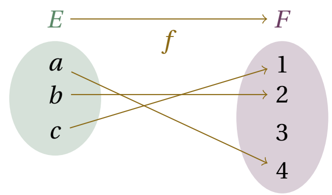
11. Familles sommables

§ 1 Rappels sur les applications injectives, surjectives, bijectives

Soient E et F deux ensembles non vides et $f : E \longrightarrow F$ une application.

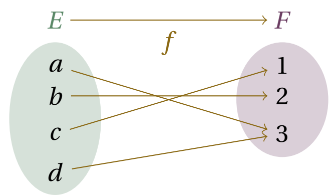
L'application f est **injective**, et l'on note $f : E \hookrightarrow F$, si l'une des trois conditions équivalentes suivantes est vérifiée.

(a) $\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$
(b) Tout élément de F possède au plus un antécédent par f dans E.
(c) Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x dans E possède au plus une solution.



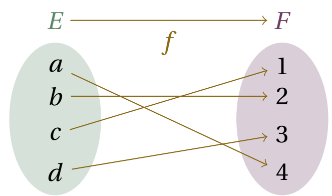
L'application f est **surjective**, et l'on note $f : E \twoheadrightarrow F$, si l'une des trois conditions équivalentes suivantes est vérifiée.

(a) $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y$
(b) Tout élément de F possède au moins un antécédent par f dans E.
(c) Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x dans E possède au moins une solution.



L'application f est **bijective**, et l'on note $f : E \xrightarrow{\sim} F$, si l'une des quatre conditions équivalentes suivantes est vérifiée.

(a) L'application f est injective et surjective.
(b) $\forall y \in F,\ \exists!\, x \in E,\ f(x) = y$
(c) Tout élément de F possède un unique antécédent par f dans E.
(d) Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x dans E possède une unique une solution.



C11.1. Proposition (injection, surjection, bijection et composition) Une composée d'applications injectives (resp. surjectives, bijectives) est injective (resp. surjective, bijective).

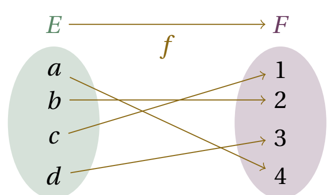
Démonstration

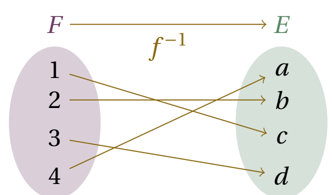
Trois résultats sont à établir. Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.
(i) Supposons f et g injectives et démontrons que $g \circ f$ est injective. Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tels que $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Comme g est injective, $f(x_1) = f(x_2)$. Puis par l'injectivité de f, $x_1 = x_2$.
(ii) Supposons f et g surjectives et démontrons que $g \circ f$ est surective. Soit $z \in G$. Comme $g : F \longrightarrow G$ est surjective, il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$. Comme $f : E \longrightarrow F$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Ainsi $z = g(f(x))$.
• Le résultat pour les applications bijectives se déduit de (i) et (ii).

Si $f : E \longrightarrow F$ est bijective, l'application f^{-1} définie par :

$$f^{-1} \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & \text{l'unique } x \in E \text{ tel que } f(x) = y \end{array} \right.$$

est appelée **application réciproque de** f.





C11.2. Proposition (Composée d'une application bijective et de son application réciproque) Si $f : E \longrightarrow F$ est bijective alors $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$.

Démonstration

• Les applications $f^{-1} \circ f$ et id_E ont même source et but. Il reste à démontrer que, pour tout $x_0 \in E$, $f^{-1}(f(x_0)) = x_0$. Soit $x_0 \in E$. Posons $y := f(x_0) \in F$. L'unique solution de l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ est x_0. Ainsi, $f^{-1}(y) = x_0$, ce qui s'écrit encore $f^{-1}(f(x_0)) = x_0$.
• Les applications $f \circ f^{-1}$ et id_F ont même source et but. Il reste à démontrer que, pour tout $y \in F$, $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$. Soit $y \in F$. Comme $f^{-1}(y)$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$, $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$.

C11.3. Proposition (Bijectivité vs. inversibilité à gauche et à droite) L'application $f: E \longrightarrow F$ est bijective si et seulement s'il existe une application $g: F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$. De plus, si cette application $g: F \longrightarrow E$ existe, alors $g = f^{-1}$.

Démonstration

$\Longrightarrow$ Supposons f bijective. Alors nous pouvons considérer son application réciproque f^{-1}. Si l'on pose $g := f^{-1}$, alors $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$, d'après C11.2.

$\Longleftarrow$ Supposons qu'il existe une application $g: F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

(i) Soient $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$. En composant chacun des membres de cette identité par g, il vient $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, soit $x_1 = x_2$ puisque $g \circ f = \mathrm{id}_E$. L'application f est donc injective.

(ii) Soit $y \in F$. Puisque $f \circ g = \mathrm{id}_F$, $f(g(y)) = y$. Il existe donc $x := g(y) \in E$ tel que $f(x) = y$. L'application f est donc surjective.

(iii) De $f \circ g = \mathrm{id}_F$ on déduit $f^{-1} \circ (f \circ g) = f^{-1} \circ \mathrm{id}_F$. En utilisant l'associativité du produit de composition et C11.2, il vient $g = f^{-1}$.

Si $f: E \longrightarrow F$ est bijective, alors C11.3 entraîne que $f^{-1}: F \longrightarrow E$ est également bijective et que son application réciproque est donnée par $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

C11.4. Exercice (Injectivité vs. inversibilité à gauche) L'application $f: E \longrightarrow F$ est injective si et seulement s'il existe une application $g: F \longrightarrow E$ tel que $g \circ f = \mathrm{id}_E$.

Indication

$\Longleftarrow$ Cf. démonstration de C11.3.

$\Longrightarrow$ Supposons que l'application $f: E \longrightarrow F$ est injective. Fixons un élément x_0 dans l'ensemble E supposé non vide. Soit $y \in F$. Comme f est injective, l'équation $\mathscr{E}_y:\ f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ a 0 ou 1 solution. On pose

$$g(y) := \begin{cases} \text{l'unique } x \in E \text{ tel que } f(x) = y & \text{si } \mathscr{E}_y \text{ a 1 solution} \\ x_0 & \text{si } \mathscr{E}_y \text{ a 0 solution}. \end{cases}$$

Vérifier que l'application $g: F \longrightarrow E$ ainsi définie convient.

C11.5. Exercice (Surjectivité vs. inversibilité à droite) L'application $f: E \longrightarrow F$ est surjective si et seulement s'il existe une application $g: F \longrightarrow E$ tel que $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

Indication

$\Longleftarrow$ Cf. démonstration de C11.3.

$\Longrightarrow$ Supposons que l'application $f: E \longrightarrow F$ est surjective. Soit $y \in F$. Comme f est surjective, l'équation $\mathscr{E}_y:\ f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ a au moins une solution. On « choisit » une solution de $\mathscr{E}_y$ que l'on nomme $g(y)$, i.e. on pose

$$g(y) := \text{une solution « choisie » et fixée de } \mathscr{E}_y\,.$$

Vérifier que l'application $g: F \longrightarrow E$ ainsi définie convient.

C11.6. Exercice (Il existe $E \hookrightarrow F$ ssi il existe $F \twoheadrightarrow E$) Démontrer qu'il existe une application injective de E dans F si et seulement s'il existe une application surjective de F dans E.

Indication

Raisonner par double implication et combiner les résultats C11.4 et C11.5.

§ 2 Ensembles finis

§ 2.1 Définitions d'un ensemble fini et du cardinal d'un tel

C11.7. Théorème (Injection, surjection, bijection de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,m]\!]$) Soient n et m deux entiers naturels non nuls.

(a) S'il existe une application injective $f\colon [\![1,n]\!] \hookrightarrow [\![1,m]\!]$, alors $n \leqslant m$.

(b) S'il existe une application surjective $f\colon [\![1,n]\!] \twoheadrightarrow [\![1,m]\!]$, alors $n \geqslant m$.

(c) S'il existe une application bijective $f\colon [\![1,n]\!] \xrightarrow{\sim} [\![1,m]\!]$, alors $n = m$.

Démonstration

(a) On démontre par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}^*$ que le prédicat

$$\mathscr{P}(n) \;\Big|\; \text{« } \forall\, m \in \mathbb{N}^*,\ \Big(\exists\, f\colon [\![1,n]\!] \hookrightarrow [\![1,m]\!]\Big) \Longrightarrow n \leqslant m \text{ »}$$

est vrai.
Initialisation à $n = 1$. Clair.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $f\colon [\![1,n+1]\!] \hookrightarrow [\![1,m]\!]$.

- L'entier naturel non nul m n'est pas égal à 1. En effet, si $m = 1$ alors $f(1) = f(n+1) = 1$, ce qui, comme $1 \neq n+1$, contredit l'injectivité de f. Ainsi $m - 1 \geqslant 1$.
- Supposons que $f(n+1) = m$. Alors l'application

$$\overline{f} \;\left|\; \begin{array}{ccc} [\![1,n]\!] & \longrightarrow & [\![1,m-1]\!] \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}\right.$$

  est bien définie et est injective, comme restriction et corestriction de l'application injective f. D'après $\mathscr{P}(n)$, $n \leqslant m-1$ et donc $n+1 \leqslant m$.
- Supposons que $f(n+1) \neq m$. Considérons la transposition $\tau_{f(n+1),m}\colon [\![1,m]\!] \xrightarrow{\sim} [\![1,m]\!]$ qui envoie $f(n+1)$ sur m, m sur $f(n+1)$ et qui fixe tous les autres éléments de $[\![1,m]\!]$. On observe que l'application $g := \tau_{f(n+1),m} \circ f\colon [\![1,n+1]\!] \hookrightarrow [\![1,m]\!]$ est injective par C11.1 et vérifie $g(n+1) = m$. On est alors ramené au cas précédent, qui livre $n+1 \leqslant m$.

(b) Conséquence de (a) et C11.6.
(c) Conséquence de (a) et (b).

C11.8. Définition (Ensemble fini). Un ensemble E est fini s'il vérifie l'une des deux conditions suivantes.

(a) $E = \varnothing$

(b) Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection $f\colon [\![1,n]\!] \xrightarrow{\sim} E$.

C11.9. Définition (Cardinal d'un fini). Soit E un ensemble fini. Le cardinal de E est le nombre entier noté $|E|$ ou $\mathrm{Card}(E)$ ou $\#E$ défini par :

$$|E| := \begin{cases} 0 & \text{si } E = \varnothing \\ n & \text{s'il existe un entier } n \in \mathbb{N}^* \text{ et une bijection } f\colon [\![1,n]\!] \xrightarrow{\sim} E. \end{cases}$$

D'après C11.7, le cardinal d'un ensemble fini non vide est bien défini.

C11.10. Exemples

(a) Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $[\![1,n]\!]$ est fini et $|[\![1,n]\!]| = 1$. En effet, l'application $\mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}\colon [\![1,n]\!] \longrightarrow [\![1,n]\!]$ est bijective.

(b) Si E est un singleton alors E est fini et $|E| = 1$. En effet, si a désigne l'unique élément de E alors l'application

$$\left|\; \begin{array}{ccc} [\![1,1]\!] = \{1\} & \longrightarrow & E \\ 1 & \longmapsto & a \end{array}\right.$$

est bijective.

C11.11. Proposition (Équipotence et finitude) Soit E un ensemble fini non vide et $\varphi\colon E \xrightarrow{\sim} F$ une application bijective de E vers un autre ensemble F. Alors F est fini et $|F| = |E|$.

Démonstration

Comme E est un ensemble fini non vide, il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une application bijective $f : [\![1,n]\!] \xrightarrow{\sim} E$. D'après C11.1, l'application $\varphi \circ f : [\![1,n]\!] \xrightarrow{\sim} F$ est bijective. D'après les définitions C11.8 et C11.9, F est fini et $|F| = n = |E|$.

C11.12. EXERCICE Démontrer que l'ensemble $E := \left\{n \in [\![2,200]\!] \;:\; n \text{ est pair}\right\}$ est fini et préciser son cardinal.

Indication

Commencer par décrire l'ensemble E en extension, puis construire une application bijective de $f : [\![1,100]\!] \xrightarrow{\sim} E$.

C11.13. EXERCICE (FINITUDE ET CARDINAL DE $[\![a,b]\!]$). Soient a et b des entiers relatifs tels que $a \leqslant b$. Démontrer que l'ensemble $[\![a,b]\!]$ est fini et préciser son cardinal.

Indication

Construire une application bijective de $f : [\![1,b-a+1]\!] \xrightarrow{\sim} [\![a,b]\!]$.

§ 2.2 PARTIES D'UN ENSEMBLE FINI

C11.14. THÉORÈME (PARTIES DE $[\![1,n]\!]$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit A une partie de $[\![1,n]\!]$.
(a) Si $A \neq [\![1,n]\!]$ alors l'ensemble A est fini et $|A| < n$.
(b) Si $|A| = n$, alors $A = [\![1,n]\!]$.

Démonstration

(a) On démontre par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}^*$ que le prédicat

$$\mathscr{P}(n) \;\Big|\; \text{« } \forall A \in \mathscr{P}([\![1,n]\!]),\ A \subsetneq [\![1,n]\!] \Longrightarrow A \text{ est finie et } |A| < n \text{ »}$$

est vrai.
Initialisation à $n = 1$. L'ensemble vide est la seule partie de $[\![1,1]\!] = \{1\}$ distincte de $\{1\}$. Comme $\emptyset$ est fini de cardinal $0 < 1$, l'assertion $\mathscr{P}(1)$ établie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Ceci implique que toute partie X de $[\![1,n]\!]$ est finie de cardinal $|X| \leqslant n$. En effet, si $X \neq [\![1,n]\!]$ il s'agit d'une conséquence de $\mathscr{P}(n)$. Sinon $X = [\![1,n]\!]$ et le résultat découle de C11.10.
Soit A une partie de $[\![1,n+1]\!]$ dictincte de $[\![1,n+1]\!]$.

- Si $A = \emptyset$ alors A est fini et $|A| = 0 < n+1$.
- Supposons désormais que A est non vide.
  - — Si $n+1 \notin A$, alors A est une partie de $[\![1,n]\!]$. Donc A est fini et $|A| \leqslant n < n+1$.
  - — Supposons à présent que $n+1 \in A$. Comme $A \neq [\![1,n+1]\!]$, il existe $a \in [\![1,n]\!]$ tel que $a \notin A$. Introduisons la partie $B := (A \setminus \{n+1\}) \sqcup \{a\}$ de $[\![1,n]\!]$. Ainsi B est finie, de cardinal $|B| \leqslant n$. Si $x \in B$ et $y \in A$, on pose

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq a \\ n+1 & \text{si } x = a \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(y) = \begin{cases} y & \text{si } y \neq n+1 \\ a & \text{si } y = n+1 \end{cases}$$

d'où deux applications $f : B \longrightarrow A$ et $g : A \longrightarrow B$ qui sont bien définies. On vérifie $f \circ g = \mathrm{id}_A$ et $g \circ f = \mathrm{id}_B$. Par C11.3, f est bijective. D'après C11.11, A est fini et $|A| = |B| \leqslant n < n+1$.

(b) Conséquence de (a).

C11.15. COROLLAIRE (PARTIES D'UN ENSEMBLE FINI) Soit E une ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Soit A une partie de E.
(a) Si $A \neq E$, alors l'ensemble A est fini de cardinal $|A| < n$.
(b) Si $|A| = n$ alors $A = E$.

