M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Chapitre 4
Espaces vectoriels normés

David BLOTTIÈRE

Table des matières

1 Norme sur un espace vectoriel

C4. 1. *Notation.* — $\mathbf{K}$ désigne le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

C4. 2. DÉFINITION. — *Norme sur un espace vectoriel Une norme sur un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E est une application $||\,.\,|| : E \longrightarrow \mathbf{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes.*

1. Propriété de séparation
$$\forall x \in E, \quad ||\,x\,|| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$
2. Propriété d'homogénéité
$$\forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad ||\,\lambda.x\,|| = |\lambda|\,||\,x\,||$$
3. Inégalité triangulaire
$$\forall (x, y) \in E^2, \quad ||\,x + y\,|| \leqslant ||\,x\,|| + ||\,y\,||$$

On dit alors que $(E, ||\,.\,||)$ est un espace vectoriel normé (e.v.n. en abrégé).

C4. 3. *Remarque (Deuxième inégalité triangulaire).* — L'inégalité triangulaire implique l'inégalité suivante, appelée deuxième inégalité triangulaire :
$$\forall (x, y) \in E^2, \quad |\,||\,x\,|| - ||\,y\,||\,| \leqslant ||\,x - y\,||$$

C4. 4. *Remarque (Une autre notation usuelle pour la norme).* — Une norme est parfois aussi notée N. Le réel $N(x)$ désigne alors la norme du vecteur x.

C4. 5. PROPOSITION (NORME ASSOCIÉE À UN PRODUIT SCALAIRE). — *Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$. L'application $||\,.\,||$ définie par :*
$$\forall\, x \in E, \qquad ||\,x\,|| = \sqrt{\langle\,x\,,\,x\,\rangle}$$
est une norme sur E.

C4. 6. *Exemple (Normes usuelles sur $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$).* — La valeur absolue est une norme sur $\mathbf{R}$. Le module est une norme sur $\mathbf{C}$.

C4. 7. *Exemple (Normes usuelles sur $\mathbf{R}^n$).* — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Sur $\mathbf{R}^n$, les applications
$$||\,.\,||_1 : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}_+ \qquad ||\,.\,||_2 : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}_+ \qquad ||\,.\,||_\infty : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}_+$$
définies par :
$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n, \qquad ||\,x\,||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \qquad ||\,x\,||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \qquad ||\,x\,||_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$$
sont des normes. La norme $||\,.\,||_2$ est associée au produit scalaire canonique sur $\mathbf{R}^n$, défini par :
$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \quad \langle\,x\,,\,y\,\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

C4. 8. *Exemple (Normes usuelles sur* $\mathbf{R}[X]$*).* — Sur $\mathbf{R}[X]$, les applications

$$||\,.\,||_1 : \mathbf{R}[X] \longrightarrow \mathbf{R}_+ \qquad ||\,.\,||_2 : \mathbf{R}[X] \longrightarrow \mathbf{R}_+ \qquad ||\,.\,||_\infty : \mathbf{R}[X] \longrightarrow \mathbf{R}_+$$

définies par :

$$\forall P = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i X^i \in \mathbf{R}[X], \qquad ||\,P\,||_1 = \sum_{i=0}^{+\infty} |a_i| \qquad ||\,P\,||_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^{+\infty} a_i^2} \qquad ||\,P\,||_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i|$$

sont des normes. La norme $||\,.\,||_2$ est la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle$ défini sur $\mathbf{R}[X]$ par :

$$\forall (P,Q) \in \mathbf{R}[X]^2 \text{ tels que } P = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i X^i \text{ et } Q = \sum_{i=0}^{+\infty} b_i X^i, \quad \langle\, P\,,\,Q\,\rangle = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i b_i.$$

C4. 9. *Exemple (Normes usuelles sur* $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})$*).* — Sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})$ $(a < b)$, les applications

$$||\,.\,||_1 : \mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}_+ \qquad ||\,.\,||_2 : \mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}_+ \qquad ||\,.\,||_\infty : \mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}_+$$

définies par :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R}), \qquad ||\,f\,||_1 = \int_a^b |f(t)|\; dt \qquad ||\,f\,||_2 = \sqrt{\int_a^b f(t)^2\; dt}, \qquad ||\,f\,||_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|\,.$$

La norme $||\,.\,||_2$ est la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle$ défini sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})$ sur par :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})^2, \qquad \langle\, f\,,\,g\,\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\; dt.$$

C4. 10. *Remarque (Longueur associée à une norme).* — Une norme définit une notion de longueur pour les vecteurs (considérés comme des points) d'un espace vectoriel.

