \in J, \qquad (f\circ\varphi)'(t) = \varphi'(t)\, f'(\varphi(t))\,.$$

Démonstration

Nous démontrons uniquement la deuxième assertion. Supposons f dérivable sur J et φ dérivable sur I. Soit $a \in J$. Pour tout $x \in J$, pour tout $y \in I$:

$$\varphi(x) = \varphi(a) + (x-a)\varphi'(a) + (x-a)\,\varepsilon(x-a) \qquad \text{et} \qquad f(y) = f(\varphi(a)) + (y-\varphi(a))f'(\varphi(a)) + (y-\varphi(a))\,\widetilde{\varepsilon}(y-\varphi(a))$$

avec $\varepsilon(x-a) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ et $\widetilde{\varepsilon}(y-\varphi(a)) \xrightarrow[y\to\varphi(a)]{} 0$ d'où :

$$\begin{aligned}
f\circ\varphi(x) &= f(\underbrace{\varphi(a) + (x-a)\varphi'(a) + (x-a)\varepsilon(x-a)}_{y}) \\
&= f\circ\varphi(a) + \underbrace{(x-a)\left[\varphi'(a)+\varepsilon(x-a)\right]}_{y-\varphi(a)} f'(\varphi(a)) + \underbrace{(x-a)\left[\varphi'(a)+\varepsilon(x-a)\right]}_{y-\varphi(a)} \widetilde{\varepsilon}(\varphi(x)-\varphi(a)) \\
&= f\circ\varphi(a) + (x-a)\varphi'(a).f'(\varphi(a)) + (x-a)\delta(x).
\end{aligned}$$

avec :

$$\delta(x) = \varepsilon(x-a)f'(\varphi(a)) + \left[\varphi'(a)+\varepsilon(x-a)\right]\widetilde{\varepsilon}(\varphi(x)-\varphi(a))\,.$$

Notons que φ est continue en a, puisque dérivable en a. Alors $\delta(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$. Ainsi :

$$f\circ\varphi(x) = f\circ\varphi(a) + (x-a)\varphi'(a).f'(\varphi(a)) + o(x-a)$$

D'après C16.6, $f\circ\varphi$ est dérivable en a et $(f\circ\varphi)'(a) = \varphi'(a)\,f'(\varphi(a))$.

C16.27. Définition ($\mathscr{C}^k$-difféomorphisme) Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Une application $\varphi \in \mathscr{C}(J, I)$ est un **$\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de J sur I** si :

1. φ est bijective ;
2. φ et φ^{-1} sont de classe $\mathscr{C}^k$.

C16.28. Théorème (Caractérisation des difféomorphismes) Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Soit $\varphi \in \mathscr{C}^k(J, \mathbb{R})$. Alors φ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de J sur $\varphi(J)$ si et seulement si pour tout $t \in J$, $\varphi'(t) \neq 0$.

Démonstration

Nous démontrons uniquement le résultat dans le cas où $k = 1$. Soit donc $\varphi \in \mathscr{C}^1(J, \mathbb{R})$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de J sur $\varphi(J)$.

La fonction $\varphi \colon J \to \varphi(J)$ est bijective, de classe $\mathscr{C}^1$ sur J et sa fonction réciproque $\varphi^{-1} \colon \varphi(J) \to J$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\varphi(J)$. Alors d'après les résultats sur la composée de fonctions dérivables :

$$\forall t \in J, \qquad \left(\varphi^{-1} \circ \varphi\right)'(t) = \varphi'(t) \times \left(\varphi^{-1}\right)'(\varphi(t))$$

Comme pour tout $t \in J$, $\varphi^{-1} \circ \varphi(t) = t$, il vient :

$$\forall t \in J, \qquad \left(\varphi^{-1} \circ \varphi\right)'(t) = 1\,.$$

Donc $\varphi'(t) \neq 0$, pour tout $t \in J$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons à présent que $\varphi'(t) \neq 0$, pour tout $t \in J$.

- La fonction $\varphi \colon J \to \varphi(J)$ est bien sûr surjective.
- Puisque la fonction φ' est continue sur J et qu'elle ne s'annule pas sur J, le théorème des valeurs intermédiaires nous apprend que φ a un signe constant sur J. Ainsi φ est strictement monotone sur J donc injective.
- Il reste à établir que φ^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\varphi(J)$. D'après le cours de MPSI, comme φ' ne s'annule pas sur J, la fonction φ^{-1} est dérivable sur $\varphi(J)$ et :

$$\forall t \in J, \quad \left(\varphi^{-1}\right)'(t) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))} \tag{3}$$

D'après (3) et les théorèmes d'opérations sur les fonctions continues, la fonction $\left(\varphi^{-1}\right)'$ est continue sur $\varphi(J)$.

§ 4 Arcs paramétrés

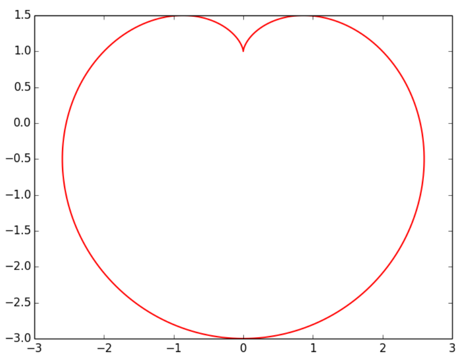
C16.29. Définition (Arc paramétré de classe $\mathscr{C}^1$ et support d'un tel)

1. Un **arc paramétré de classe $\mathscr{C}^1$** est un couple (I, φ) où :
   - I est un intervalle de $\mathbb{R}$;
   - φ est une application de I dans E, de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
2. Soit (I, φ) un arc paramétré de classe $\mathscr{C}^1$. Son **support** est la partie $\varphi(I)$ de E.