Démonstration

(a) Comme E est fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une bijection $f : [\![1,n]\!] \xrightarrow{\sim} E$. Supposons donc que A est une partie distincte de E. Considérons la partie $B := \left\{x \in [\![1,n]\!] \;:\; f(x) \in A\right\}$ de $[\![1,n]\!]$.
• L'ensemble B est distinct de $[\![1,n]\!]$. En effet, $B = [\![1,n]\!]$ implique $A = E$ d'après la surjectivité de f.
• Comme B est une partie de $[\![1,n]\!]$ distincte de $[\![1,n]\!]$, B est fini et $|B| < n$ d'après C11.14.
• L'application

$$g \;\Bigg|\; \begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

est bien définie. La bijectivité de f implique celle de g. D'après le point précédent et C11.11, A est fini et $|A| = |B| < n$.
(b) Conséquence de (a).

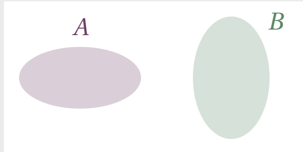
C11.16. Exercice (Principe des tiroirs) Soit A et B deux parties d'un ensemble fini E. Démontrer que si $|A|+|B|>|E|$, alors A et B ont au moins un élément en commun.

§ 2.3 Réunion disjointe d'ensembles finis

C11.17. Théorème (Réunion disjointe de deux ensembles finis)

Soit A et B deux parties finies disjointes ($A\cap B=\emptyset$) d'un ensemble E. L'ensemble $A\sqcup B$ est fini et

$$|A\sqcup B|=|A|+|B|\ .$$



Démonstration

Si $A=\emptyset$, alors $A\sqcup B=B$ et l'assertion est claire puisque $|A|=0$. Par symétrie des rôles joués par A et B, l'assertion est vraie dans le cas où $B=\emptyset$. Supposons désormais que A et B sont non vides.
Comme A et B sont finies et non vides, il existe $(a,b)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ et deux applications bijectives

$$f\colon [\![1,a]\!]\xrightarrow{\ \sim\ }A \quad\text{et}\quad g\colon [\![1,b]\!]\xrightarrow{\ \sim\ }B\ .$$

L'application

$$h\ \left|\ \begin{array}{ccc} [\![1,a+b]\!] & \longrightarrow & A\sqcup B \\ n & \longmapsto & \begin{cases} f(n) & \text{si } n\leqslant a \\ g(n-a) & \text{si } n>a \end{cases}\end{array}\right.$$

est bien définie.

- Soit $(n_1,n_2)\in[\![1,a+b]\!]^2$ tel que $h(n_1)=h(n_2)\in A\sqcup B$.
  - Supposons $h(n_1)=h(n_2)\in A$. Alors comme $A\cap B=\emptyset$, $n_1\leqslant a$ et $n_2\leqslant a$ et donc $h(n_1)=f(n_1)$ et $h(n_2)=f(n_2)$. Comme f est injective, $n_1=n_2$.
  - Supposons $h(n_1)=h(n_2)\in B$ Alors comme $A\cap B=\emptyset$, $n_1>a$ et $n_2>a$ et donc $h(n_1)=g(n_1-a)$ et $h(n_2)=g(n_2-a)$. Comme g est injective, $n_1-a=n_2-a$ et donc $n_1=n_2$.

  L'application h est injective.
- Soit $y\in A\sqcup B$.
  - Si $y\in A$, alors $f^{-1}(y)\in[\![1,a]\!]$ et donc $h\left(f^{-1}(y)\right)=f\left(f^{-1}(y)\right)=y$.
  - Si $y\in B$, alors $g^{-1}(y)\in[\![1,b]\!]$ et donc $a+g^{-1}(y)\in[\![a+1,a+b]\!]$. Ainsi $h\left(a+g^{-1}(y)\right)=g\left(g^{-1}(y)\right)=y$.

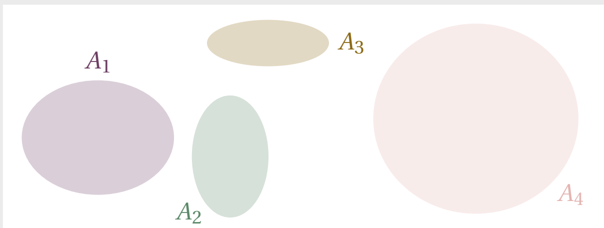
  L'application h est surjective.

Comme l'application h est bijective, C11.11 livre la finitude de l'ensemble $A\sqcup B$ et $|A\cup B|=a+b=|A|+|B|$.

C11.18. Corollaire (Réunion disjointe d'un nombre fini d'ensembles finis)

Soient $p\geq 2$ et $A_1,A_2,\ldots,A_p$ des parties finies deux-à-deux disjointes d'un ensemble E. L'ensemble $\bigsqcup_{k=1}^{p}A_k$ est fini et

$$\left|\bigsqcup_{k=1}^{p}A_k\right|=\sum_{k=1}^{p}|A_k|\ .$$



Démonstration

On raisonne par récurrence sur l'entier $p\geqslant 2$.
Initialisation $p=2$.. Pour $p=2$, l'assertion a été établie en C11.17.
Hérédité. Soient $A_1,A_2,\ldots,A_p,A_{p+1}$ des parties finies deux-à-deux disjointes de E. D'après l'hypothèse de récurrence, l'ensemble $\bigsqcup_{k=1}^{p}A_k$ est fini. Comme les ensembles $\bigsqcup_{k=1}^{p}A_k$ et A_{p+1} sont finis et disjoints, C11.17 livre la finitude de l'ensemble $\bigsqcup_{k=1}^{p+1}A_k=\left(\bigsqcup_{k=1}^{p}A_k\right)\sqcup A_{p+1}$ et $\left|\bigsqcup_{k=1}^{p+1}A_k\right|=\left|\bigsqcup_{k=1}^{p}A_k\right|+\left|A_{p+1}\right|$. D'après l'hypothèse de récurrence, $\left|\bigsqcup_{k=1}^{p}A_k\right|=\sum_{k=1}^{p}|A_k|$. Nous en déduisons $\left|\bigsqcup_{k=1}^{p+1}A_k\right|=\sum_{k=1}^{p+1}|A_k|$.

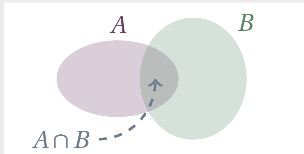
Le cas d'une réunion finie de parties finies non nécessairement deux-à-deux disjointes d'un ensemble E sera discuté plus loin, cf. C11.19 et C11.20.

§ 2.4 Réunion d'ensembles finis

C11.19. Proposition (Réunion de deux ensembles finis)

Soient A et B deux parties finies d'un ensemble E. L'ensemble $A \cup B$ est fini et

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \ .$$



Démonstration

On décompose les ensembles A, B et $A \cup B$ en réunions disjointes comme suit.
(i) $A = (A \cap B) \sqcup (A \setminus A \cap B)$
(ii) $B = (A \cap B) \sqcup (B \setminus A \cap B)$
(iii) $A \cup B = (A \setminus A \cap B) \sqcup (A \cap B) \sqcup (B \setminus A \cap B)$
Comme $A \setminus A \cap B$ et $A \cap B$ sont des parties de l'ensemble fini A, $A \setminus A \cap B$ et $A \cap B$ sont des ensembles finis (C11.15). Comme $B \setminus A \cap B$ est une partie de l'ensemble fini B, $B \setminus A \cap B$ est un ensemble fini (C11.15). D'après C11.18, (iii) livre la finitude de l'ensemble $A \cup B$ et il vient

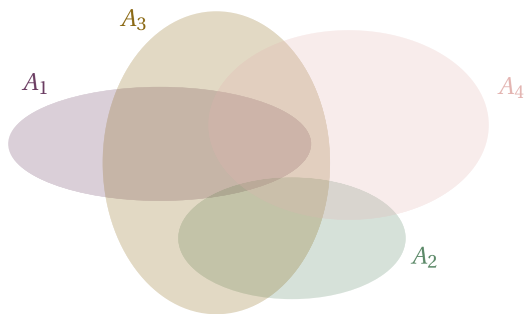
$$|A| \underset{\text{(i)}}{=} |A \cap B| + |A \setminus A \cap B| \qquad |B| \underset{\text{(ii)}}{=} |A \cap B| + |B \setminus A \cap B| \qquad |A \cup B| \underset{\text{(iii)}}{=} |A \setminus A \cap B| + |A \cap B| + |B \setminus A \cap B| \ .$$

En combinant ces trois identités, on obtient cellee de la proposition.

C11.20. Exercice (Formule du crible)

Soient $p \geq 2$ et $A_1, A_2, \ldots, A_p$ des parties finies d'un ensemble E. Alors l'ensemble $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{p} A_k$ est fini et

$$\left| \bigcup_{k=1}^{p} A_k \right| = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \left| A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k} \right| \ .$$



Indication

On établit le résultat en raisonnant par récurrence sur l'entier $p \geqslant 2$. L'initialisation à $p = 2$ résulte de C11.19. Pour l'hérédité, on pourra remarquer que si $A_1, \ldots, A_p, A_{p+1}$ sont des parties finies de E, alors l'ensemble $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{p+1} A_k$ est la réunion des deux ensembles $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{p} A_k$ et A_{p+1}.

§ 2.5 Produit cartésien d'ensembles finis

C11.21. Cardinal du produit cartésien de 2 ensembles finis Soient E_1, E_2 deux ensembles finis non vides. L'ensemble $E_1 \times E_2$ est fini et $|E_1 \times E_2| = |E_1| \times |E_2|$.

Esquisse de démonstration

Posons $n_1 := |E_1| \in \mathbb{N}^*$ et $n_2 := |E_2| \in \mathbb{N}^*$. Par hypothèse, il existe des bijections $f_1 \colon [\![1, n_1]\!] \xrightarrow{\sim} E_1$ et $f_2 \colon [\![1, n_2]\!] \xrightarrow{\sim} E_2$. Comme

$$[\![1, n_1 n_2]\!] = \bigsqcup_{k=0}^{n_2 - 1} [\![k n_1 + 1, k n_1 + n_1]\!]$$

pour tout $x \in [\![1, n_1 n_2]\!]$, il existe un unique couple $(a(x), b(x)) \in [\![1, n_1]\!] \times [\![0, n_2 - 1]\!]$ tel que $x = b(x) n_1 + a(x)$. L'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} [\![1, n_1 n_2]\!] & \longrightarrow & E_1 \times E_2 \\ x & \longmapsto & \big(f_1(a(x)), f_2((b(x)+1)\big) \end{array} \right.$$

est bien définie. On vérifie qu'elle est bijective.

C11.22. Cardinal du produit cartésien de p ensembles finis Soient $p \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$ et $E_1, \dots, E_p$ des ensembles finis non vides. L'ensemble $\prod_{i=1}^{p} E_i$ est fini et $\left|\prod_{i=1}^{p} E_i\right| = \prod_{i=1}^{p} |E_i|$.

Démonstration

On démontre l'assertion par récurrence sur $p \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$.
Initialisation à $p = 2$. L'assertion a été établie en C11.21.
Hérédité. Soit $p \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$ tel que l'assertion est vraie pour un produit cartésien de p ensembles finis non vides. Soient $E_1, \dots, E_p, E_{p+1}$ des ensembles finis non vides. On note $n_1, \dots, n_p, n_{p+1}$ les cardinaux respectifs de ces ensembles. D'après l'hypothèse de récurrence, l'ensemble $\prod_{i=1}^{p} E_i$ est fini et $\left|\prod_{i=1}^{p} E_i\right| = \prod_{i=1}^{p} n_i$. Il existe donc une bijection

$$f \left| \begin{array}{ccc} [\![1, n_1 \dots n_p]\!] & \longrightarrow & \prod_{i=1}^{p} E_i \\ x & \longmapsto & (f_1(x), \dots, f_p(x)) \end{array} \right. .$$

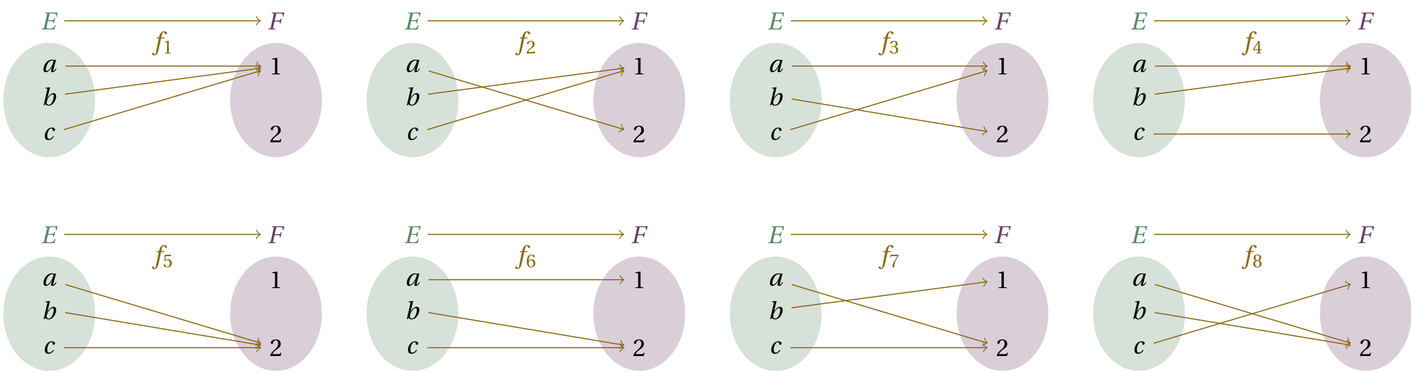
Comme E_{p+1} est fini de cardinal n_{p+1}, il existe une bijection $g \colon [\![1, n_{p+1}]\!] \xrightarrow{\sim} E_{p+1}$. On en déduit que l'application

$$h \left| \begin{array}{ccc} [\![1, n_1 \dots n_p]\!] \times [\![1, n_{p+1}]\!] & \longrightarrow & \prod_{i=1}^{p+1} E_i \\ (x, y) & \longmapsto & (f_1(x), \dots, f_p(x), g(y)) \end{array} \right.$$

est bijective. D'après C11.21, l'ensemble $[\![1, n_1 \dots n_p]\!] \times [\![1, n_{p+1}]\!]$ est fini de cardinal $\prod_{i=1}^{p+1} n_i$. On conclut alors en appliquant C11.11.

§ 2.6 Ensemble des applications entre deux ensembles finis

C11.23. Exemple Considérons un ensemble $E = \{a, b, c\}$ de cardinal 3 et un ensemble $F = \{1, 2\}$ de cardinal 2. L'ensemble F^E des applications de E dans F est formé des $2^3 = 8$ éléments ci-dessous.



C11.24. Proposition (Nombre d'applications entre deux ensembles finis) Soient E et F des ensembles finis non vides. Alors l'ensemble F^E des applications de E vers F est fini et $\left|F^E\right| = |F|^{|E|}$.

Démonstration

(a) On démontre par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}^*$ que le prédicat

$\mathscr{P}(n)$ | « Pour tout ensemble fini non vide E de cardinal n, pour tout ensemble fini non vide F, F^E est fini de cardinal $|F|^n$. »

est vrai.
Initialisation à $n = 1$. Soit $E = \{x_0\}$ un ensemble de cardinal 1 et F un ensemble fini non vide. Les applications

$$\Phi \left| \begin{array}{ccc} F^E & \longrightarrow & F \\ f & \longmapsto & f(x_0) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \Psi \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F^E \\ y & \longmapsto & f \left| \begin{array}{ccc} E = \{x_0\} & \longrightarrow & F \\ x_0 & \longmapsto & y \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

sont bien définies et vérifient $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_F$ et $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{F^E}$. L'application Ψ est donc bijective. De C11.11 nous déduisons alors que F^E est fini, de cardinal $|F| = |F|^1$.