C4. 11. Définition (Distance associée à une norme). — *Soit* $(E, ||\,.\,||)$ *un espace vectoriel normé. La distance associée à la norme* $||\,.\,||$ *est l'application*

$$d \left| \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ (x,y) & \longmapsto & d(x,y) := ||\,x-y\,|| \end{array} \right. .$$

C4. 12. *Remarque (Propriétés caractéristiques d'une distance).* — Soit $(E, ||\,.\,||)$ un espace vectoriel normé. La distance d vérifie les propriétés suivantes :

1. *Symétrie*

$$\forall (x,y) \in E \times E, \quad d(x,y) = d(y,x)$$

2. *Séparation*

$$\forall (x,y) \in E \times E, \quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

3. *Inégalité triangulaire*

$$\forall (x,y,z) \in E^3, \quad d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$$

En effet, si $(x,y,z) \in E^3$

$$d(x,z) = ||\, x - z \,|| = ||\, (x-y) + (y-z) \,|| \leqslant ||\, x - y \,|| + ||\, y - z \,|| \leqslant d(x,y) + d(y,z)$$

Réciproquement, toute application de $E \times E$ vers $\mathbf{R}_+$ vérifiant ces trois propriétés est appelée « distance ».

C4. 13. Définition (Boules ouvertes, boules fermées). — *Soit $(E, ||\,.\,||)$ un espace vectoriel normé. Notons d la distance associée à la norme $||\,.\,||$. Soient $a \in E$ et $r > 0$.*

1. *L'ensemble des éléments de E dont la distance à a est strictement inférieure à r, soit :*

$$B(a,r) := \{x \in E \ : \ ||\, x - a \,|| < r\} = \{x \in E \ : \ d(x,a) < r\}$$

est appelé boule ouverte de centre a et de rayon r.

2. *L'ensemble des éléments de E dont la distance à a est inférieure ou égale à r, soit :*

$$B_f(a,r) := \{x \in E \ : \ ||\, x - a \,|| \leqslant r\} = \{x \in E \ : \ d(x,a) \leqslant r\}$$

est appelé boule fermée de centre a et de rayon r.

C4. 14. *Remarque (Boule unité).* — Lorsque $a = 0_E$ et $r = 1$, on parle de boule unité (ouverte ou fermée).

C4. 15. *Exemple (Boules dans $\mathbf{R}$ muni de la valeur absolue).* — Dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}$ muni de la valeur absolue $|.|$, pour $a \in \mathbf{R}$ et $r > 0$,on a :

$$B(a,r) =]a-r, a+r[\qquad \text{et} \qquad B_f(a,r) = [a-r, a+r]$$

C4. 16. *Exercice (Boules unité fermées dans $\mathbf{R}^2$ pour les trois normes usuelles).* — Dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$, l'allure des boules dépend de la norme. Déterminer, puis représenter, la boule unité fermée pour les normes $||\,.\,||_1$, $||\,.\,||_2$ et $||\,.\,||_\infty$ introduites plus haut.

C4. 17. Définition (Vecteur unitaire, vecteur unitaire associé à un vecteur non nul). — *Soit $(E, ||\,.\,||)$ un espace vectoriel normé.*

1. *Un vecteur unitaire est un vecteur de norme 1. Autrement dit, un vecteur $x \in E$ est unitaire si $||\, x \,|| = 1$.*
2. *Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Le vecteur $\dfrac{x}{||\, x \,||}$ est unitaire. On l'appelle le* vecteur unitaire associé *à x.*

C4. 18. DÉFINITION (NORMES ÉQUIVALENTES). — *Soient N_1 et N_2 deux normes sur un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E. On dit que N_1 est équivalente à N_2 s'il existe deux réels $\alpha > 0$, $\beta > 0$ tels que :*

$$\forall x \in E, \qquad \alpha N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta N_1(x)$$

C4. 19. PROPOSITION (L'ÉQUIVALENCE ENTRE NORMES EST UNE RELATION D'ÉQUIVALENCE). — *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E. La relation $\mathcal{R}$ définie sur l'ensemble des normes sur E par :*

$$N_1 \mathrel{\mathcal{R}} N_2 \Longleftrightarrow N_1 \textit{ est équivalente à } N_2$$

est une relation d'équivalence.