C16.30. Exemple (Cardioïde) Posons φ la fonction définie par :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} [0\,;\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \big(2\sin(t) + \sin(2t)\big)\,,\ -2\cos(t) - \cos(2t)\big)\,. \end{array} \right.$$

déjà étudiée dans l'Exercice 17.18. Comme φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;\,2\pi]$, le couple $\big([0\,;\,2\pi]\,;\,\varphi\big)$ est un arc paramétré de classe $\mathscr{C}^1$. Son support est représenté sur la figure ci-contre.



C16.31. Définition (Paramètre régulier d'un arc paramétré de classe $\mathscr{C}^1$ et tangente) Soit (I,φ) un arc paramétré de classe $\mathscr{C}^1$.

1. Un point $t \in I$ est appelé **paramètre régulier** de l'arc (I,φ) si $\varphi'(t) \neq 0_E$, i.e. si le vecteur dérivé de φ en t n'est pas nul.
2. Soit t_0 un paramètre régulier de (I,φ). La **tangente** au point $M_0 = \varphi(t_0)$ de l'arc (I,φ) est la droite affine passant par M_0 et dirigée par $\varphi'(t_0)$. Une représentation paramétrique de cette tangente est donc :

$$M_0 + \lambda\,\varphi'(t_0) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

C16.32. Proposition (Tangente et normale en un point associé à un paramètre régulier d'un arc plan $\mathscr{C}^1$) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (x(t), y(t)) \end{array} \right.$$

une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Soit t_0 un paramètre régulier de l'arc plan (I,φ) et soit $M_0 = \varphi(t_0) = (x(t_0), y(t_0)) \in \mathbb{R}^2$.

1. Une **représentation paramétrique de la tangente au point M_0 de l'arc plan (I,φ)** est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x(t_0) + \lambda x'(t_0) \\ y & = & y(t_0) + \lambda y'(t_0) \end{array} \right. \quad , \lambda \in \mathbb{R}$$

2. Une **équation cartésienne de la tangente au point M_0 de l'arc plan (I,φ)** est donnée par :

$$y'(t_0)(x - x(t_0)) - x'(t_0)(y - y(t_0)) = 0$$

3. Une **équation cartésienne de la normale au point M_0 de l'arc plan (I,φ)** est donnée par :

$$x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) = 0$$

Démonstration

1. Conséquence de l'identité $\varphi'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$.
2. La droite d'équation $y'(t_0)(x - x(t_0)) - x'(t_0)(y - y(t_0)) = 0$ passe par le point M_0 de coordonnées $(x(t_0), y(t_0))$ et est dirigée par le vecteur $(x'(t_0), y'(t_0)) = \varphi'(t_0)$. C'est donc la tangente au point M_0 de l'arc plan (I,φ).
3. La droite d'équation $x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) = 0$ passe par le point M_0 de coordonnées $(x(t_0), y(t_0))$ et est dirigée par le vecteur $(-y'(t_0), x'(t_0))$ qui est orthogonal à $\varphi'(t_0)$. C'est donc la normale au point M_0 de l'arc plan (I,φ).

C16.33. Exercice Soit l'arc paramétré plan défini par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 3t^2 \\ y & = & 2t^3 \end{array} \right.$$

1. Étudier cet arc paramétré plan.
2. Donner une équation de la tangente et de la normale en un point M associé à un paramètre régulier t de cet arc plan.
3. Déterminer les droites qui sont à la fois tangentes et normales au support de cet arc plan.

§ 5 Fonctions continues par morceaux sur un segment

C16.34. Notation $[a,b]$ désigne un segment de $\mathbb{R}$ ($a < b$).

C16.35. Définition (Subdivision d'un segment) Une subdivision du segment $[a,b]$ est un p-uplet $(a_0,\dots,a_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ tel que $a = a_0 < a_1 < \dots < a_p = b$.

C16.36. Définition (Fonctions continues par morceaux) Une fonction $f \in \mathscr{F}([a,b],E)$ est dite continue par morceaux sur un segment $[a,b]$ s'il existe une subdivision $a_0 < a_1 < \dots < a_p$ de $[a,b]$ telle que pour tout $i \in [\![1, p-1]\!]$, la restriction de f à $]a_i, a_{i+1}[$ soit prolongeable en une fonction continue sur $[a_i, a_{i+1}]$.

C16.37. PROPOSITION (STRUCTURE DE L'ENSEMBLE DES FONCTIONS CONTINUES PAR MORCEAUX) L'ensemble $\mathscr{CM}([a,b],E)$ des fonctions définies sur $[a,b]$ à valeurs dans E, qui sont continues par morceaux, est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}([a,b],E)$.

C16.38. PROPOSITION (NORME INFINIE SUR $\mathscr{CM}([a,b],E)$) L'application :

$$||\cdot||_\infty \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{CM}([a,b],E) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ f & \longmapsto & \sup\limits_{x\in[a,b]} ||f(x)||_E \end{array} \right.$$

est bien définie et définit une norme sur $\mathscr{CM}([a,b],E)$, appelée norme infinie ou norme de la convergence uniforme. Ainsi, $(\mathscr{CM}([a,b],E), ||\cdot||_\infty)$ est il un espace vectoriel normé.