(b) *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Soient E un ensemble fini de cardinal $n+1$ et F un ensemble fini non vide. On fixe un élement x_0 de E. Comme $E = \{x_0\} \sqcup E \setminus \{x_0\}$, l'ensemble $E \setminus \{x_0\}$ est fini et $|E \setminus \{x_0\}| = |E| - |\{x_0\}| = n$. Les applications

$$\Phi \left| \begin{array}{ccc} F^E & \longrightarrow & F^{E\setminus\{x_0\}} \times F \\ f & \longmapsto & \left(f_{|E\setminus\{x_0\}}, f(x_0)\right) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \Psi \left| \begin{array}{ccc} F^{E\setminus\{x_0\}} \times F & \longrightarrow & F^E \\ (g,y) & \longmapsto & f \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} g(x) & \text{si } x \in E\setminus\{x_0\} \\ y & \text{si } x = x_0 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

sont bien définies et vérifient $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{F^{E\setminus\{x_0\}} \times F}$ et $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{F^E}$. L'application Ψ est donc bijective. D'après l'hypothèse de récurrence, l'ensemble $F^{E\setminus\{x_0\}}$ est fini de cardinal $|F|^n$. D'après C11.21, l'ensemble $F^{E\setminus\{x_0\}} \times F$ est fini de cardinal $\left|F^{E\setminus\{x_0\}}\right| \times |F| = |F|^{n+1}$. De C11.11 nous déduisons enfin que $\left|F^E\right| = |F|^{n+1}$.

C11.25. Exercice (Nombre d'injections d'un ensemble fini dans un autre) Soient E et F des ensembles finis non vides. On pose $k := |E| \in \mathbb{N}^*$, $n := |F| \in \mathbb{N}^*$ et on introduit

$$\mathrm{Inj}(E,F) := \left\{ f \in F^E \ : \ f \text{ est injective} \right\} .$$

Cet ensemble $\mathrm{Inj}(E,F)$ est fini (car inclus dans F^E) et nous nous proposons de déterminer son cardinal.

(a) Démontrer que $\mathrm{Inj}(E,F)$ est vide si $k > n$.

On se propose de démontrer que, si $k \leqslant n$, alors $\left|\mathrm{Inj}(E,F)\right| = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, en raisonnant par récurrence sur le cardinal k de E. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on introduit le prédicat

$\mathscr{P}(k)$ | « Pour tout ensemble fini non vide E de cardinal k, pour tout ensemble fini non vide F de cardinal $n \geqslant k$, $\left|\mathrm{Inj}(E,F)\right| = \dfrac{n!}{(n-k)!}$. »

(b) Justifier que l'assertion $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Soit désormais $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(k)$ est vraie. Soient E un ensemble fini de cardinal $k+1$ et F un ensemble fini de cardinal $n \geqslant k+1$. On fixe un élément x_0 de E. Pour tout $y \in F$, on pose $I_y := \left\{ f \in \mathrm{Inj}(E,F) \ : \ f(x_0) = y \right\}$.

(c) Soit $y \in F$. À l'aide de l'hypothèse de récurrence, démontrer que $\left|I_y\right| = \dfrac{(n-1)!}{(n-k-1)!}$.

(d) En écrivant $\mathrm{Inj}(E,F)$ à l'aide des ensemble I_y, où $y \in F$, en déduire que $\left|\mathrm{Inj}(E,F)\right| = \dfrac{n!}{(n-k-1)!}$, ce qui prouve $\mathscr{P}(k+1)$.

Indication

(a) Par hypothèse, il existe deux bijections $f\colon [\![1,k]\!] \xrightarrow{\sim} E$ et $g\colon [\![1,n]\!] \xrightarrow{\sim} F$. À l'aide de f et g construire deux applications $\Phi\colon \mathrm{Inj}(E,F) \longrightarrow \mathrm{Inj}([\![1,k]\!],[\![1,n]\!])$ et $\Psi\colon \mathrm{Inj}([\![1,k]\!],[\![1,n]\!]) \longrightarrow \mathrm{Inj}(E,F)$ telles que $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{\mathrm{Inj}([\![1,k]\!],[\![1,n]\!])}$ et $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{\mathrm{Inj}(E,F)}$.
(b) Soit $E = \{x_0\}$ un ensemble de cardinal 1 et F un ensemble de cardinal $n \geqslant 1$. Construire deux applications $\Phi\colon \mathrm{Inj}(\{x_0\},F) \longrightarrow F$ et $\Psi\colon F \longrightarrow \mathrm{Inj}(\{x_0\},F)$ telles que $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_F$ et $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{\mathrm{Inj}(\{x_0\},F)}$.
(c) Construire deux applications $\Phi\colon I_y \longrightarrow \mathrm{Inj}\left(E\setminus\{x_0\}, F\setminus\{y\}\right)$ et $\Psi\colon \mathrm{Inj}\left(E\setminus\{x_0\}, F\setminus\{y\}\right) \longrightarrow I_y$ telles que $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{\mathrm{Inj}(E\setminus\{x_0\},F\setminus\{y\})}$ et $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{I_y}$. On prendra soin de justifier le caractère bien défini de Φ et Ψ.
(d) Observer que $\mathrm{Inj}(E,F) = \bigsqcup_{y\in F} I_y$.

C11.26. Exercice (Arrangements) Soit E un ensemble fini non vide de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Un k-arrangement de E est un k-uplet $(x_1,\dots,x_k)$ d'éléments de E tel que les $x_1,\dots,x_k$ sont deux-à-deux distincts. Déduire de C11.25, le nombre de k-arrangements d'éléments de E.

Indication

Notons $\mathscr{A}_n^k$ l'ensemble de tous les k-arrangements d'éléments de E,

$$\mathscr{A}_n^k := \left\{ (x_1,\dots,x_k) \in E^k \ : \ x_1,\dots,x_k \text{ sont deux-à-deux distincts} \right\} .$$

Il s'agit de calculer $\left|\mathscr{A}_n^k\right|$. Construire deux applications $\Phi\colon \mathscr{A}_n^k \longrightarrow \mathrm{Inj}\,([\![1,k]\!],E)$ et $\Psi\colon \mathrm{Inj}\,([\![1,k]\!],E) \longrightarrow \mathscr{A}_n^k$ telles que $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{\mathrm{Inj}([\![1,k]\!],E)}$ et $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{\mathscr{A}_n^k}$.

C11.27. Théorème (Critère de bijectivité pour une application entre deux ensembles finis) Soient E et F deux ensemble finis non vides. Soit $f : E \longrightarrow F$. Si $|E| = |F|$ alors les trois assertions suivantes sont équivalentes.

(a) f est bijective.
(b) f est injective.
(c) f est surjective.

Démonstration

• Il est clair que (a) implique (b) et (c).
• Démontrons que (b) implique (a). Supposons l'application f injective. Alors l'application

$$\overline{f} \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & f(E) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

est bijective. D'après C11.11, $\left|f(E)\right| = |E| = |F|$. La partie $f(E)$ de F est finie, de même cardinal que F. D'après C11.15, $f(E) = F$, i.e. f est surjective.
• Démontrons que (c) implique (a). Supposons l'application f surjective. D'après C11.5, il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$. L'application g est injective et, d'après le point précédent, elle est bijective. De $f \circ g = \mathrm{id}_F$, on déduit alors que $f = g^{-1}$ est bijective.

C11.28. Proposition (Nombre de permutations d'un ensemble fini) Soit E un ensemble fini non vide. On note $\mathfrak{S}(E)$ l'ensemble de ses permutations, i.e. l'ensemble des bijections de E dans E. L'ensemble $\mathfrak{S}(E)$ est fini et $|\mathfrak{S}(E)| = |E|!$.

Démonstration

D'après C11.27, $\mathfrak{S}(E) = \mathrm{Inj}(E, E)$. Le résultat découle alors de C11.25.

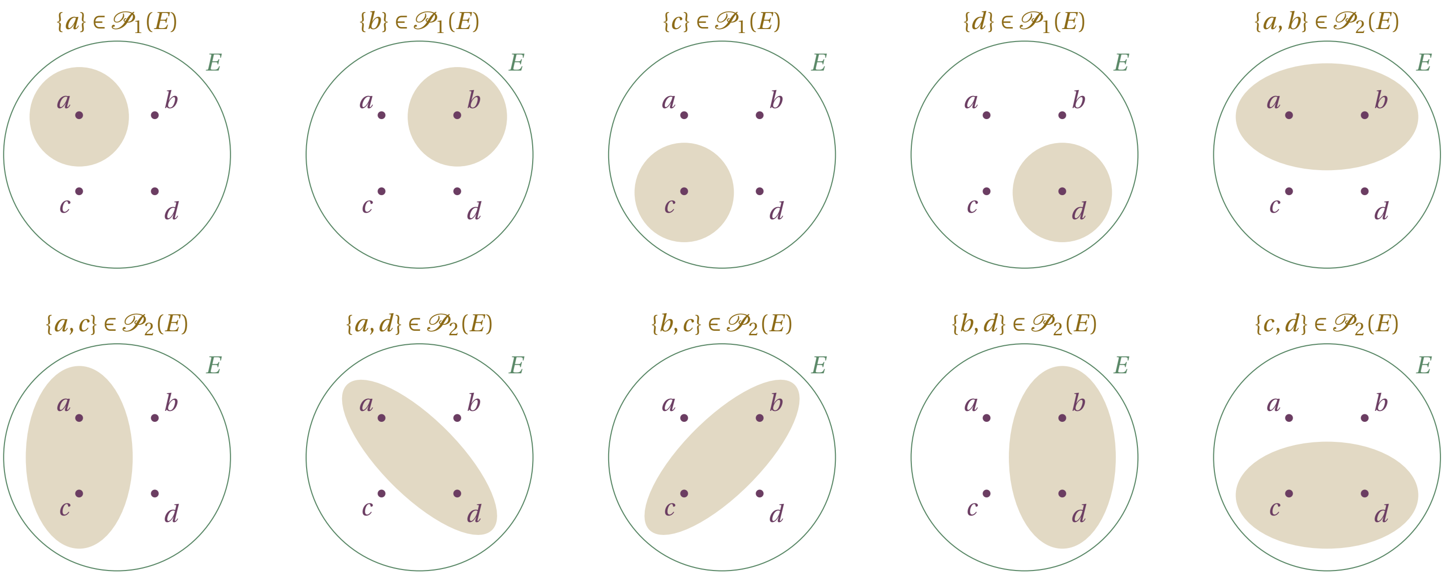
§ 2.7 Ensemble des parties d'un ensemble fini

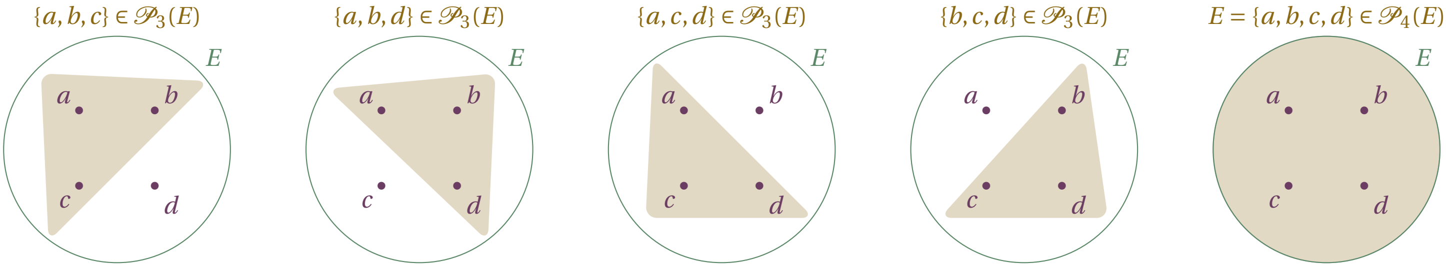
C11.29. Définition (Ensemble des parties d'un ensemble fini) Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$.

(a) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note $\mathscr{P}_k(E)$ l'ensemble des parties de E à k de cardinal k.
(b) On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E.

C11.30. Remarque Si E est un ensemble fini, alors $\mathscr{P}(E) = \displaystyle\bigsqcup_{k=0}^{|E|} \mathscr{P}_k(E)$.

C11.31. Exemple Soit $E = \{a, b, c, d\}$ un ensemble de cardinal 4. Nous représentons ci-dessous toutes les parties de E non vides.





Ainsi :

(i) $\mathscr{P}_0(E) = \{\varnothing\}$ et $|\mathscr{P}_0(E)| = 1 = \binom{4}{0}$

(ii) $\mathscr{P}_1(E) = \{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}\}$ et $|\mathscr{P}_1(E)| = 4 = \binom{4}{1}$

(iii) $\mathscr{P}_2(E) = \{\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\}\}$ et $|\mathscr{P}_2(E)| = 6 = \binom{4}{2}$

(iv) $\mathscr{P}_3(E) = \{\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\}\}$ et $|\mathscr{P}_3(E)| = 4 = \binom{4}{3}$

(iv) $\mathscr{P}_4(E) = \{\{a,b,c,d\}\}$ et $|\mathscr{P}_4(E)| = 1 = \binom{4}{4}$.

De $\mathscr{P}(E) = \bigsqcup_{k=0}^{4} \mathscr{P}_k(E)$, nous en déduisons $|\mathscr{P}(E)| = \sum_{k=0}^{4} |\mathscr{P}_k(E)| = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} 1^k 1^{4-k} = (1+1)^4 = 2^4 = 16$.

C11.32. Proposition (Nombre de parties à k éléments d'un ensemble) Soit E un ensemble fini de cardinal n. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, l'ensemble $\mathscr{P}_k(E)$ est fini et $|\mathscr{P}_k(E)| = \binom{n}{k}$.

Démonstration

On démontre par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}$ que le prédicat

$\mathscr{P}(n)$ | « Pour tout ensemble fini E de cardinal n, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, l'ensemble $\mathscr{P}_k(E)$ est fini et $|\mathscr{P}_k(E)| = \binom{n}{k}$. »

est vrai.

Initialisation à $n = 0$. Clair.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que l'assertion $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Soit E un ensemble de cardinal $n+1$.

• L'ensemble E possède une unique partie à 0 élément, l'ensemble vide. Ainsi $\mathscr{P}_0(E) = \{\varnothing\}$ est fini, de cardinal $1 = \binom{n+1}{0}$.

• L'ensemble E est de cardinal $n+1 \geqslant 1$, donc non vide. Soit x_0 un élement de E fixé. Soit $k \in [\![1,n]\!]$.

(i) Si on pose $\mathscr{P}_k^{x_0}(E) := \{A \in \mathscr{P}_k(E) \,:\, x_0 \in A\}$ et $\mathscr{P}_k^{\overline{x_0}}(E) := \{A \in \mathscr{P}_k(E) \,:\, x_0 \notin A\}$ alors l'ensemble $\mathscr{P}_k(E)$ se décompose en $\mathscr{P}_k(E) = \mathscr{P}_k^{x_0}(E) \sqcup \mathscr{P}_k^{\overline{x_0}}(E)$.

(ii) Les applications

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}_k^{x_0}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}_{k-1}(E \setminus \{x_0\}) \\ A & \longmapsto & A \setminus \{x_0\} \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad g \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}_{k-1}(E \setminus \{x_0\}) & \longrightarrow & \mathscr{P}_k^{x_0}(E) \\ B & \longmapsto & B \sqcup \{x_0\} \end{array} \right.$$

sont bien définies et vérifient $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathscr{P}_{k-1}(E\setminus\{x_0\})}$ et $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathscr{P}_k^{x_0}(E)}$. L'application g est donc bijective. Comme $E \setminus \{x_0\}$ est fini de cardinal n et $0 \leqslant k-1 \leqslant n$, l'hypothèse de récurrence livre la finitude de l'ensemble $\mathscr{P}_{k-1}(E \setminus \{x_0\})$ et $|\mathscr{P}_{k-1}(E \setminus \{x_0\})| = \binom{n}{k-1}$. D'après C11.11, l'ensemble $\mathscr{P}_k^{x_0}(E)$ est fini de cardinal $\left|\mathscr{P}_k^{x_0}(E)\right| = \binom{n}{k-1}$.

(iii) On observe que $\mathscr{P}_k^{\overline{x_0}}(E) = \mathscr{P}_k(E \setminus \{x_0\})$. Comme $E \setminus \{x_0\}$ est fini de cardinal n et $0 \leqslant k \leqslant n$, l'hypothèse de récurrence livre la finitude de l'ensemble $\mathscr{P}_k(E \setminus \{x_0\}) = \mathscr{P}_k^{\overline{x_0}}(E)$ et $\left|\mathscr{P}_k^{\overline{x_0}}(E)\right| = \binom{n}{k}$.

De (i), (ii) et (iii), on déduit que l'ensemble $\mathscr{P}_k(E)$ est fini et que $|\mathscr{P}_k(E)| = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.

C11.33. Proposition (Nombre de parties d'un ensemble) Soit E un ensemble fini. Alors $\mathscr{P}(E)$ est fini et $|\mathscr{P}(E)| = 2^{|E|}$.

Démonstration

Posons $n := |E|$. On rappelle que $\mathscr{P}(E) = \bigsqcup_{k=0}^{n} \mathscr{P}_k(E)$. Avec C11.33, on en déduit que $\mathscr{P}(E)$ est fini et

$$|\mathscr{P}(E)| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n .$$

C11.34. Exercice (Dérangements) Si E est un ensemble fini non vide de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, l'ensemble $\mathscr{D}_k(E)$ des permutations de E possédant exactements k points fixes et on pose $d_k(E) := |\mathscr{D}_k(E)|$. On souhaite dénombrer les permutations de E sans point fixe (appelées aussi dérangements de E), i.e. calculer le nombre $d_0(E)$.

(a) Soient E un ensemble fini non vide de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0,n]\!]$. Démontrer $d_k(E) = d_k([\![1,n]\!]) =: d_k(n)$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} d_k(n)$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0,n]\!]$. Démontrer $d_k(n) = \binom{n}{k} d_0(n-k)$.

d) En déduire une fonction Python d'argument un entier $n \in \mathbb{N}^*$, qui renvoie la valeur $d_0(n)$, i.e. le nombre de dérangements d'un ensemble à n éléments.

Indication

(a) Par hypothèse, il existe une bijection $f\colon [\![1,n]\!] \xrightarrow{\sim} E$. À l'aide de f, construire deux applications $\Phi\colon \mathscr{D}_k([\![1,n]\!]) \longrightarrow \mathscr{D}_k(E)$ et $\Psi\colon \mathscr{D}_k(E) \longrightarrow \mathscr{D}_k([\![1,n]\!])$ telles que $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{\mathscr{D}_k(E)}$ et $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{\mathscr{D}_k([\![1,n]\!])}$. On vérifiera avec soin que les applications Φ et Ψ sont bien définies.

(b) Décomposer l'ensemble $\mathfrak{S}([\![1,n]\!])$ à l'aide des ensembles $\mathscr{D}_k([\![1,n]\!])$, où $k \in [\![0,n]\!]$.

(c) Posons :

- pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}([\![1,n]\!])$, $\mathrm{Fix}(\sigma)$ l'ensemble des points fixes de σ ;
- pour tout $A \in \mathscr{P}_k([\![1,n]\!])$, $\mathscr{D}_k^A([\![1,n]\!]) := \{\sigma \in \mathscr{D}_k([\![1,n]\!]) \,:\, \mathrm{Fix}(\sigma) = A\}$.

Pour tout $A \in \mathscr{P}_k([\![1,n]\!])$, construire une bijection entre $\mathscr{D}_k^A([\![1,n]\!])$ et $\mathscr{D}_0([\![1,n]\!] \setminus A)$. Conclure après avoir décomposé l'ensemble $\mathscr{D}_k([\![1,n]\!])$ à l'aide des ensembles $\mathscr{D}_k^A([\![1,n]\!])$, où $A \in \mathscr{P}_k([\![1,n]\!])$.

(d) D'après (b) et (c), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d_0(n) = n! - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} d_0(k)$. On peut alors construire une fonction récursive.

§ 3 Ensembles dénombrables

§ 3.1 Définition et premiers exemples

C11.35. Définition (Ensemble dénombrable) Un ensemble E est dit dénombrable s'il existe une bijection $f : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} E$.

C11.36. Remarque (Interprétation de la dénombrabilité) Soit E un ensemble.
(a) Si E est dénombrable, l'existence d'une bijection $f : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} E$ nous permet de dresser une liste exhaustive et sans répétition des éléments de E

$$L : f(0), f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots$$

L'injectivité de f assure qu'il n'y a pas de répétition dans la liste L. Tous les éléments de E figure dans la liste L, en raison du caractère surjectif de f.
(b) Réciproquement, si nous disposons d'une liste exhaustive et sans répétition des éléments de E

$$L : x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

alors l'ensemble E est dénombrable puisque l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & E \\ n & \longmapsto & x_n \end{array} \right.$$

est bijective. En effet, l'absence de répétition dans la liste L livre le caractère injectif de f. Quant à la surjectivité de f, elle vient du caractère exhaustif de la liste L.

C11.37. Exemples Comme les applications

$$\mathrm{id}_{\mathbb{N}} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array} \right.$$

sont bijectives, les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$ sont dénombrables.

C11.38. Exercice Démontrer que l'ensemble solution S de l'équation $3x - 2y = 1$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ est dénombrable.

Indication

- On commence par remarquer que $(1,1) \in S$.
- Soit $(x, y) \in S$. À l'aide du lemme de Gauß, on démontre qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x = 1 + 2k$ et $y = 1 + 3k$.
- Réciproquement, on vérifie que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(1+2k, 1+3k) \in S$.
- L'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & S \\ k & \longmapsto & (1+2k, 1+3k) \end{array} \right.$$

est bien définie et elle est surjective. On vérifie qu'elle est injective pour conclure.

§ 3.2 Parties de $\mathbb{N}$

C11.39. Proposition (Dénombrabilité d'une partie infinie de $\mathbb{N}$) Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Démonstration

Soit A une partie infinie de $\mathbb{N}$. On construit par récurrence forte une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ comme suit.
Initialisation. La partie A de $\mathbb{N}$ est infinie donc non vide. Par bon ordre, l'élément $a_0 := \min(A)$ de A est bien défini.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons construits $a_0, \ldots, a_n$ éléments de A. La partie $\{a_0, \ldots, a_n\}$ n'est pas égale à A puisque A est infini. Ainsi la partie $A \setminus \{a_0, \ldots, a_n\}$ n'est pas vide. Par bon ordre, l'élément $a_{n+1} := \min(A \setminus \{a_0, \ldots, a_n\})$ de A est bien défini.
Considérons alors l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & A \\ n & \longmapsto & a_n\,. \end{array} \right.$$

Elle est bien définie et injective car, par construction, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'éléments de A. La surjectivité de f assurera que A est dénombrable.
Soit $x \in A$. Introduisons l'ensemble $I_x := \{n \in \mathbb{N} : a_n \leqslant x\}$.

- Comme $a_0 = \min(A)$ et $x \in A$, $a_0 \leqslant x$ et donc 0 appartient à I_x, qui est donc non vide.
- Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \leqslant a_n$ (cf. lemme pour les suites extraites). Nous en déduisons que $I_x \subset [\![0, x]\!]$.

Des deux points précédents, nous déduisons que l'entier $n := \max(I_x)$ est bien défini par bon ordre. Comme $n \in I_x$ et $n+1 \notin I_x$, $a_0 < a_1 < \ldots < a_n \leqslant x < a_{n+1}$. Démontrons que $x = a_n = f(n)$ en raisonnant par l'absurde. Si $a_n \neq x$, alors $x \in A \setminus \{a_0, \ldots, a_n\}$ et donc $x \geqslant a_{n+1} = \min(A \setminus \{a_0, \ldots, a_n\})$. Contradiction.

C11.40. Exemple (Parties de $\mathbb{N}$ dénombrables) D'après C11.39
(a) l'ensemble $\{2n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ des entiers naturels pairs qui est infini
(b) l'ensemble $\{2n+1 \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ des entiers naturels impairs qui est infini
(c) l'ensemble des nombres premiers qui est infini (Euclide)
sont dénombrables.

C11.41. Proposition (Caractérisation des ensembles finis ou dénombrables) Soit E un ensemble. Les deux assertions suivantes sont équivalentes.
(a) E est fini ou dénombrable.
(b) Il existe une partie A de $\mathbb{N}$ et une bijection $f\colon A \xrightarrow{\sim} E$.

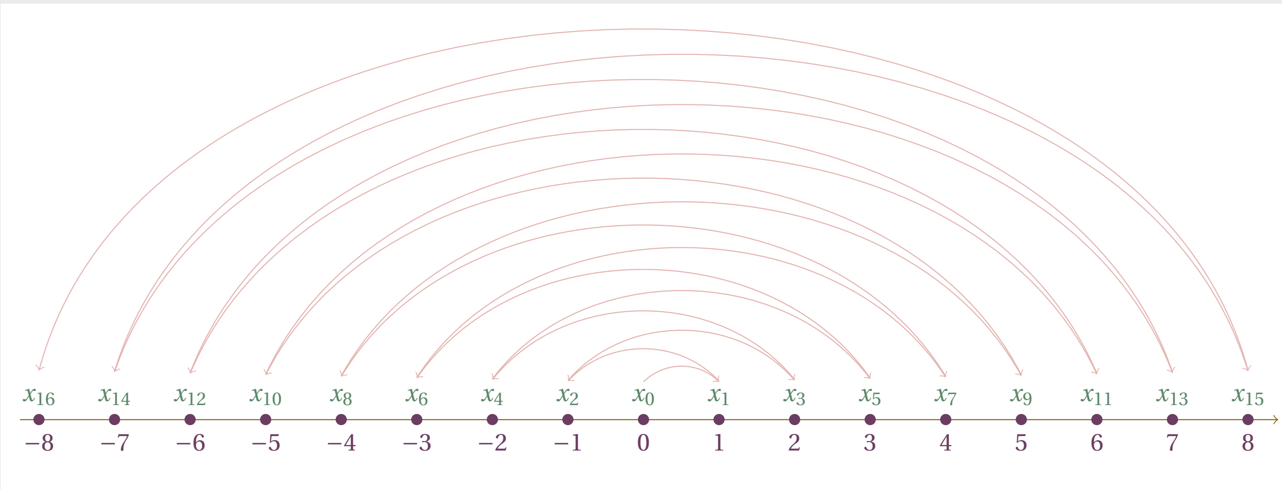
C11.42. Exercice Démontrer que l'ensemble E des nombres premiers p tels que $p \equiv 3 \pmod 4$ est dénombrable.

Indication

D'après C11.39, il suffit de démontrer que E est infini, ce qu'on établit en raisonnant par l'absurde.
Supposons que E est fini et notons $p_1, \ldots, p_r$ ses élements. D'après le théorème fondamental de l'arithmétique l'entier $n = \prod_{i=1}^{r} p_i - 1$ se décompose en produit de facteurs premiers. Il existe donc des nombres premiers $q_1, \ldots, q_s$ et des entiers naturels non nuls $m_1, \ldots, m_s$ tels que $n = \prod_{i=1}^{r} q_i^{m_i}$. On vérifie que tous les $q_1, \ldots, q_s$ sont distincts de 2 et des $p_1, \ldots, p_r$. En analysant les classes de congruences des $q_1, \ldots, q_s$ et de n, on obtient alors une contradiction.

§ 3.3 $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}^2$ sont dénombrables

C11.43. Proposition (Dénombrabilité de $\mathbb{Z}$) L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs est dénombrable.



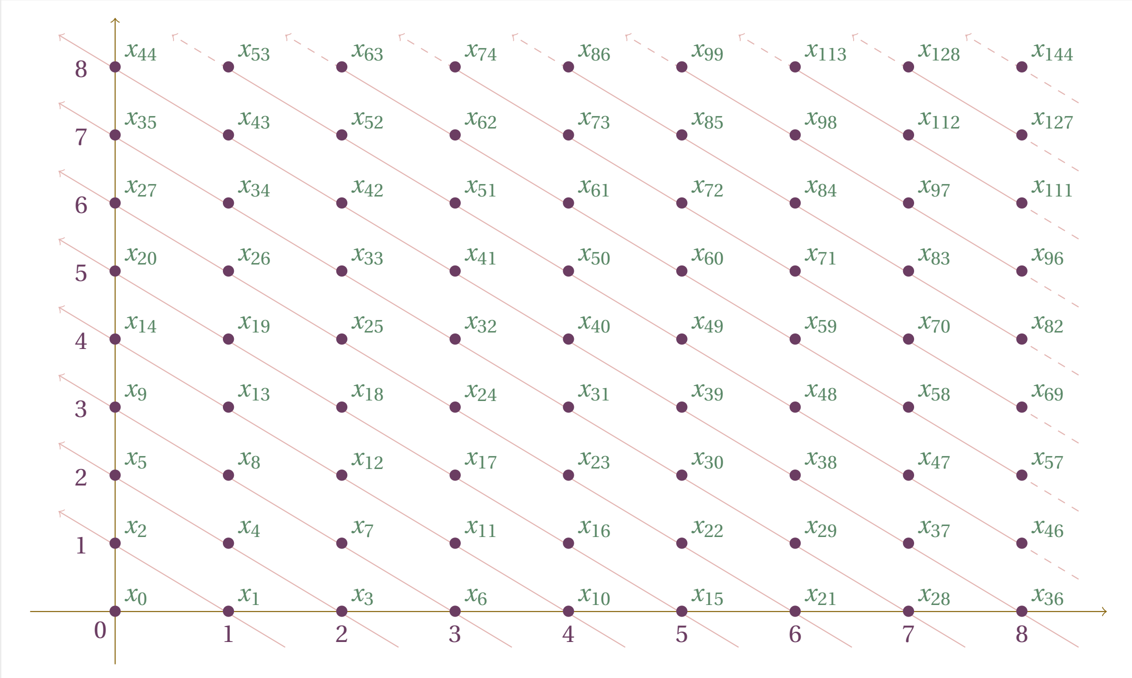
Esquisse de démonstration

Principe de la numérotation. On numérote les éléments de $\mathbb{Z}$ en commençant par affecter le numéro 0 à $0 \in \mathbb{Z}$, puis 1 à $1 \in \mathbb{Z}$, puis 2 à $-1 \in \mathbb{Z}$, puis 3 à $2 \in \mathbb{Z}$, puis 4 à $-2 \in \mathbb{Z}$,... en poursuivant indéfiniment ce jeu de « ping-pong ».
Formalisation. On remarque que l'entier relatif portant le numéro n est $-\dfrac{n}{2}$ si n est pair et $\dfrac{n+1}{2}$ si n est impair. On observe également qu'un élément de $n \in \mathbb{Z}$ est numéroté $-2n$ si $n < 0$ et $2n-1$ si $n \geqslant 0$. C'est ainsi qu'apparaissent les applications

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} -\dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\[2ex] \dfrac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} -2n & \text{si } n \leqslant 0 \\ 2n-1 & \text{si } n > 0\,. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Elles sont bien définies et on vérifie $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ et $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$, en raisonnant par disjonction de cas.