§ 6 APPROXIMATION UNIFORME DE FONCTIONS CONTINUES PAR MORCEAUX SUR UN SEGMENT

C16.39. NOTATION $[a,b]$ désigne un segment de $\mathbb{R}$ $(a<b)$.

C16.40. DÉFINITION (FONCTION EN ESCALIER) Soit $f \in \mathscr{F}([a,b],E)$.

1. On dit que f est en escalier s'il existe une subdivision $(a_0,\dots,a_p)$ telle que f soit constante sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$, pour tout $i \in [\![0,p-1]\!]$. Une telle subdivision de $[a,b]$ est dite adaptée à la fonction f.
2. On note $\mathscr{E}([a,b],E)$ l'ensemble des fonctions en escalier sur le segment $[a,b]$. Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}([a,b],\mathbb{R})$.

C16.41. REMARQUE Le théorème suivant permettra dans le paragraphe à venir de définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux, à partir des intégrales de fonctions en escalier. Il donnera également une méthode de calcul approché de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux : la méthode des rectangles.

C16.42. THÉORÈME (APPROXIMATION D'UNE FONCTION $\mathscr{CM}$ PAR UNE SUITE DE FONCTIONS EN ESCALIER) L'ensemble $\mathscr{E}([a,b],E)$ des fonctions en escalier sur $[a,b]$ est dense dans l'espace vectoriel normé $(\mathscr{CM}([a,b],E),||\cdot||_\infty)$ des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$. En d'autres termes, pour toute fonction continue par morceaux f sur $[a,b]$, il existe une suite (f_k) de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f.

Démonstration

Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow E$ une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$, soit $\varepsilon>0$. Nous allons montrer qu'il existe une fonction en escalier φ sur $[a,b]$ telle que $||f-\varphi||_\infty \leqslant \varepsilon$.

Nous allons commencer par supposer que f est continue sur $[a,b]$.

— D'après le théorème de Heine, f est uniformément continue, donc il existe $\eta>0$ tel que :

$$\forall (x,y)\in[a,b]^2,\quad |x-y|\leqslant\eta \Longrightarrow ||f(x)-f(y)||_E \leqslant \varepsilon\,.$$

Soit alors $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{(b-a)}{n}\leqslant\eta$ (un tel n existe d'après la propriété d'Archimède). Pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, posons $a_k := a+k\dfrac{b-a}{n}$. On dispose ainsi d'une subdivision $a:=a_0<a_1<\ldots<a_n:=b$ de $[a,b]$, telle que pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, $a_{k+1}-a_k=\dfrac{b-a}{n}\leqslant\eta$.

— Soit alors $x\in[a,b]$. Si $x\neq b$, il existe un unique $k\in[\![0,n-1]\!]$ tel que $x\in[a_k,a_{k+1}[$. Posons alors $\varphi(x)=f(a_k)$. Posons enfin $\varphi(b)=f(b)$.

La fonction $\varphi\colon [a,b]\longrightarrow E$, ainsi construite, est en escalier sur $[a,b]$. Démontrons que $||f-\varphi||_\infty\leqslant\varepsilon$.
Soit $x\in[a,b]$.

— si $x=b$, $f(x)=\varphi(x)$ et donc $||f(x)-\varphi(x)||_E=0\leqslant\varepsilon$.

— Sinon, il existe un unique $k\in[\![0,n-1]\!]$ tel que $x\in[a_k,a_{k+1}[$. Alors $||f(x)-\varphi(x)||_E = ||f(x)-f(a_k)||_E\leqslant\varepsilon$ car $|x-a_k|\leqslant\eta$.

Nous avons démontré que, pour tout $x\in[a,b]$, $||f(x)-\varphi(x)||_E\leqslant\varepsilon$, ainsi $||f-\varphi||_\infty\leqslant\varepsilon$.

Si maintenant f est supposée continue par morceaux sur $[a,b]$, et non plus continue sur $[a,b]$, alors on considère une subdivision $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_p = b$ de $[a,b]$ adaptée à la fonction f.

— Soit $i \in [\![0, p-1]\!]$. Notons $\widehat{f_i}\colon [a_i, a_{i+1}] \longrightarrow E$ le prolongement par continuité de la fonction continue

$$f_i := f_{|]a_i,a_{i+1}[} \left| \begin{array}{ccc}]a_i, a_{i+1}[& \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

au segment $[a_i, a_{i+1}]$. D'après le premier point, il existe une fonction en escalier $\varphi_i\colon [a_i, a_{i+1}] \longrightarrow E$ telle que $\left|\left|\widehat{f_i} - \varphi_i\right|\right|_{[a_i,a_{i+1}],\infty} \leqslant \varepsilon$. On a donc, en particulier :

$$(\star) \qquad \forall\, x \in]a_i, a_{i+1}[, \quad \left|\left| f(x) - \varphi_i(x) \right|\right|_E = \left|\left| \widehat{f_i}(x) - \varphi_i(x) \right|\right|_E \leqslant \varepsilon\,.$$

— On définit alors la fonction

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \{a = a_0, a_1, \ldots, a_p = b\} \\ \varphi_i(x) & \text{si } x \in]a_i, a_{i+1}[\,. \end{cases} \end{array} \right.$$

La fonction f est en escalier sur $[a,b]$ et, grâce à $(\star)$, on vérifie que, pour tout $x \in [a,b]$, $\left|\left| f(x) - \varphi(x) \right|\right|_E \leqslant \varepsilon$. Nous en déduisons $\left|\left| f - \varphi \right|\right|_\infty \leqslant \varepsilon$.