C11.44. Proposition (Dénombrabilité de $\mathbb{N}^2$) L'ensemble $\mathbb{N}^2$ des couples d'entiers naturels est dénombrable.



Esquisse de démonstration

Principe de la numérotation. On numérote $(0,0)$ à 0, puis on serpente de manière diagonale à travers le réseau dessiné par $\mathbb{N}^2$ dans le plan. Après avoir numéroté tous les éléments d'une diagonale, on reprend la numérotation sur la diagonale suivante, en partant du bas pour remonter.
Formalisation. On commence par observer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k+1$ points du réseau dessiné par $\mathbb{N}^2$ figurent sur la diagonale d'équation $y = -x + k$.
Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Ce point appartient à la droite d'équation $y = -x + a + b$. Sur les diagonales précédentes, $\displaystyle\sum_{k=0}^{a+b-1}(k+1) = \sum_{k=1}^{a+b} k$ points du réseau dessiné par $\mathbb{N}^2$ se sont déjà vus attribuer un numéro. Il faut encore en numéroter $b+1$ sur la diagonale d'équation $y = -x+a+b$ pour atteindre (a,b). Ainsi le point (a,b) sera le $\left(b+1+\displaystyle\sum_{k=1}^{a+b} k\right)$-ième point du réseau dessiné par $\mathbb{N}^2$ recevant un numéro. Comme la numérotation débute à 0, il recevra le numéro $b + \displaystyle\sum_{k=1}^{a+b} k$.
C'est ainsi qu'apparaît l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (a,b) & \longmapsto & b + \displaystyle\sum_{k=0}^{a+b} k = b + \dfrac{(a+b)(a+b+1)}{2} \end{array} \right. .$$

On démontre que cette application f est injective et surjective, par exemple en s'appuyant sur la suite strictement croissante d'entiers naturels $\left(S_p := \displaystyle\sum_{k=0}^{p} k = \dfrac{p(p+1)}{2}\right)_{p\in\mathbb{N}}$.

§ 3.4 Produit cartésien d'ensembles dénombrables

C11.45. Rappels sur le produit cartésien Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_r$ des ensembles. On rappelle que le produit cartésien des ensembles $X_1, \dots, X_r$ est l'ensemble $\displaystyle\prod_{i=1}^{r} X_i$ formé des r-uplets $(x_1, \dots, x_r)$ tels que, pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, $x_i \in X_i$. Pour tout $j \in [\![1,r]\!]$, on dispose naturellement d'une projection π_j de $\displaystyle\prod_{i=1}^{r} X_i$ sur X_j définie par

$$\pi_j \left| \begin{array}{ccc} \displaystyle\prod_{i=1}^{r} X_i & \longrightarrow & X_j \\ (x_1, \dots, x_r) & \longmapsto & x_j \end{array} \right. .$$

Ainsi tout élément $x = (x_1, \dots, x_r) \in \prod_{i=1}^{r} X_i$ s'écrit-il également $(\pi_1(x), \dots, \pi_r(x))$.

C11.46. Proposition (Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables) Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_r$ des ensembles dénombrables. L'ensemble $\prod_{i=1}^{r} X_i$ est dénombrable.

Démonstration

On raisonne par récurrence sur l'entier $r \geqslant 1$.
Initialisation à $r = 1$. Clair.
Hérédité. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Supposons que le produit cartésien de r ensembles dénombrables est dénombrable. Soient $X_1, \dots, X_r, X_{r+1}$ des ensembles dénombrables. Par hypothèse de récurrence, l'ensemble $\prod_{i=1}^{r} X_i$ est dénombrable. Il existe donc une bijection $f : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{r} X_i$. Comme X_{r+1} est dénombrable, il existe également une bijection $g : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} X_{r+1}$. Considérons les applications

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \prod_{i=1}^{r+1} X_i \\ (a,b) & \longmapsto & \big(\pi_1(f(a)), \dots, \pi_r(f(a)), g(b)\big) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \psi \left| \begin{array}{ccc} \prod_{i=1}^{r+1} X_i & \longrightarrow & \mathbb{N}^2 \\ (x_1, \dots, x_r, x_{r+1}) & \longmapsto & \big(f^{-1}(x_1, \dots, x_r), g^{-1}(x_{r+1})\big) \end{array} \right. .$$

Elles sont bien définies et vérifient $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\prod_{i=1}^{r+1} X_i}$ et $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{N}^2}$. L'application φ est donc bijective. Si $\theta : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}^2$ désigne une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^2$ (C11.44), alors $\varphi \circ \theta : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{r+1} X_i$ est une bijection (C11.1). Ainsi $\prod_{i=1}^{r+1} X_i$ est-il dénombrable.

C11.47. Exemple D'après C11.43 et C11.46, les ensembles $\mathbb{N}^3$, $\mathbb{Z}^{2022}$ et $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ sont dénombrables.

§ 3.5 Réunion d'ensembles dénombrables et dénombrabilité

C11.48. Proposition (Réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables) Soient I un ensemble fini ou dénombrable et $(X_i)_{i \in I}$ une famille de parties finies ou dénombrables d'un ensemble E. Alors l'ensemble

$$\bigcup_{i \in I} X_i := \{x \in E \ : \ \exists\, i \in I,\ x \in X_i\}$$

est un ensemble fini ou dénombrable.

Cette proposition est admise.

C11.49. Proposition ($\mathbb{Q}$ est dénombrable) L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Démonstration

- On peut écrire $\mathbb{Q}$ sous la forme $\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{N}^*} \left\{ \frac{p}{q} \ : \ p \in \mathbb{Z} \right\}$.
- L'ensemble $\mathbb{N}^*$ est dénombrable (partie infinie de $\mathbb{N}$).
- Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Posons $X_q := \left\{ \frac{p}{q} \ : \ p \in \mathbb{Z} \right\}$. L'application

$$f_q \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & X_q \\ p & \longmapsto & \frac{p}{q} \end{array} \right.$$

est bijective. Si $\theta : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ désigne une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$ (C11.43), alors $f_q \circ \theta : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} X_q$ est une bijection (C11.1). Ainsi X_q est-il dénombrable.
Des trois points précédents et de C11.48, on déduit que $\mathbb{Q}$ est fini ou dénombrable. Comme $\mathbb{Q}$ est infini, $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

§ 3.6 Quelques ensembles non dénombrables

C11.50. Exercice Démontrer que l'ensemble $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrables.

Indication : Raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe une bijection $f\colon \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathscr{P}(\mathbb{N})$. En considérant la partie $A = \{n \in \mathbb{N} \,:\, n \notin f(n)\}$, obtenir une contradiction.

C11.51. Théorème ($[0,1[$ n'est pas dénombrable) L'ensemble $[0,1[$ n'est pas dénombrable.

On renvoie au DM3 pour une démonstration.

C11.52. Corollaire ($\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable) L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Démonstration : On raisonne par l'absurde, en supposant qu'il existe une bijection $f\colon \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$. Nous en déduisons que l'application

$$g \left| \begin{array}{ccc} [0,1[& \longrightarrow & f([0,1[) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

est une bijection de $[0,1[$ sur $f([0,1[)$. Comme $f([0,1[)$ est une partie infinie de $\mathbb{N}$, elle est dénombrable. Il existe donc une bijection $h\colon \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} f([0,1[)$. Alors $g^{-1} \circ h\colon \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} [0,1[$ est une bijection (C11.1). Ainsi $[0,1[$ est-il dénombrable. Contradiction (C11.51).

C11.53. Exercice Démontrer que l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des nombres irrationnels n'est pas dénombrable.

Indication : Raisonner par l'absurde et remarquer que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

§ 4 Familles sommables de réels positifs ou nuls

§ 4.1 Définition et premiers exemples

C11.54. Définition (Famille sommable de nombres réels positifs ou nuls) Soient I un ensemble dénombrable et $(a_i)_{i\in I} \in \left(\mathbb{R}_{\geqslant 0}\right)^I$. On considère l'ensemble

$$\mathrm{SF}(a_i)_{i\in I} := \left\{ \sum_{j\in J} a_j \,:\, J \text{ partie finie de } I \right\} \subset \mathbb{R}_{\geqslant 0}$$

formée de toutes les sommes **finies** des éléments de la famille $(a_i)_{i\in I}$.

(a) La famille $(a_i)_{i\in I}$ est dite sommable si l'ensemble $\mathrm{SF}(a_i)_{i\in I}$ est majoré.

(b) Si la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable, sa somme est définie par :

$$\sum_{i\in I} a_i := \sup \mathrm{SF}(a_i)_{i\in I}\,.$$

Dans le cas contraire, on pose $\sum\limits_{i\in I} a_i := +\infty$.

C11.55. Exercice Démontrer que la famille $\left(\dfrac{1}{2^n 3^m}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.

Indication :

(a) Pour la sommabilité, commencer par justifier que pour toute partie J finie de $\mathbb{N}^2$, il existe deux entiers naturels n et m tels que $J \subset [\![0,n]\!] \times [\![0,m]\!]$ et en déduire que $\mathrm{SF}\left(\dfrac{1}{2^n 3^m}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est majorée par 3.

(b) Pour le calcul de la somme, commencer par justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2} \frac{1}{2^i 3^j} \leqslant \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{2^i 3^j} \leqslant 3\,.$$

C11.56. Exercice Démontrer que la famille $\left(\dfrac{2^n}{3^m}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ n'est pas sommable.

Indication | Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[\![0,n]\!] \times \{0\}$ est une partie finie de $\mathbb{N}^2$.

§ 4.2 Critère de sommabilité via une suite exhaustive : cas positif

Comme pour la convergence des séries, l'étude de la sommabilité d'une famille de réels positifs peut se ramener à l'étude de la convergence d'une suite dont les termes sont des sommes finies. Le résultat ci-dessous (C11.62) précise cette idée.

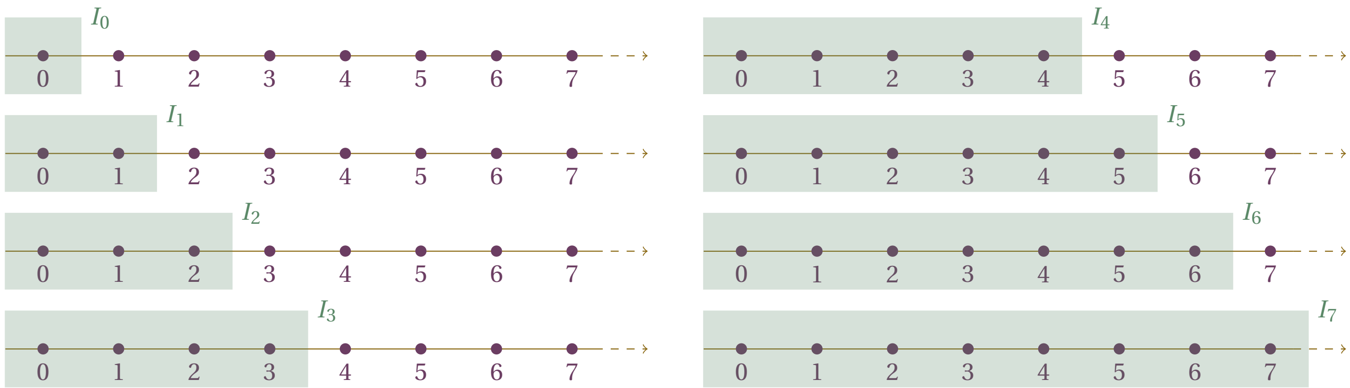
C11.57. Définition (Suite exhaustive de parties d'un ensemble dénombrable) Soit I un ensemble dénombrable. Une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de I est dite exhaustive si

(a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble I_n est fini ;

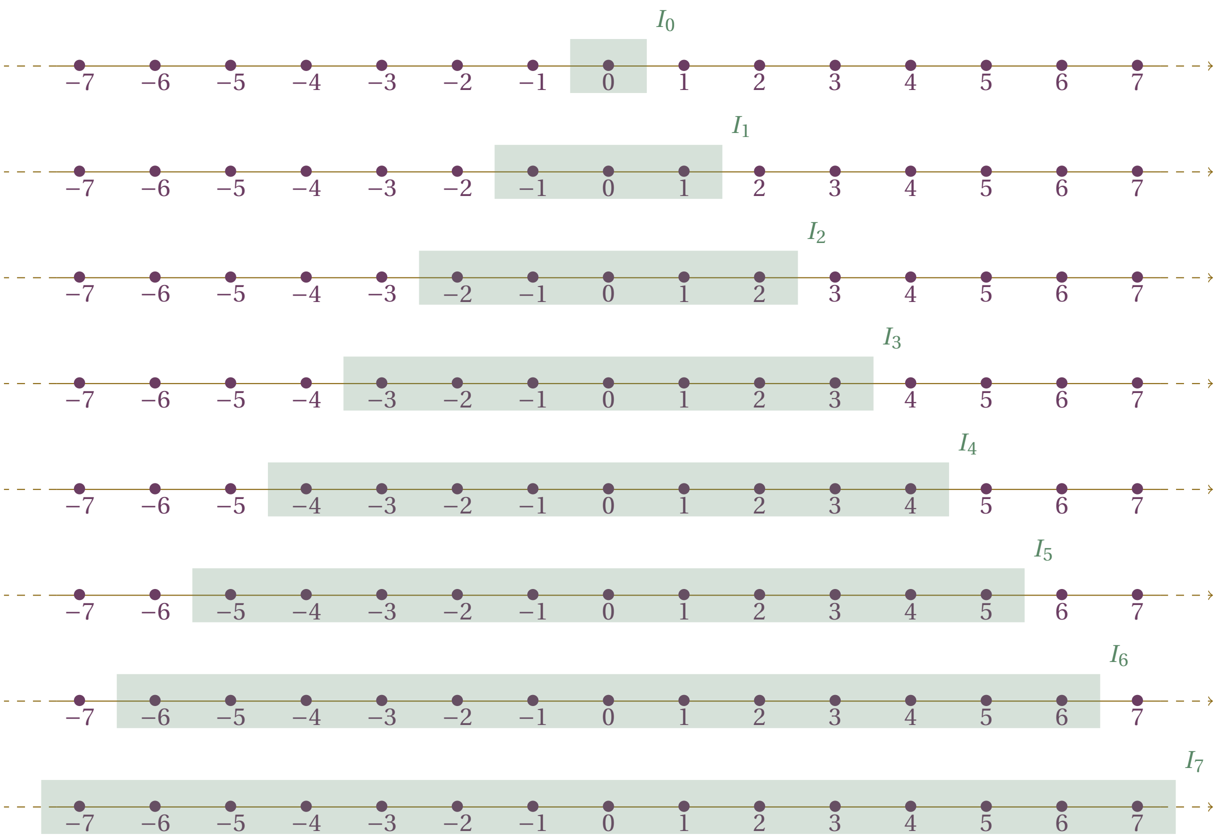
(b) la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion, i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \subset I_{n+1}$;

(c) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n = I$.

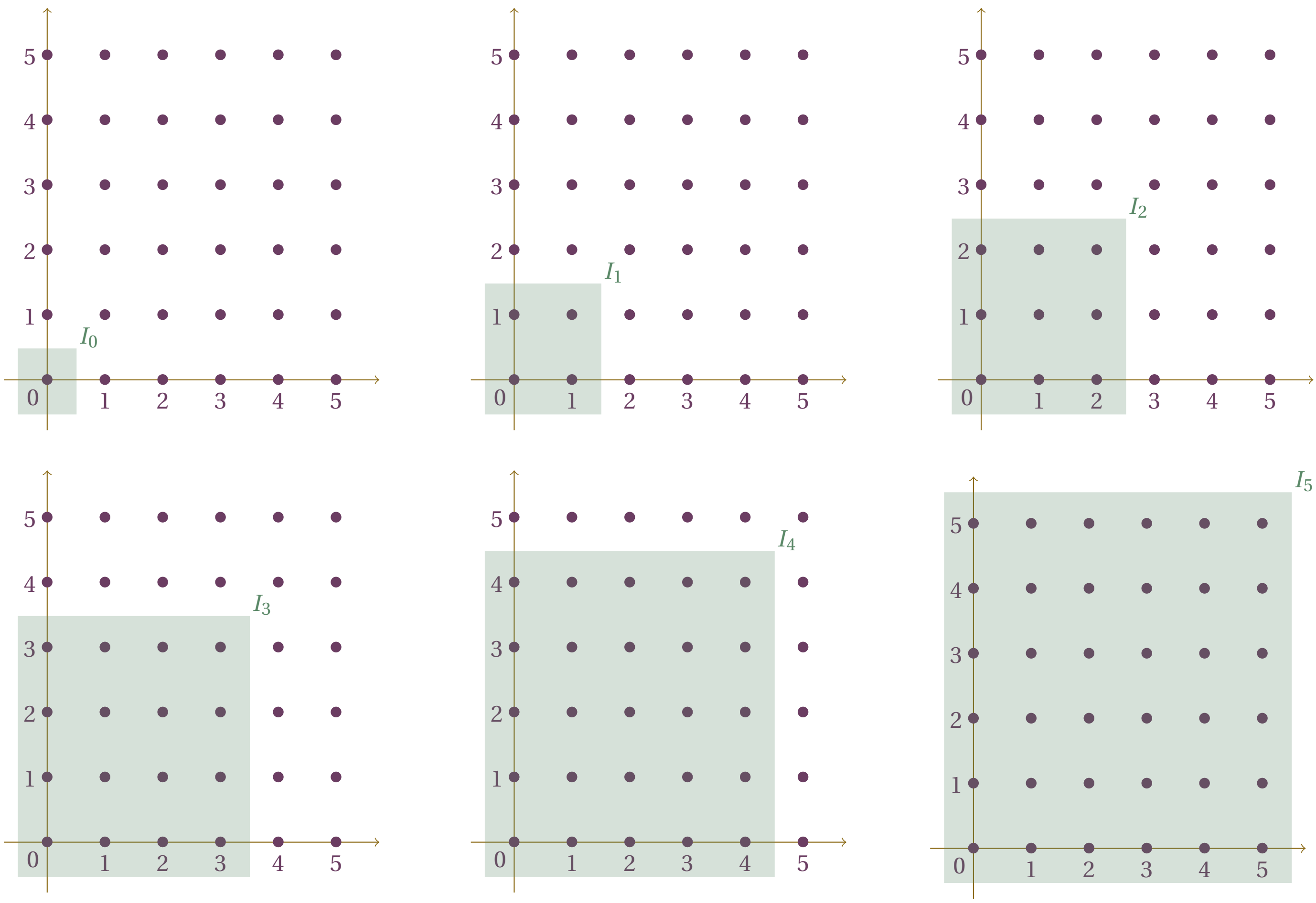
C11.58. Exemple (Suite exhaustive de parties de $\mathbb{N}$) La famille $(I_n := [\![0,n]\!])_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite exhaustive de parties de $\mathbb{N}$.



C11.59. Exemple (Suite exhaustive de parties de $\mathbb{Z}$) La famille $(I_n := [\![-n,n]\!])_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite exhaustive de parties de $\mathbb{Z}$.



C11.60. EXEMPLE (SUITE EXHAUSTIVE DE PARTIES DE $\mathbb{N}^2$) La famille $\left(I_n := [\![0,n]\!]^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite exhaustive de parties de $\mathbb{N}^2$.



C11.61. EXERCICE Soit I un ensemble dénombrable. Démontrer qu'il existe une suite exhaustive $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de I.

Indication

Comme I est dénombrable, il existe une bijection $f : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} I$. Utiliser f et la suite exhaustive $(I_n := [\![0,n]\!])_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de $\mathbb{N}$ pour construire une suite exhaustive $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de I

C11.62. THÉORÈME (CRITÈRE DE SOMMABILITÉ VIA UNE SUITE EXHAUSTIVE : CAS POSITIF) Soient I un ensemble dénombrable et $(a_i)_{i\in I} \in \left(\mathbb{R}_{\geqslant 0}\right)^I$. On suppose donnée une suite exhaustive $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de I.

(a) La famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si la suite $\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

(b) Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable alors $\sum_{i\in I} u_i = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in I_n} u_i$.

C11.63. EXERCICE Soient a et b des nombres réels strictement positifs.

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la famille $\left(\dfrac{1}{a^n b^m}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ soit sommable.

(b) Calculer $\displaystyle\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{a^n b^m}$.

Indication

On considère la suite $\left(I_n := [\![0,n]\!]^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ exhaustive de parties de $\mathbb{N}^2$ et on applique C11.62 en observant que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2} \frac{1}{a^i b^j} = \left(\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{a}\right)^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{b}\right)^j\right)$.

C11.64. EXERCICE Démontrer que la famille $\left(\dfrac{1}{n^2+m^2}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ n'est pas sommable.

Indication

On considère la suite $\left(I_n := [\![1,n]\!]^2\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ exhaustive de parties de $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$. D'après C11.62, il faut démontrer que la suite $\left(u_n := \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \frac{1}{i^2+j^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est non majorée, ce qui revient à prouver qu'elle diverge puisqu'elle est croissante.

D'après les résultats sur les séries télescopiques, nous sommes ramenés à démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_{n+1}-u_n$ diverge. On observe que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

$$u_{n+1}-u_n = \sum_{(i,j)\in[\![1,n+1]\!]^2} \frac{1}{i^2+j^2} - \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \frac{1}{i^2+j^2} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i^2+(n+1)^2} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(n+1)^2+j^2} = \frac{1}{4(n+1)^2} + 2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2+(n+1)^2}.$$

Comme, pour tout $(a,b)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$, $a^2+b^2\leqslant(a+b)^2$, nous en déduisons que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

$$u_{n+1}-u_n \geqslant \frac{1}{4(n+1)^2} + 2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i+n+1)^2} = \frac{1}{4(n+1)^2} + 2\sum_{i=n+2}^{2n+1} \frac{1}{i^2}.$$

À l'aide d'une comparaison série-intégrale, on détermine un équivalent de $\sum_{i=n+2}^{2n+1} \frac{1}{i^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$ ...

Remarque. Une autre solution peut être apportée à l'aide du théorème de sommation par paquets pour les familles de réels positions C11.72.

Pour une famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs ou nuls, le lien entre la sommabilité de la famille et la convergence de la série $\sum u_n$ est ténu. En cas de sommabilité de la famille (ou de convergence de la série), somme de la famille et somme de la série coïncident. Ces liens sont rassemblés dans la proposition suivante.

C11.65. Proposition (Lien fondamental avec les séries pour $I=\mathbb{N}$: cas positif) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\left(\mathbb{R}_{\geqslant 0}\right)^{\mathbb{N}}$.

(a) La famille $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum a_n$ est convergente.

(b) Si la famille $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

C11.66. Exemple D'après C11.65, la famille $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable et sa somme est donnée par $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

§ 4.3 Sommabilité d'une sous-famille et lemme de domination

C11.67. Proposition (Sommabilité d'une sous-famille d'une famille de réels positifs ou nuls) Soient I un ensemble dénombrable, $(a_i)_{i\in I}\in\left(\mathbb{R}_{\geqslant 0}\right)^I$ et J une partie infinie de I. Si la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable alors la sous-famille $\left(a_j\right)_{j\in J}$ est également sommable et $\sum_{j\in J} a_j \leq \sum_{i\in I} a_i$.

C11.68. Lemme (de domination pour une famille de réels positifs ou nuls) Soient I un ensemble dénombrable, $(a_i)_{i\in I}\in\left(\mathbb{R}_{\geqslant 0}\right)^I$ et $(b_i)_{i\in I}\in\left(\mathbb{R}_{\geqslant 0}\right)^I$ deux familles telles que, pour tout $i\in I$, $a_i\leqslant b_i$.

(a) Si la famille $(b_i)_{i\in I}\in\left(\mathbb{R}_{\geqslant 0}\right)^I$ est sommable alors la famille $(a_i)_{i\in I}\in\left(\mathbb{R}_{\geqslant 0}\right)^I$ est sommable.

(b) Si la famille $(a_i)_{i\in I}\in\left(\mathbb{R}_{\geqslant 0}\right)^I$ est non sommable alors la famille $(b_i)_{i\in I}\in\left(\mathbb{R}_{\geqslant 0}\right)^I$ est non sommable.

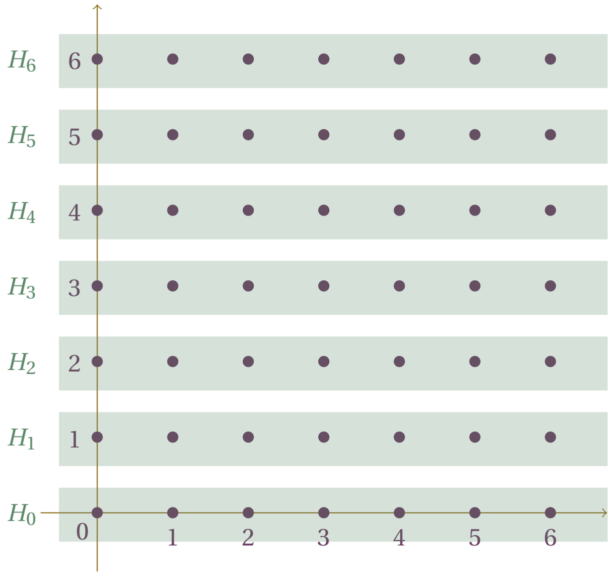
§ 5 Théorème de sommation par paquets : cas positif

C11.69. Définition (Partition d'un ensemble) Soient E un ensemble et $(E_i)_{i\in I}$ une famille de parties non vides de E. On dit que $(E_i)_{i\in I}$ est une partition de E si

(a) $\bigcup_{i\in I} E_i = E$,

(b) les ensemble E_i, où $i\in I$, sont deux à deux disjoints, i.e. pour tout $(i,j)\in I^2$, $i\neq j \Longrightarrow E_i\cap E_j=\emptyset$.

C11.70. Exemples fondamentaux de partitions

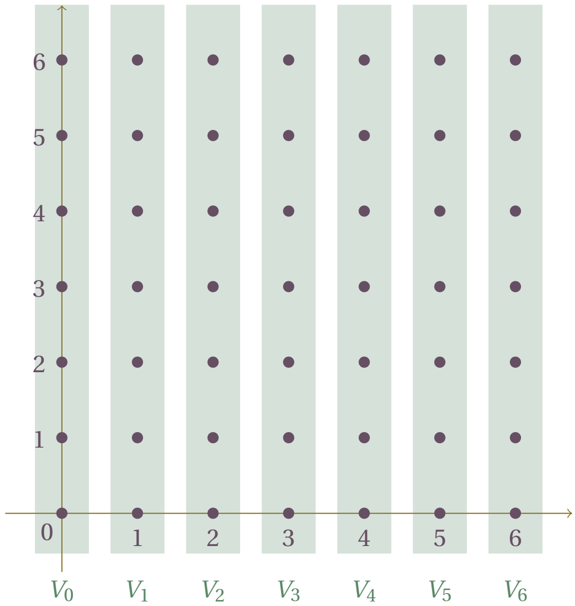


Partition horizontale de $\mathbb{N}^2$

Si on pose, pour tout $j \in \mathbb{N}$

$$H_j := \left\{(i, j) \ : \ i \in \mathbb{N}\right\}$$

alors $\left(H_j\right)_{j \in \mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{N}^2$, appelée partition horizontale de $\mathbb{N}^2$.

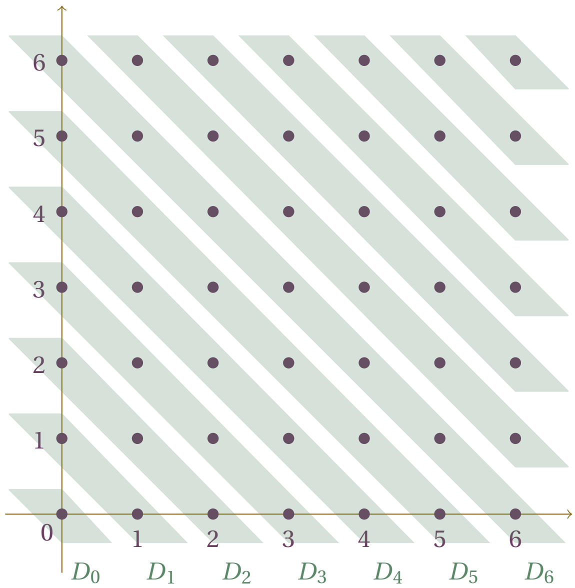


Partition verticale de $\mathbb{N}^2$

Si on pose, pour tout $i \in \mathbb{N}$

$$V_i := \left\{(i, j) \ : \ j \in \mathbb{N}\right\}$$

alors $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{N}^2$, appelée partition verticale de $\mathbb{N}^2$.



Partition diagonale de $\mathbb{N}^2$

Si on pose, pour tout $s \in \mathbb{N}$

$$D_s := \{(i, s-i) \ : \ i \in [\![0, s]\!]\}$$

alors $(D_s)_{s \in \mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{N}^2$, appelée partition diagonale de $\mathbb{N}^2$. Remarquons que, pour tout $s \in \mathbb{N}$, l'ensemble D_s est fini de cardinal $s+1$.

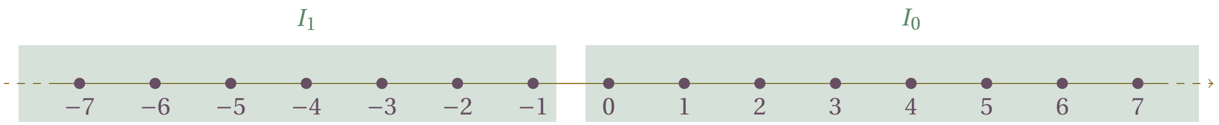
C11.71. Remarque Si E est un ensemble au plus dénombrable et si $(E_i)_{i \in I}$ est une partition de E, alors E_i est au plus dénombrable, pour tout $i \in I$. En effet, une partie d'un ensemble au plus dénombrable est au plus dénombrable.

C11.72. Théorème (Sommation par paquets : cas positif) Soit I un ensemble dénombrable, $(a_i)_{i\in I} \in (\mathbb{R}_{\geqslant})^I$ et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de I.

$$\text{la famille } (a_i)_{i\in I} \text{ est sommable} \iff \begin{cases} \text{(a)} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}, \text{ la famille } (a_i)_{i\in I_n} \text{ est sommable} \\ \text{(b)} \quad \text{la série } \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{i\in I_n} a_i \right) \text{ est convergente} \end{cases}$$

De plus, si la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable alors $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i\in I_n} a_i$.