C16.43. Définition (Fonction affine par morceaux) Soit $f \in \mathscr{F}([a,b], E)$. On dit que f est affine par morceaux s'il existe une subdivision $a_0 < a_1 < \ldots < a_p$ telle que pour tout $i \in]0, p-1[$, il existe deux vecteurs $\alpha_i, \beta_i \in E$ tels que :

$$\forall\, x \in]a_i, a_{i+1}[, \quad f(x) = \alpha_i x + \beta_i.$$

On dit que la subdivision en question est adaptée à la fonction f.

C16.44. Théorème (Approximation d'une fonction continue par une suite de fonctions affines par morceaux) L'ensemble des fonctions de $[a,b]$ dans E, qui sont affines par morceaux, est dense dans l'ensemble des fonctions de $[a,b]$ dans E, continues sur $[a,b]$ pour la norme $||\,.\,||_\infty$.

Démonstration

Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b], E)$, soit $\varepsilon > 0$.

— Comme f est uniformément contiue sur $[a,b]$ (théorème de Heine), il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in [a,b]^2, \quad |x - y| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|\left| f(x) - f(y) \right|\right|_E \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit alors $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{b-a}{n} \leqslant \eta$ (existe par la propriété d'Archimède). Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, posons $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$. On dispose ainsi d'une subdivision $a := a_0 < a_1 < \ldots < a_n := b$ de $[a,b]$, telle que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $a_{k+1} - a_k = \dfrac{b-a}{n} \leqslant \eta$.

— Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, pour tout $x \in [a_k, a_{k+1}[$, posons :

$$\varphi(x) = f(a_k) + (x - a_k)\frac{f(a_{k+1}) - f(a_k)}{a_{k+1} - a_k}.$$

Pour $x = b$, posons $\varphi(x) = f(x)$.

La fonction $\varphi\colon [a,b] \longrightarrow E$, ainsi construite, est affine par morceaux sur $[a,b]$.

— Si $x = b$, $\left|\left| f(x) - \varphi(x) \right|\right|_E = 0 \leqslant \varepsilon$.

— Si $k \in [\![0, n-1]\!]$, si $x \in [a_k, a_{k+1}[$:

$$\left|\left| f(x) - \varphi(x) \right|\right|_E \leqslant \left|\left| f(x) - f(a_k) \right|\right|_E + \left|\left| f(a_{k+1}) - f(a_k) \right|\right|_E \leqslant \varepsilon$$

car $|x - a_k| \leqslant |a_{k+1} - a_k|$, $|x - a_k| \leqslant \eta$ et $|a_{k+1} - a_k| \leqslant \eta$.

Nous avons démontré que, pour tout $x \in [a,b]$, $\left|\left| f(x) - \varphi(x) \right|\right|_E \leqslant \varepsilon$, ainsi $\left|\left| f - \varphi \right|\right|_\infty \leqslant \varepsilon$.

§ 7 Intégrale d'une fonction à valeurs vectorielles

C16.45. Notation $[a,b]$ désigne un segment de $\mathbb{R}$ ($a<b$).

C16.46. Définition (Intégrale d'une fonction en escalier) Soit $\varphi \in \mathscr{E}([a,b],E)$. Soit $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$ une subdivision adaptée à φ. Pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$, il existe un vecteur φ_i de E tel que pour tout $x \in]a_i, a_{i+1}[$, $\varphi(x) = \varphi_i$.
L'intégrale de φ sur le segment $[a,b]$ est le vecteur $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi$ défini par :

$$\int_{[a,b]} \varphi := \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1}-a_i)\varphi_i.$$

C16.47. Attention Il convient de vérifier que la définition donnée ci-dessus ne dépend pas de la subdivision adaptée choisie.

C16.48. Proposition (Indépendance en le choix de la subdivision adaptée choisie) Conservons les notations de la définition 17.46. Soit $a'_0 < \ldots < a'_m$ une deuxième subdivision adaptée à φ. Pour tout $j \in [\![0,m-1]\!]$, il existe un vecteur φ'_j de E tel que pour tout $x \in]a'_j, a'_{j+1}[$, $\varphi(x) = \varphi'_j$. Alors :

$$\sum_{j=0}^{m-1} (a'_{j+1}-a'_j)\varphi'_j = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1}-a_i)\varphi_i.$$

L'intégrale de φ sur le segment $[a,b]$ est donc bien définie (i.e. définie intrinsèquement, indépendamment d'une subdivision adaptée).

Démonstration

Commençons par construire une subdivision $b_0 < b_1 < \ldots < b_p$ de $[a,b]$ plus fine que $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$ et $a'_0 < a'_1 < \ldots < a'_m$.
Pour cela, posons $b_0 = a = a_0 = a'_0$. Supposons construits $b_0 < b_1 < \ldots < b_i$, et supposons que $b_i < b$. Posons alors

$$i_0 = \min\{k \in [\![0,n]\!] \,:\, b_i < a_k\} \quad \text{et} \quad j_0 = \min\{k \in [\![0,m]\!] \mid b_i < b_k\}.$$