C11.73. Exemple (Sommabilité d'une famille de réels positifs indexée par $\mathbb{Z}$) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in (\mathbb{R}_{\geqslant})^{\mathbb{Z}}$. Équippons $\mathbb{Z}$ de la partition $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{Z}$ définie par $I_0 = \mathbb{N}$, $I_1 := \{-n \,:\, n\in\mathbb{N}^*\}$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}_{\geq 2}$, $I_n = \emptyset$.



D'après C11.72, la famille $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable si et seulement si les familles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{-n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont sommables. En utilisant C11.65, on en déduit que la famille $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable si et seulement si les séries $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} a_{-n}$ convergent. De plus, si la famille $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$.

C11.74. Exercice Soit q un réel strictement positif. La famille $\left(\frac{1}{q^n}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est-elle sommable ?

Indication — Appliquer le théorème de sommation par paquets pour les familles de réels positifs comme exposé en C11.73.

C11.75. Exercice Considérons l'ensemble $I_1 = \{2n+1 \,:\, n\in\mathbb{N}\}$ des entiers naturels impairs. Démontrer que la famille $\left(\frac{1}{i^2}\right)_{i\in I_1}$ est sommable et calculer sa somme.

Indication — Soit $I_0 = \{2n \,:\, n\in\mathbb{N}^*\}$ l'ensemble des entiers naturels pairs non nuls. Appliquer le théorème de sommation par paquets pour les familles de réels positifs à la famille $\left(\frac{1}{i^2}\right)_{i\in\mathbb{N}^*}$ en choisissant $I_0, I_1, \emptyset, \dots, \emptyset, \dots$ comme partition pour $\mathbb{N}^*$.

C11.76. Exercice Montrer que la famille $\left(\frac{1}{(n+m)^3}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ est sommable.

Indication — Appliquer le théorème de sommation par paquets pour les familles de réels positifs à la famille $\left(\frac{1}{(n+m)^3}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ en choisissant la partition diagonale de $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$.

C11.77. Exercice Soit α un réel strictement positif.

(a) Pour quelles valeurs de α la famille $\left(\frac{1}{(n+m)^\alpha}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ est-elle sommable ?

(b) Pour quelles valeurs de α la famille $\left(\frac{1}{n^\alpha + m^\alpha}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ est-elle sommable ?

Indication —
(a) Appliquer le théorème de sommation par paquets pour les familles de réels positifs à la famille $\left(\frac{1}{(n+m)^\alpha}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ en choisissant la partition diagonale de $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$.
(b) Distinquer deux cas : $\alpha \leqslant 2$ et $\alpha > 2$.
- Cas $\alpha \leqslant 2$. Justifier que, pour tout $(n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$, $n^\alpha + m^\alpha \leqslant n^2 + m^2 \leqslant (n+m)^2$ et s'appuyer sur (a).
- Cas $\alpha > 2$. Justifier que, pour tout $(n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$, $(n+m)^\alpha \leqslant 2^{\alpha-1}(n^\alpha + m^\alpha)$ et s'appuyer sur (a).

§ 6 Familles sommables de nombres complexes

§ 6.1 Définition et premiers exemples

C11.78. Définition (Famille sommable de nombres complexes) Soient I un ensemble dénombrable, $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$. La famille $(a_i)_{i\in I}$ est dite sommable si la famille de réels positifs ou nuls $(|a_i|)_{i\in I} \in \left(\mathbb{R}_{\geqslant 0}\right)^I$ est sommable.

C11.79. Méthode Pour étudier la sommabilité d'une famille de nombres complexes, on pourra appliquer les outils développés pour les familles de nombres réels positifs (e.g. critère de sommabilité via une suite exhaustive dans le cas positif C11.62), lemme de domination C11.68, théorème de sommation par paquets dans le cas positif C11.72) à la famille des modules.

Pour définir la somme d'une famille sommable de nombres complexes, il nous faut quelques résultats préparatoires. Commençons par étudier le cas d'une famille sommable de nombres réels.

C11.80. Notation Soit $x \in \mathbb{R}$. On note

$$x^+ := \max(0,x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad x^- := \min(0,x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 0\,. \end{cases}$$

Ainsi $x^+ \geqslant 0$, $-x^- \geqslant 0$, $x = x^+ - (-x^-)$ et $|x| = x^+ - x^-$.

C11.81. Proposition (Caractérisation des familles sommables de réels) Soient I un ensemble dénombrable et $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$. La famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si les familles $\left(a_i^+\right)_{i\in I} \in \left(\mathbb{R}_{\geqslant 0}\right)^I$ et $\left(-a_i^-\right)_{i\in I} \in \left(\mathbb{R}_{\geqslant 0}\right)^I$ le sont.

C11.82. Définition (Somme d'une famille sommable de réels) Soient I un ensemble dénombrable et $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$ une famille sommable. On appelle somme de la famille $(a_i)_{i\in I}$ le nombre réel $\sum_{i\in I} a_i$ défini par

$$\sum_{i\in I} a_i := \sum_{i\in I} a_i^+ - \sum_{i\in I} -a_i^-\,.$$

C11.83. Proposition (Famille de nombres réels indexée par $\mathbb{N}$ et séries) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(a) La famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est absolument convergente.

(b) Si la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

C11.84. Exemple D'après C11.83, la famille $\left(\dfrac{\sin(n)}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable, alors que la famille $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne l'est pas.

C11.85. Proposition (Caractérisation des familles sommables de complexes) Soient I un ensemble dénombrable et $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$. La famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si les familles $(\mathrm{Re}(a_i))_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$ et $(\mathrm{Im}(a_i))_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$ le sont.

C11.86. Définition (Somme d'une famille sommable de complexes) Soient I un ensemble dénombrable et $(a_j)_{j\in I} \in \mathbb{C}^I$ une famille sommable. On appelle somme de la famille $(a_j)_{j\in I}$ le nombre complexe $\sum_{j\in I} a_j$ défini par

$$\sum_{j\in I} u_j := \sum_{j\in I} \mathrm{Re}(a_j) + i \sum_{j\in I} \mathrm{Im}(a_j) := \sum_{j\in I} \mathrm{Re}(a_j)^+ - \sum_{j\in I} -\mathrm{Re}(a_j)^- + i \left(\sum_{j\in I} \mathrm{Im}(a_j)^+ - \sum_{j\in I} -\mathrm{Im}(a_j)^- \right).$$

C11.87. Proposition (Famille de nombres complexes indexée par $\mathbb{N}$ et séries) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

(a) La famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est absolument convergente.

(b) Si la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

C11.88. Exercice Déterminer l'ensemble des nombres complexes s tels que la famille $\left(\frac{1}{n^s}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable.

Indication: Commencer par établir que, pour tout $s \in \mathbb{C}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|n^s| = n^{\mathrm{Re}(s)}$.

§ 6.2 Sommabilité d'une sous-famille de complexes

C11.89. Proposition (Sommabilité d'une sous-famille d'une famille de nombres complexes) Soient I un ensemble dénombrable, $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ et J une partie infinie de I. Si la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable alors la sous-famille $\left(a_j\right)_{j\in J}$ est également sommable.

C11.90. Exercice

(a) La famille $\left(\frac{1}{n^2+m^2}\right)_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}}$ est-elle sommable ?

(b) La famille $\left(\frac{1}{i^2+j^2+k^2}\right)_{(i,j,k)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ est-elle sommable ?

Indication: Nous avons établi que la famille $\left(\frac{1}{n^2+m^2}\right)_{(n,m)\in^*\times\mathbb{N}^*}$ n'est pas sommable (C11.64). En déduire qu'aucune des familles introduites en (a) et (b) n'est sommable en appliquant C11.89.

§ 6.3 Calcul pratique de la somme d'une famille sommable de complexe via une suite exhaustive

C11.91. Théorème (Calcul pratique de la somme d'une famille sommable de complexes) Soient I un ensemble dénombrable, $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de parties de I et $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ une famille sommable. La suite $\left(\sum_{i\in I_n} a_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\sum_{i\in I} a_i = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in I_n} a_i$.

§ 6.4 Familles sommables de complexes et linéarité

C11.92. Proposition ($\ell^1(I,\mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^I$) Soit I un ensemble dénombrable. On introduit l'ensemble $\ell^1(I,\mathbb{C})$ formé de toutes les familles sommables de complexes indexées par I :

$$\ell^1(I,\mathbb{C}) := \left\{(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I \ : \ \text{la famille } (a_i)_{i\in I} \text{ est sommable}\right\}.$$

$\ell^1(I,\mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^I$.

C11.93. Proposition (Linéarité de la somme pour une famille sommable de complexes) Soit I un ensemble dénombrable. L'application

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \ell^1(I,\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (a_i)_{i\in I} & \longmapsto & \sum_{i\in I} a_i \end{array} \right.$$

est une forme linéaire.

C11.94. EXERCICE Soit I un ensemble dénombrable. On pose

$$\ell^2(I,\mathbb{R}) := \left\{(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I \ :\ \text{la famille } \left(a_i^2\right)_{i\in I} \text{ est sommable}\right\}.$$

(a) Soient $(a_i)_{i\in I} \in \ell^2(I,\mathbb{R})$ et $(a_i)_{i\in I} \in \ell^2(I,\mathbb{R})$. Démontrer : $(a_i\, b_i)_{i\in I} \in \ell^1(I,\mathbb{R})$.
(b) Démontrer que $\ell^2(I,\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^I$.
(c) Soient

$$\langle\cdot,\cdot\rangle \left| \begin{array}{ccc} \ell^2(I,\mathbb{R})\times\ell^2(I,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ ((a_i)_{i\in I},(b_i)_{i\in I}) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i\in I} a_i\, b_i\,. \end{array}\right.$$

Démontrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\ell^2(I,\mathbb{R})$.

Indication

(a) Commencer par justifier que, pour tout $i \in I$, $2|a_i b_i| \leqslant a_i^2 + b_i^2$.
(b) Pour démontrer la stabilité par combinaison linéaire de $\ell^2(I,\mathbb{R})$, utiliser (a).
(c) Vérifier les quatre axiomes d'un produit scalaire. Pour la caractère bilinéaire (ou linéaire à gauche/droite), s'aider de C11.93. Pour la séparation, on pourra remarquer que la famille $\left(a_i^2\right)_{i\in I}$ est une famille de réels positifs et appliquer C11.67 pour établir que, pour tout $i_0 \in I$, $a_{i_0}^2 \leqslant \sum_{i\in I} a_i^2$.

§ 7 Théorème de sommation par paquets : cas complexe

C11.95. THÉORÈME (SOMMATION PAR PAQUETS : CAS COMPLEXE) Soient I un ensemble dénombrable, $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de I, $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ une famille **sommable**. La série $\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{i\in I_n} a_i\right)$ est convergente et $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{i\in I_n} a_i$.

Ce théorème est admis.

C11.96. MÉTHODE CLÉ On conserve les notations du théorème C11.95. Pour démontrer la sommabilité de la famille $(a_i)_{i\in I}$, on pourra appliquer le théorème C11.72 portant sur la sommabilité des familles de réels positifs ou nuls.

§ 8 Le théorème de convergence commutative

C11.97. PROBLÉMATIQUE On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes. On souhaite étudier si la modification de l'ordre des termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ affecte la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum a_n$, voire la valeur de sa somme. Plus formellement, si $\sigma : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$ est une permutation de $\mathbb{N}$, on s'intéresse aux deux questions suivantes

(Q1) Les séries $\sum a_n$ et $\sum a_{\sigma(n)}$ ont-elles même nature ?
(Q2) Si les deux séries $\sum a_n$ et $\sum a_{\sigma(n)}$ convergent, leurs sommes $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)}$ sont-elles égales ?

C11.98. EXERCICE Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{R}_{\geqslant 0}\right)^{\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente. Soit $\sigma : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$ une bijection.

(a) Démontrer que la série $\sum_{n\geq 0} a_{\sigma(n)}$ est absolument convergente.
(b) Démontrer : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)}$.

Indication

On prend appui sur C11.65, que l'on peut appliquer car les deux familles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{R}_{\geqslant 0}\right)^{\mathbb{N}}$ et $(a_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{R}_{\geqslant 0}\right)^{\mathbb{N}}$ sont des familles de réels positifs. On peut ainsi reformuler (a) et (b) dans le langage des familles sommables.
(a') La famille $\left(a_{\sigma(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle sommable ?
(b') Les deux bornes supérieures $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\sigma(n)}$ sont-elles égales ?

(a') Considérer une partie finie non vide J de $\mathbb{N}$ et effectuer un changement d'indice dans la somme $\sum_{j\in J} a_{\sigma(j)}$ pour établir avec soin $\sum_{j\in J} a_{\sigma(j)} \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$.
(b') Déduire de l'étude faite en (a') que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\sigma(n)} \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Cette inégalité ayant été obtenue pour une série convergente de réels positifs quelconque et une permutation de $\mathbb{N}$ quelconque, on peut la spécialiser à une autre situation pour obtenir l'inégalité inverse.

C11.99. Théorème (Convergence commutative) Soient I un ensemble dénombrable, $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ une famille sommable et $\sigma \colon I \xrightarrow{\sim} I$ une bijection. La famille $(a_{\sigma(i)})_{i\in I}$ est sommable et $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} a_{\sigma(i)}$.

Ce théorème est admis.

C11.100. Remarque L'hypothèse de sommabilité dans le théorème de convergence commutative C11.99 est essentielle, comme le montre l'exercice suivant.

C11.101. Exercice (Modification de l'ordre des termes de la série harmonique alternée) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n := \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. On obtient ainsi une suite de nombres

$$1\,,\,-\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{3}\,,\,-\frac{1}{4}\,,\,\frac{1}{5}\,,\,-\frac{1}{6}\,,\,\frac{1}{7}\,,\,-\frac{1}{8}\,,\,\frac{1}{9}\,,\,-\frac{1}{10}\,,\,\frac{1}{11}\,,\,-\frac{1}{12}\,,\,\frac{1}{13}\,,\,-\frac{1}{14}\,,\,\frac{1}{15}\,,\,-\frac{1}{16}\,,\,\frac{1}{17}\,,\,-\frac{1}{18}\,,\,\dots$$

(a) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Démontrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ (constante d'Euler) tel que $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}$ à l'aide de H_n et H_{2n+1}.

(c) En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge et calculer sa somme $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

(d) On réordonne les termes de la série $\sum u_n$, en prenant tour à tour 1 terme positifs et 2 termes négatifs :

$$1\,,\,-\frac{1}{2}\,,\,-\frac{1}{4}\,,\,\frac{1}{3}\,,\,-\frac{1}{6}\,,\,-\frac{1}{8}\,,\,\frac{1}{5}\,,\,-\frac{1}{10}\,,\,-\frac{1}{12}\,,\,\frac{1}{7}\,,\,-\frac{1}{14}\,,\,-\frac{1}{16}\,,\,\frac{1}{9}\,,\,-\frac{1}{18}\,,\,-\frac{1}{20}\,,\,\frac{1}{11}\,,\,-\frac{1}{22}\,,\,-\frac{1}{24}\,,\,\frac{1}{13}\,,\,\dots$$

Formellement, si l'on pose

$$\sigma \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} 4k & \text{si } n = 3k \text{ où } k \in \mathbb{N}^* \\ 2k+1 & \text{si } n = 3k+1 \text{ où } k \in \mathbb{N} \\ 4k+2 & \text{si } n = 3k+2 \text{ où } k \in \mathbb{N} \end{cases} \end{array} \right.$$

alors σ est une permutation de $\mathbb{N}^*$ et la nouvelle suite introduite s'écrit $(a_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$. Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} a_{\sigma(n)}$ converge et calculer sa somme $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)}$. On pourra s'appuyer sur (a) et (b) et adapter la méthode appliquée pour démontrer (c).