Si $a_{i_0} < a'_{j_0}$, posons $b_{i+1} = a_{i_0}$. Sinon, posons $b_{i+1} = a'_{j_0}$.
La subdivision $b_0 < b_1 < \ldots < b_p$ ainsi construite est plus fine que $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$ et $a'_0 < a'_1 < \ldots < a'_m$, au sens où pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$, il existe $k_i, l_i \in [\![0,p]\!]$ tels que :

$$a_i = b_{k_i} < b_{k_i+1} < \ldots < b_{l_i} = a_{i+1}$$

et pour tout $j \in [\![0,m-1]\!]$, il existe $k'_j, l'_j \in [\![0,p]\!]$ tels que

$$a'_j = b_{k'_j} < b_{k'_j+1} < \ldots < b_{l'_j} = a'_{j+1}.$$

Pour tout $k \in [\![0,p-1]\!]$, φ est constante sur $]b_k, b_{k+1}[$ donc il existe un vecteur φ''_k tel que $\forall x \in]b_k, b_{k+1}[$, $\varphi(x) = \varphi''_k$. On remarque que pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$, pour tout $k \in [\![k_i, l_i-1]\!]$, $\varphi''_k = \varphi_i$ et que pour tout $j \in [\![0,m-1]\!]$, pour tout $k \in [\![k'_j, l'_j-1]\!]$, $\varphi''_k = \varphi'_j$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{m-1} (a'_{j+1}-a'_j)\varphi'_j &= \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=k'_j}^{l'_j-1} (b_{k'_j+1}-b_{k'_j})\varphi'_j \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} (b_{k+1}-b_k)\varphi''_k \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=k_i}^{l_i-1} (b_{k_i+1}-b_{k_i})\varphi''_k \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1}-a_i)\varphi_i\,.
\end{aligned}$$

C16.49. Proposition (Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier)

1. **Linéarité**
   L'application
$$\left|\begin{array}{ccc}\mathscr{E}([a,b],E) & \to & E \\ \varphi & \mapsto & \displaystyle\int_{[a,b]}\varphi\end{array}\right.$$
   est linéaire.
2. **Majoration de la norme d'une intégrale**
   Pour tout $\varphi\in\mathscr{E}([a,b],E)$, la fonction
$$||f||_E := ||\cdot||_E\circ f \quad \left|\begin{array}{ccc}[a,b] & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & ||f(x)||_E\end{array}\right.$$
   est en escalier et :
$$\left|\left|\int_{[a,b]}\varphi\right|\right|_E \leqslant \int_{[a,b]}||\varphi||_E .$$
3. **Relation de Chasles**
$$\forall\varphi\in\mathscr{E}([a,b],E),\quad \forall c\in[a,b],\quad \int_{[a,b]}\varphi=\int_{[a,c]}\varphi+\int_{[c,b]}\varphi$$

Démonstration

1. Soient $\varphi,\psi\in\mathscr{E}([a,b],E)$, soient $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$.
   Considérons une subdivision $a_0<a_1<\ldots<a_n$ adaptée à la fois à φ et à ψ (on la construit comme dans la démonstration de la Proposition précédente).
   Pour tout $i\in[\![0,n-1]\!]$, il existe deux vecteurs φ_i et ψ_i de E tels que $\forall x\in]a_i,a_{i+1}[$, $\varphi(x)=\varphi_i$ et $\psi(x)=\psi_i$. Alors :
$$\begin{aligned}\int_a^b(\lambda\varphi+\mu\psi) &= \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)(\lambda\varphi_i+\mu\psi_i)\\ &= \lambda\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\varphi_i+\mu\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\psi_i\\ &= \lambda\int_a^b\varphi+\mu\int_a^b\psi\end{aligned}$$
2. Soit $\varphi\in\mathscr{E}([a,b],E)$. Alors $||\varphi||_\infty\in\mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})$ (clair). Soit $a_0<a_1<\ldots<a_n$ une subdivision adaptée à φ. Alors :
$$\begin{aligned}\left|\left|\int_a^b\varphi\right|\right|_E &= \left|\left|\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\varphi_i\right|\right|_E\\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\,||\varphi_i||_E \quad \text{(inégalité triangulaire)}\\ &=: \int_a^b||\varphi||_E \quad \text{(définition de l'intégrale d'une fonction en escalier à valeurs réelles)}\end{aligned}$$
3. Soit $c\in[a,b]$, soit $a_0<a_1<\ldots<a_n$ une subdivision de $[a,c]$ adaptée à φ, soit $a_n<\ldots<a_m$ une subdivision de $[c,b]$ adaptée à φ. Alors $a_0<\ldots<a_m$ est une subdivision de $[a,b]$ adaptée à φ. Pour tout $i\in[\![0,m-1]\!]$, il existe un vecteur $\varphi\in E$ tel que pour tout $x\in]a_i,a_{i+1}[$, $\varphi(x)=\varphi_i$. On a alors :
$$\begin{aligned}\int_a^c\varphi+\int_c^b\varphi &= \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\varphi_i+\sum_{i=n}^{m-1}(a_{i+1}-a_i)\varphi_i\\ &= \sum_{i=0}^{m}(a_{i+1}-a_i)\varphi_i\\ &= \int_a^b\varphi\end{aligned}$$

C16.50. Remarque L'inégalité (2) de C16.49 est vraie pour toute norme sur E.

C16.51. Lemme (Vers la définition de l'intégrale) Soit $f \in \mathscr{CM}([a,b],E)$.

1. Soit (φ_n) une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f. La suite de terme général $\int_{[a,b]} \varphi_n$ converge dans $(E, ||\cdot||_E)$.
2. Étant données deux suites (φ_n) et (ψ_n) de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} \varphi_n = \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} \psi_n.$$

Ce lemme est admis.

C16.52. Remarque Puisque l'espace $\mathscr{E}([a,b],E)$ des fonctions en escalier sur $[a,b]$ est dense dans l'espace $\mathscr{CM}([a,b],E)$ des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ pour la norme de la convergence uniforme, on peut alors définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans E.

C16.53. Définition (Intégrale d'une fonction continue par morceaux) Soit $f \in \mathscr{CM}([a,b],E)$. L'intégrale de f sur le segment $[a,b]$, notée $\int_{[a,b]} f$ ou encore $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, est définie comme la limite de la suite de terme général $\int_{[a,b]} \varphi_n$, où (φ_n) est suite quelconque de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f.

C16.54. Remarque On peut définir l'intégrale d'une fontion continue par morceaux entre b et a :

$$\forall f \in \mathscr{CM}([a,b],E), \quad \int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t := -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Donnons maintenant trois propriétés importantes de l'intégrale d'une fonction vectorielle continue par morceaux. On reconnaîtra des propriétés « bien connues » de l'intégrale d'une fonction à valeurs réelles ou complexes.

C16.55. Théorème (Propriétés de l'intégrale des fonctions continues par morceaux)

1. **Linéarité**
   L'application

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathscr{CM}([a,b],E) & \to & E \\ \varphi & \mapsto & \displaystyle\int_{[a,b]} \varphi \end{array}\right.$$

   est linéaire.
2. **Majoration de la norme d'une intégrale**
   Pour tout $\varphi \in \mathscr{CM}([a,b],E)$, la fonction

$$||f||_E := ||\cdot||_E \circ f \quad \left|\begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & ||f(x)||_E \end{array}\right.$$

   est continue par morceaux et :

$$\left|\left|\int_{[a,b]} \varphi\right|\right|_E \leqslant \int_{[a,b]} ||\varphi||_E\,.$$

3. **Relation de Chasles**

$$\forall \varphi \in \mathscr{CM}([a,b],E), \quad \forall c \in [a,b], \quad \int_{[a,b]} \varphi = \int_{[a,c]} \varphi + \int_{[c,b]} \varphi$$

Démonstration

Il suffit de « passer à la limite » dans C16.49.

C16.56. Remarque L'inégalité (2) de C16.55 est vraie pour toute norme sur E.

C16.57. Remarque Le théorème suivant permet de ramener le calcul de l'intégrale d'une fonction vectorielle au calcul des intégrales de ses fonctions coordonnées dans une base.

C16.58. Théorème (Intégrale des fonctions coordonnées dans une base) Fixons une base $(e_1,\dots,e_n)$ de E. Soit $f\in\mathscr{CM}([a,b],E)$. Il existe n fonctions $f_1,\dots,f_n\in\mathscr{CM}([a,b],\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x\in[a,b],\quad f(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i(x).e_i.$$

Alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}\left(\int_a^b f_i(x)\,\mathrm{d}x\right).e_i.$$

Démonstration

- Soit $e\in E$, soit $f\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Alors :

  $$\int_a^b f(x).e\,\mathrm{d}x=\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right).e.$$

  En effet, soit (φ_n) une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f. Alors la suite $(\varphi_n.e)$ converge uniformément vers la fonction

  $$\left|\begin{array}{ccc}[a,b] & \longrightarrow & E\\ x & \longmapsto & f(x).e\,.\end{array}\right.$$

  Soit $n\in\mathbb{N}$. Soit $a_{n,0}<a_{n,1}<\ldots<a_{n,p_n}$ une subdivision adaptée à la fonction φ_n. Pour tout $i\in[\![0,p_n]\!]$, il existe $\alpha_{n,i}\in\mathbb{R}$ tel que :

  $$\forall x\in\,]a_{n,i},a_{n,i+1}[,\quad \varphi_n(x)=\alpha_{n,i}.$$

  Alors :

  $$\int_a^b \varphi_n(x).e\,\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{p_n-1}(a_{n,i+1}-a_{n,i})\alpha_{n,i}.e=\left(\sum_{i=0}^{p_n-1}(a_{n,i+1}-a_{n,i})\alpha_{n,i}\right).e=\left(\int_a^b\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x\right).e\,.$$

  En faisant tendre n vers $+\infty$ dans cette relation, on obtient $\int_a^b f(x).e\,\mathrm{d}x=\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right).e.$
- Le théorème C16.58 est alors conséquence du premier point et de la linéarité de l'intégrale. Avec les notations du théorème, on a :

  $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\sum_{i=0}^{n-1}f_i(x)e_i\right)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_a^b f_i(x)e_i\,\mathrm{d}x\right)=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_a^b f_i(x)\,\mathrm{d}x\right)e_i.$$

C16.59. Exercice Soit l'application :

$$f\left|\begin{array}{ccc}[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ t & \longmapsto & \left(\dfrac{1}{4-t^2},\dfrac{1}{1+t^2}\right).\end{array}\right.$$

Calculer $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

C16.60. Théorème (Sommes de Riemann pour une fonctions à valeurs vectorielles) Soit $f\in\mathscr{C}^0([a\,;b],E)$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, posons :

$$S_n^g:=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)\qquad\text{et}\qquad S_n^d:=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)$$

Alors :

$$S_n^g\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_a^b f\qquad\text{et}\qquad S_n^d\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_a^b f$$

§ 8 Liens entre intégration et dérivation

Ce paragraphe met en évidence les liens, déjà bien connus pour les fonction à valeurs réelles ou complexes, entre la dérivation et l'intégration. Le théorème C16.64, connu sous le nom de « théorème fondamental du calcul différentiel et intégral », en est le résultat central.