Indication

(a) Démontrer que la suite $(u_n := H_n - \ln(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée grâce à la concavité de ln sur $\mathbb{R}_{>0}$ et à une comparaison série-intégrale.
(b) Décomposer la somme H_{2n+1} suivant ses termes d'indices pairs et impairs.
(c) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n := \sum_{k=1}^{k} a_k$. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les sommes S_{2n} et S_{2n+1}, en décomposant ces deux sommes suivant leurs termes d'indices pairs et impairs, pour en déduire qu'elles convergent toutes deux.
(d) On procède en deux étapes, en s'appuyant sur le fait que la permutation σ est définie par morceaux, suivant la classe d'équivalence d'un entier naturel modulo 3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n := \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On observe que

$$T_{3n} = \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(3k)} + \sum_{k=1}^{n-1} a_{\sigma(3k+1)} + \sum_{k=1}^{n-1} a_{\sigma(3k+2)}\,.$$

  Exprimer chacune des trois sommes du membre de droite en fonction de H_n, H_{n-1} et H_{2n-1} (cf. (b)) pour en déduire que la suite $(T_{3n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une valeur que l'on précisera (cf. (a)).
- Démontrer que $T_n - T_{3\lfloor n/3\rfloor} \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$, puis conclure.

§ 9 Le théorème de Fubini

C11.102. Definition (Suite double) Une suite double est une famille $\left(a_{n,m}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^2}$.

C11.103. Théorème (Fubini) Soit $\left(a_{n,m}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ une suite double de complexes.

(a) **Critère de sommabilité en fixant d'abord la première composante.** La famille $\left(a_{n,m}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si :

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{m\geq 0} |a_{n,m}|$ converge

(ii) la série $\sum\limits_{n\geq 0}\left(\sum\limits_{m=0}^{+\infty} |a_{n,m}|\right)$ converge.

(b) **Critère de sommabilité en fixant d'abord la deuxième composante.** La famille $\left(a_{n,m}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si :

(i) pour tout $m \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} |a_{n,m}|$ converge

(ii) la série $\sum\limits_{m\geq 0}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_{n,m}|\right)$ converge.

(c) **Résultats sur la somme ou échange des deux symboles $\sum$.** Supposons la famille $\left(a_{n,m}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. Alors :

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} a_{n,m} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} a_{n,m} = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,m}.$$

C11.104. Exercice Soient $a > 1$ et $b > 1$. Démontrer que la famille $\left(\dfrac{1}{a^n + b^m}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

Indication

Il ne parait pas aisé d'appliquer directement le théorème de Fubini C11.103 à la suite double proposée. On introduit une suite double dominante, à laquelle on peut efficacement appliquer le théorème susmentionné.

- Justifier que pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, $2\sqrt{a}^n\sqrt{b}^m \leqslant a^n + b^m$.
- Démontrer que la famille $\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}^n\sqrt{b}^m}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable, en vérifiant un des deux critères (a) ou (b) de C11.103.

C11.105. Exercice Pour tout entier $p \geq 2$, posons $\zeta(p) := \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^p}$. Démontrer que la série $\sum\limits_{p\geqslant 2}\left(\zeta(p)-1\right)$ converge et calculer sa somme.

Indication

La série à étudier s'écrit $\sum\limits_{p\geqslant 2}\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{n^p}$, de sorte qu'apparaît naturellement la suite double $\left(\dfrac{1}{n^p}\right)_{(p,n)\in\mathbb{N}_{\geqslant 2}\times\mathbb{N}_{\geqslant 2}}$. Le théorème de Fubini C11.103 offre la souplesse d'échanger l'ordre des sommations en les variables p et n pour la démonstration de la sommabilité, mais également pour le calcul de la somme ensuite.

(a) On fixe $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. On établit la convergence de la série $\sum\limits_{p\geqslant 2}\dfrac{1}{n^p}$ et on calcule sa somme.

(b) Pour achever la démonstration de la sommabilité de la famille $\left(\dfrac{1}{n^p}\right)_{(p,n)\in\mathbb{N}_{\geqslant 2}\times\mathbb{N}_{\geqslant 2}}$, on démontre que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2}\sum\limits_{p=2}^{+\infty}\dfrac{1}{n^p}$ converge.

(c) La sommabilité de la famille $\left(\dfrac{1}{n^p}\right)_{(p,n)\in\mathbb{N}_{\geqslant 2}\times\mathbb{N}_{\geqslant 2}}$ étant acquise, le théorème de Fubini C11.103 livre

$$\sum_{p=2}^{+\infty}\left(\zeta(p)-1\right) = \sum_{p=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^p} = \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{1}{n^p}.$$

On sait calculer la dernière double somme écrite...

C11.106. EXERCICE Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$. Démontrer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{1-a^{2n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^{2n-1}}{1-a^{2n-1}}$ en justifiant l'existence de ces deux sommes en cours d'étude.

Indication Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|a^{2n}\right| < 1$, $\displaystyle\frac{a^n}{1-a^{2n}} = \sum_{m=0}^{+\infty} a^{n(2m+1)}$. Ainsi apparaît naturellement la suite double $\left(a^{n(2m+1)}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}}$. Lui appliquer avec soin le théorème de Fubini C11.103.

C11.107. EXERCICE (IMPORTANCE DE L'HYPOTHÈSE DE SOMMABILITÉ DANS LE THÉORÈME DE FUBINI) Démontrer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq n}}^{+\infty} \frac{1}{n^2-m^2} \neq \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq m}}^{+\infty} \frac{1}{n^2-m^2}$$

après avoir justifié de l'existence de toutes les quantités en jeu.

Indication Pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $n \neq m$, décomposer $\displaystyle\frac{1}{n^2-m^2} = \frac{1}{(n-m)(n+m)}$ « en éléments simples ». Traiter alors chacune des quatre séries avec soin, en faisant usage de changements d'indices et de télescopages.

§ 10 PRODUIT DE CAUCHY

C11.108. DÉFINITION (PRODUIT DE CAUCHY) Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ des séries de complexes. La série $\sum_{n\geqslant 0} c_n$ de terme général défini par, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

est appelé produit de Cauchy des séries $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n$.

C11.109. THÉORÈME (PRODUIT DES SOMMES DE DEUX SÉRIES ABSOLUMENT CONVERGENTES) Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ des séries de complexes absolument convergentes. Leur produit de Cauchy $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ est une série absolument convergente et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

C11.110. EXERCICE (RELATION FONCTIONNELLE DE L'EXPONENTIELLE)

(a) Soit $z \in \mathbb{C}$. Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente. La somme de cette série est, par définition, e^z.

(b) Démontrer que pour tout $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $e^{z_1} \times e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.

Indication
(a) Le cas $z = 0$ est clair. Appliquer le critère de d'Alembert pour établir la convergence absolue de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ dans le cas où $z \in \mathbb{C}^*$.
(b) Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Considérer le produit de Cauchy des deux séries $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{z_1^n}{n!}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{z_2^n}{n!}$ qui sont absolument convergentes, cf. C11.109.

C11.111. EXERCICE Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ une série absolument convergente de complexes. Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{n} 2^k a_k\right)$ converge et a pour somme $\displaystyle 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Indication

En remarquant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2^n}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k a_k\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{n-k} a_k$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{n} 2^k a_k\right)$ apparaît naturellement comme le produit de Cauchy de deux séries...

C11.112. Exercice (Importance de l'hypothèse d'absolue convergence dans le théorème précédent) Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge et étudier la convergence son produit de Cauchy avec elle-même.

Indication

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{(n-k)k}}$ peut s'écrire $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ pour une fonction $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ continue sur $]0,1[$.

(ii) Comme $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x$ est une intégrale impropre convergente, le théorème sur les sommes de Riemann de MPSI ne peut s'appliquer. En observant que la fonction f est décroissante sur $\left]0,\frac{1}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{1}{2},0\right[$, on reprend la démonstration donnée en MPSI pour les sommes de Riemann « dans le cas continue croissant » et on l'adapte pour démontrer

$$\frac{1}{n}\sum_{1\leqslant k\leqslant n/2} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{1/2} f(x)\, \mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{n}\sum_{n/2<k\leqslant n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{1/2}^{1} f(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

(iii) On assemble les résultats précédents pour conclure avec soin que le produit de Cauchy de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ avec elle-même est une série grossièrement divergente.

§ 11 UNE SÉLECTION D'EXERCICES

C11.113. EXERCICE La famille $\left(\dfrac{1}{r^2}\right)_{r\in\mathbb{Q}_{\geqslant 1}}$ est-elle sommable ?

C11.114. EXERCICE Soient $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. Pour tout $(n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$, posons $u_{n,m}=\dfrac{1}{n^\alpha}\dfrac{1}{m^\beta}$. Pour quelles valeurs de α et β la famille $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ est-elle sommable ?

C11.115. EXERCICE Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. On s'intéresse à la sommabilité de la famille $\left(\dfrac{1}{(n+m)^\alpha}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$.

1. Soit $p\geq 2$. Déterminer le cardinal de l'ensemble $I_p=\left\{(n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\ :\ n+m=p\right\}$. En déduire que $\displaystyle\sum_{n+m=p}\frac{1}{(n+m)^\alpha}=\frac{p-1}{p^\alpha}$.
2. A l'aide du théorème de sommation par paquets, montrer que la famille $\left(\dfrac{1}{(n+m)^\alpha}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ est sommable si et seulement si $\alpha>2$.

C11.116. EXERCICE

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(n-1)}$ converge et calculer sa somme.
2. Pour tout couple $(n,m)\in\mathbb{N}^2$, notons :
$$u_{n,m}=\left|\begin{array}{ll}\dfrac{1}{n!} & \text{si } n\geq m+1\\[2ex] 0 & \text{si } n\leq m\end{array}\right.$$
   (a) Soit $m\in\mathbb{N}$. Montrer que pour tout $n\geq m+2$, $\displaystyle\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k!}\leq\frac{1}{m!}\left(1+\sum_{k=m+2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}\right)$.
   (b) En déduire que pour tout $m\in\mathbb{N}$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}u_{n,m}$ converge, et que sa somme est majorée par $\dfrac{2}{m!}$.
3. Montrer que la série de terme général $\displaystyle\sum_{n=m+1}^{+\infty}\frac{1}{n!}$ converge, puis que $\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=m+1}^{+\infty}\frac{1}{n!}=e$.

C11.117. EXERCICE Soit I un ensemble dénombrable. Pour tout $p\geq 1$, nous notons $\ell^p(I,\mathbb{C})$ l'ensemble des familles de complexes dont la puissance p-ième est sommable :
$$\ell^p(I,\mathbb{C}):=\left\{(u_i)_{i\in I}\in\mathbb{C}^I\ :\ \text{la famille }\left(|u_i|^p\right)_{i\in I}\text{ est sommable}\right\}.$$

1. Soient $(u_i)_{i\in I}$, $(v_i)_{i\in I}\in\ell^2(I,\mathbb{C})$. Montrer que $(u_i v_i)_{i\in I}\in\ell^1(I,\mathbb{C})$.
2. Montrer que $\ell^2(I,\mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^I$.
3. Soit $(u_i)_{i\in I}\in\ell^1(I,\mathbb{C})$. Posons $J=\{i\in I\ :\ |u_i|\geq 1\}$. Montrer que J est fini.
   Indication : Si J est infini, que dire de la famille $(u_i)_{i\in J}$?
4. En déduire que $\ell^1(I,\mathbb{C})\subset\ell^2(I,\mathbb{C})$.

C11.118. EXERCICE Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, notons $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n. Démontrer :
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{1-z^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}d(n)z^n.$$

C11.119. EXERCICE On rappelle que les sommes $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$ sont notées respectivement $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$.

1. Notons $I=\left\{(n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\ :\ n\text{ divise }m\right\}$. Montrer que I est dénombrable, puis exprimer $\displaystyle\sum_{(n,m)\in I}\frac{1}{n^2m^2}$ à l'aide de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$.
2. Notons $J=\left\{(n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\ :\ n\wedge m=1\right\}$. Montrer que J est dénombrable, puis exprimer $\displaystyle\sum_{(n,m)\in J}\frac{1}{n^2m^2}$ à l'aide de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$.
   Indication : Pour tout $d\in\mathbb{N}^*$, notons $J_d=\{(n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\ :\ n\wedge m=d\}$. Commencer par montrer que $\displaystyle\zeta(2)^2=\sum_{d=1}^{+\infty}\sum_{(n,m)\in J_d}\frac{1}{n^2m^2}$.

C11.120. Exercice Etant données deux famille sommables de complexes $u=(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $v=(v_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, posons :

$$u\star v=\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k}\right)_{n\in\mathbb{Z}}.$$

1. Démontrer que la loi $\star$ est bien définie et que pour toutes familles $u=(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $v=(v_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in\ell^1(\mathbb{Z},\mathbb{C})$, $u\star v\in\ell^1(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ et :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(u\star v)_n=\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n\right)\cdot\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n\right).$$

2. Démontrer que la loi $\star$ possède un élément neutre.
3. L'ensemble $\ell^1(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ muni de la loi $\star$ est-il un groupe ?

C11.121. Exercice (X) Démontrer que la famille $\left(\dfrac{1}{m^2n+n^2m+2mn}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ est sommable et calculer sa somme.

C11.122. Exercice (X) Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes telle que :

$$\forall (n,m)\in\mathbb{N}^2,\ n\neq m \quad\Longrightarrow\quad |z_n-z_m|\geq 1.$$

Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{1}{z_n^3}$ est convergente.

C11.123. Exercice Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle de carré sommable, i.e. telle que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n^2$ converge.

1. Montrer que pour toute $\sigma\in(\mathbb{N})$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n\, u_{\sigma(n)}$ converge.
2. Calculer $\inf\left\{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\, u_{\sigma(n)}\ :\ \sigma\in\mathfrak{S}(\mathbb{N})\right\}$.

C11.124. Exercice (Centrale, X-ENS) Soit $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ une série semi-convergente (i.e. convergente mais non absolument convergente) de nombres réels. Démontrer que pour tout $\ell\in\mathbb{R}$, il existe $\sigma\in(\mathbb{N})$ telle que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}=\ell$.

C11.125. Exercice (X) Soient $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} b_n$ deux séries convergentes de nombres complexes. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, notons :

$$c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\qquad\text{et}\qquad S_n=\sum_{k=0}^{n} c_k.$$

Démontrer que :

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \left(\sum_{n}^{+\infty} a_n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$

En d'autres termes, si deux séries sont semi-convergentes, leur produit de Cauchy peut diverger (cf. cours), mais il converge au sens de Cesàro vers le produit de leurs sommes.

C11.126. Exercice (ENS)

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Démontrer que :

$$\sum_{n\geq 0}|a_n| \text{ converge}\qquad\Longleftrightarrow\qquad \forall\sigma\in\mathfrak{S}(\mathbb{N}),\quad \sum_{n\geq 0} a_{\sigma(n)} \text{ converge}.$$

2. Soit (c_n) une suite de nombres complexes non nuls. Démontrer que :

$$\sum_{n\geq 0}|c_n-1| \text{ converge}\qquad\Longleftrightarrow\qquad \exists\, a\in\mathbb{C}^*,\ \forall\sigma\in\mathfrak{S}(\mathbb{N}),\quad \prod_{k=0}^{n} c_{\sigma(k)} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} a.$$