C16.61. Notation I désigne un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$.

C16.62. Définition (Primitive d'une fonction continue par morceaux) Soit $f \in \mathscr{C}^0(I, E)$. Une fonction $F : I \longrightarrow E$ est appelée **primitive de f sur I** si :
- F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ;
- pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

La Proposition suivante affirme que deux primitives d'une même fonction continue sont égales à une constante près.

C16.63. Proposition (Différence entre deux primitives d'une même fonction) Soit $f \in \mathscr{C}^0(I, E)$, soient F et G deux primitives de f. Alors la fonction $F - G$ est constante sur I.

Démonstration

Ce résultat se déduit simplement de C16.20.

Le théorème suivant est peut être le plus important de ce chapitre.

C16.64. Théorème (Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral) Soit $f \in \mathscr{C}^0(I, E)$, soit $c \in I$. L'application

$$F \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_c^x f(t) \, \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est l'unique primitive de f s'annulant en c.

Démonstration

- Soit $x \in I$. Pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x + h \in I$, on a :

$$\begin{aligned} \left|\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right|\right|_E &= \left|\left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) \, \mathrm{d}t - f(x) \right|\right|_E \\ &= \left|\left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) - f(x) \, \mathrm{d}t \right|\right|_E \\ &\underset{(\star)}{\leqslant} \frac{1}{|h|} \int_{\min(x,x+h)}^{\max(x,x+h)} \left|\left| f(t) - f(x) \right|\right|_E \, \mathrm{d}t \,. \end{aligned}$$

  Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en x, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in [x - \eta, x + \eta] \cap I$:

$$\left|\left| f(x) - f(t) \right|\right|_E \leqslant \varepsilon.$$

  Soit désormais $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x + h \in I$ (comme précédemment) et tel que $h \in [-\eta, \eta]$ (condition supplémentaire). Alors, pour tout t entre x et $x + h$, $t \in [x - \eta, x + \eta] \cap I$ et donc :

$$\left|\left| f(x) - f(t) \right|\right|_E \leqslant \varepsilon.$$

  D'après l'inégalité $(\star)$, $\left|\left| \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right|\right| \leqslant \varepsilon$. On en déduit que F est dérivable en x et que $F'(x) = f(x)$.
- Le résultat précédent ayant été établi pour un x quelconque dans I, la fonction F est dérivable sur I et vérifie $F' = f$. Enfin, on observe $F(c) = 0$.
- L'unicité découle de la Proposition précédente.

Les énoncés qui suivent généralisent au cas des fonctions à valeurs vectorielles des résultats « bien connus » dans le cadre des fonctions à valeurs réelles ou complexes.

C16.65. Théorème (Intégration par parties) Soient $(F||\cdot||_F)$ et $(G||\cdot||_G)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, soit $B\colon E\times F\longrightarrow G$ une application bilinéaire. Soient $f\in\mathscr{C}^1([a,b],E)$ et $g\in\mathscr{C}^1([a,b],F)$. Alors :

$$\int_a^b B(f'(t),g(t))\,\mathrm{d}t=-\int_a^b B(f(t),g'(t))\,\mathrm{d}t+\big[B(f(t),g(t))\big]_a^b$$

Démonstration

Ce résultat se déduit immédiatement de C16.12 et du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral.

La dérivation de fonctions composées permet d'établir le théorème de changement de variables suivant.

C16.66. Théorème (Changement de variables) Soit $f\in\mathscr{C}^0(I,E)$. Soient $\alpha<\beta$ des nombres réels et $\varphi\in\mathscr{C}^1([\alpha,\beta],I)$ telle que $\varphi([\alpha,\beta])\subset I$. Alors l'application composée $f\circ\varphi$ est bien définie et :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Démonstration

On introduit la fonction

$$F\left|\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E\\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{\varphi(\alpha)}^x f(t)\,\mathrm{d}t.\end{array}\right.$$

D'après le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, F est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en $\varphi(\alpha)$. Considérons deux autres fonctions auxiliaires :

$$g:=F\circ\varphi\left|\begin{array}{ccc}[\alpha,\beta] & \longrightarrow & E\\ y & \longmapsto & \displaystyle\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(y)} f(t)\,\mathrm{d}t\end{array}\right.\qquad\text{et}\qquad h\left|\begin{array}{ccc}[\alpha,\beta] & \longrightarrow & E\\ y & \longmapsto & \displaystyle\int_\alpha^y f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u\end{array}\right.$$

D'après le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral et le théorème de dérivation des fonctions composées, g et h sont dérivables sur $[\alpha,\beta]$ et pour tout $y\in[\alpha,\beta]$:

$$g'(y)=F'(\varphi(y))\varphi'(y)=f(\varphi(y))\varphi'(y)\quad\text{et}\quad h'(y)=f(\varphi(y))\varphi'(y).$$

Ainsi, g et h sont deux primitives de la fonction $y\longmapsto f(\varphi(y))\varphi'(y)$ sur $[\alpha,\beta]$. Comme de plus $g(\alpha)=h(\alpha)=0$, $g=h$. en particulier, $g(\beta)=h(\beta)$.

L'inégalité des accroissements finis, « bien connue » pour les fonctions à valeurs réelles, se généralise sans problème aux fonctions à valeurs vectorielles.

C16.67. Théorème (Inégalité des accroissements finis) Soit $f\in\mathscr{C}^1([a,b],E)$. Alors :

$$||\,f(b)-f(a)\,||_E\leqslant(b-a)\,||\,f'\,||_\infty.$$

Démonstration

Par le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, on a $f(b)-f(a)=\displaystyle\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$. On utilise alors la majoration de la norme de l'intégrale par l'intégrale de la norme :

$$||\,f(b)-f(a)\,||_E\leqslant\int_a^b ||\,f'(t)\,||_E\,\mathrm{d}t\leqslant\int_a^b ||\,f'\,||_\infty\,\mathrm{d}t=(b-a)\,||\,f'\,||_\infty.$$

C16.68. Attention L'égalité accroissements finis n'est pas nécessairement valable pour les fonctions à valeurs vectorielles. On peut par exemple considérer l'application f de $[0\,;\,2\pi]$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f\colon\ t \mapsto \exp(i\,t)$, pour exhiber un contre-exemple.

Terminons avec la formule de Taylor avec reste intégral.

C16.69. Théorème (Formule de Taylor avec reste intégral) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathscr{C}^n([a,b],E)$. Alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} (b-a)^k \frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^b (b-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\ \mathrm{d}\,t.$$

Le vecteur $R_n(a,b,f) = \dfrac{1}{(n-1)!} \displaystyle\int_a^b (b-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\ \mathrm{d}\,t$ de E est appelé **reste intégral**.

Démonstration

Par récurrence sur $n \geqslant 1$, à l'aide d'intégrations par parties successives.

La Proposition suivante établit une majoration classique (et utile) du reste intégral dans la formule de Taylor.

C16.70. Proposition (Majoration du reste intégral) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathscr{C}^n([a,b],E)$. Alors :

$$\left|\left| R_n(a,b,f) \right|\right|_E \leqslant \frac{(b-a)^n}{n!} \left|\left| f^{(n)} \right|\right|_\infty$$

où $\left|\left| f^{(n)} \right|\right|_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]} \left|\left| f^{(n)}(x) \right|\right|$.

Démonstration

On majore la norme de l'intégrale par l'intégrale de la norme puis on observe que :

$$\forall\, t \in [a,b], \quad \left|\left| f^{(n)}(t) \right|\right|_E \leqslant \left|\left| f^{(n)} \right|\right|_\infty$$

et

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_a^b (b-t)^{n-1}\ \mathrm{d}\,t = \frac{1}{n!}(b-a)^n.$$

§ 9 Une sélection d'exercices

C16.71. Exercice Démontrer que la courbe paramétrée $t \mapsto \left(2t - \dfrac{1}{t^2}, 2t + t^2\right)$ possède un point double dont on donnera les coordonnées.

C16.72. Exercice Déterminer les points d'inflexion de l'arc paramétré $t \mapsto \left((t-2)^3, t^2-4\right)$.

C16.73. Exercice (Cycloïde) Étudier l'arc paramétré plan défini par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & t - \sin(t) \\ y & = & 1 - \cos(t)\,. \end{array} \right.$$

C16.74. Exercice (Courbe de Lissajous) Étudier l'arc paramétré plan défini par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \cos(3t) \\ y & = & \sin(2t)\,. \end{array} \right.$$

C16.75. Exercice (Astroïde) Tracer la courbe paramétrée d'équation $t \mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$.

C16.76. Exercice (Lemniscate de Bernoulli) On considère la courbe paramétrée

$$t \mapsto \left(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4}\right).$$

1. Que déduit-on du changement de variables $t \mapsto 1/t$? Sur quel intervalle peut-on réduire l'étude ?
2. Construire la courbe.

C16.77. EXERCICE (FOLIUM DE DESCARTES) On considère la courbe paramétrée

$$t \mapsto \left(\frac{t}{1+t^3}, \frac{t^2}{1+t^3}\right).$$

1. Que déduit-on du changement de variables $t \mapsto 1/t$? Sur quel intervalle peut-on réduire l'étude ?
2. Construire la courbe. On étudiera ses branches infinies, et on précisera la position de la courbe par rapport à sa ou ses asymptotes.

C16.78. EXERCICE Soit $f : [0\,;\,1] \to E$ dérivable à droite en 0 et vérifiant $f(0) = 0$. Étudier la limite éventuelle, quand n tend vers $+\infty$ de :

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

C16.79. EXERCICE Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $M : \mathbb{R} \to \mathscr{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad M(t) \in \mathscr{O}_{2n+1}(\mathbb{R})$$

Démontrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la matrice $M'(t)$ n'est pas inversible.

C16.80. EXERCICE Soit $f : \mathbb{R} \to E$ une application de classe $\mathscr{C}^2$ telle que f et f'' soient bornées. On pose :

$$M_0 := ||\,f\,||_\infty \qquad \text{et} \qquad M_2 := ||\,f''\,||_\infty\,.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. À l'aide d'une formule de Taylor, démontrer que pour tout $h > 0$:

   $$||\,f'(x)\,|| \leqslant \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}\,.$$

   Qu'en déduire pour f' ?
2. Démontrer :

   $$||\,f'\,||_\infty =: M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}\,.$$

C16.81. EXERCICE Soit $f : [0\,;\,1] \to E$ une application de classe $\mathscr{C}^2$ telle :

$$f(0) = f'(0) = f'(1) = 0 \qquad \text{et} \qquad ||\,f(1)\,|| = 1\,.$$

À l'aide de deux formules de Taylor, démontrer :

$$||\,f''\,||_\infty \geqslant 4\,.$$