Démonstration. Montrons que la relation $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive.

1. *Réflexivité*
   Soit N un norme sur E, comme $N \leqslant N \leqslant N$, $N \mathrel{\mathcal{R}} N$, donc $\mathcal{R}$ est réflexive.
2. *Symétrie*
   Soient N_1, N_2 deux normes sur E telles que $N_1 \mathrel{\mathcal{R}} N_2$: il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha N_1 \leqslant N_2 \leqslant \beta N_1$, donc
   $$\frac{1}{\beta} N_2 \leqslant N_1 \leqslant \frac{1}{\alpha} N_2.$$
   Ainsi $N_2 \mathrel{\mathcal{R}} N_1$. La relation $\mathcal{R}$ est symétrique.
3. *Transitivité*
   Soient N_1, N_2, N_3 trois normes sur E telles que $N_1 \mathrel{\mathcal{R}} N_2$ et $N_2 \mathrel{\mathcal{R}} N_3$. Il existe $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ tels que
   $$\alpha N_1 \leqslant N_2 \leqslant \beta N_1 \quad \text{et} \quad \gamma N_2 \leqslant N_3 \leqslant \delta N_2$$
   donc $\alpha\gamma N_1 \leqslant N_3 \leqslant \beta\delta N_1$, donc $N_2 \mathrel{\mathcal{R}} N_3$. La relation $\mathcal{R}$ est transitive.

Q.E.D.

C4. 20. *Exercice ((Équivalence des trois normes usuelles sur $\mathbf{R}^n$)).* — On considère les normes $||\,.\,||_1$, $||\,.\,||_2$ et $||\,.\,||_\infty$ définies précédemment sur $\mathbf{R}^n$.

1. Démontrer : $||\,.\,||_2 \leqslant ||\,.\,||_1 \leqslant n\,||\,.\,||_2$. Les normes $||\,.\,||_1$ et $||\,.\,||_2$ sont donc équivalentes.
2. Démontrer : $||\,.\,||_\infty \leqslant ||\,.\,||_1 \leqslant n\,||\,.\,||_\infty$. Les normes $||\,.\,||_1$ et $||\,.\,||_\infty$ sont donc équivalentes.
3. Démontrer : $||\,.\,||_\infty \leqslant ||\,.\,||_2 \leqslant \sqrt{n}\,||\,.\,||_\infty$. Les normes $||\,.\,||_2$ et $||\,.\,||_\infty$ sont donc équivalentes.

Démontrer que toutes les inégalités précédentes sont optimales.

C4. 21. PROPOSITION (CRITÈRE D'ÉQUIVALENCE ENTRE NORMES VIA LES BOULES). — *Deux normes N_1 et N_2 sur un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E sont équivalentes si et seulement si toute boule ouverte (respectivement fermée) pour la norme N_1 est contenue dans une boule ouverte (respectivement fermée) pour la norme N_2, et réciproquement.*

Démonstration. On raisonne double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$ Soient N_1 et N_2 deux normes équivalentes. Il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha N_1 \leqslant N_2 \leqslant \beta N_1$. Soit $a \in E$, soit $r > 0$. Montrons que la boule ouverte de centre a et de rayon r pour la norme N_1, notée $B_1(a, r)$, est contenue dans la boule ouverte de centre a et de rayon βr pour la norme N_2, notée $B_2(a, \beta r)$.
Soit $x \in B_1(a, r)$. Alors $N_2(x - a) \leqslant \beta N_1(x - a) < \beta r$ donc $x \in B_2(a, \beta r)$.
De même, on montre que $B_2(a, r) \subset B_1(a, r/\alpha)$.
Enfin, ces inclusions restent vraies en remplaçant les boules ouvertes oar des boules fermées.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que toute boule ouverte pour la norme N_1 est contenue dans une boule ouverte pour la norme N_2, et réciproquement.
Considérons la boule unité ouverte pour la norme N_1 : $B_1(0, 1) = \{x \in E \; : \; N_1(x) < 1\}$. Par hypothèse, elle est incluse dans une boule pour la norme N_2 : $B_1(0, 1) \subset B_2(a, r) = \{x \in E \; : \; N_2(x - a) < r\}$, où $a \in E$ et $r > 0$.
La boule $B_2(a, r)$ est incluse dans boule $B_2(0, r + N_2(a))$. En effet, si $x \in B_2(a, r)$:

$$N_2(x) = N_2(x - a + a) \leqslant N_2(x - a) + N_2(a) < r + N_2(a).$$

Ainsi, en posant $\beta := r + N_2(a)$: $B_1(0, 1) \subset B_2(0, \beta)$.
Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$. Alors $\frac{x}{2N_1(x)}$ a une norme N_1 égale à $\frac{1}{2}$. Il appartient donc à $B_1(0, 1)$ et par suite à $B_2(0, \beta)$. Donc $\dfrac{1}{2N_1(x)} N_2(x) = N_2\left(\dfrac{x}{2N_1(x)}\right) < \beta$, d'où $N_2(x) \leqslant 2\beta N_1(x)$. Cette dernière inégalité étant claire pour $x = 0_E$, il vient :

$$\forall x \in E, \quad N_2(x) \leqslant 2\beta N_1(x).$$

Par symétrie des rôles joués par les normes N_1 et N_2 dans l'hypothèse, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $N_1(x) \leqslant 2\alpha N_2(x)$. Donc

$$\forall x \in E, \quad \frac{1}{2\alpha} N_1(x) \leqslant N_2(x).$$

Les normes N_1 et N_2 sont donc équivalentes.

Un raisonnement analogue livre le résultat pour les boules fermées. Q.E.D.

C4. 22. DÉFINITION (ENSEMBLE BORNÉ, DIAMÈTRE D'UN ENSEMBLE). — *Soit $(E, ||\,.\,||)$ un espace vectoriel normé et soit A une partie de E.*

1. *On dit que A est bornée s'il existe une boule fermée contenant A.*
2. *Dans ce cas, on note $\delta(A)$ le diamètre de A défini par :*

$$\delta(A) := \sup_{(x,y)\in A^2} ||\,x-y\,|| = \sup_{(x,y)\in A^2} d(x,y)\ .$$

C4. 23. *Remarque (D'une boule centrée en un point quelconque à une boule centrée en l'origine).* — Soit $(E, ||\,.\,||)$ un espace vectoriel normé. Une partie A de E est bornée si et seulement s'il existe un réel $r > 0$ tel que $A \subset B_f(0, r)$.

C4. 24. *Exercice.* — Montrer que deux normes N_1 et N_2 sur un $\mathbf{K}$-espace vectoriel sont équivalentes si et seulement si pour toute partie A de E, A est bornée pour N_1 si et seulement si A est bornée pour N_2.

C4. 25. *Exercice.* — Soit $(E, ||\,.\,||)$ un espace vectoriel normé. Soit $a \in E$ et soit $r > 0$. Calculer le diamètre de la boule ouverte $B(a, r)$.

C4. 26. DÉFINITION (FONCTION BORNÉE). — *Soit X un ensemble non vide et soit $(E, ||\,.\,||)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé. Une application $f : X \longrightarrow E$ est dite bornée si l'ensemble $f(X)$ est borné dans $(E, ||\,.\,||)$, i.e. si*

$$\exists\, M > 0, \quad \forall x \in X, \quad ||\,f(x)\,|| \leqslant M.$$

C4. 27. THÉORÈME (ESPACE VECTORIEL NORMÉ DES FONCTIONS BORNÉES). — *Soit X un ensemble non vide et soit $(E, ||\,.\,||)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé.*

1. *L'ensemble $\mathcal{B}(X, E)$ des applications bornées définies sur X à valeurs dans E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(X, E)$.*
2. *Pour toute application $f \in \mathcal{B}(X, E)$, posons :*

$$||\,f\,||_\infty := \sup_{x\in X} ||\,f(x)\,||\,.$$

Alors $(\mathcal{B}(X, E), ||\,.\,||_\infty)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé.

Démonstration. 1. Montrons d'abord que $\mathcal{B}(X, E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(X, E)$.

- La fonction nulle sur X, i.e. l'application $X \longrightarrow E$; $x \longmapsto 0_E$, est bornée, donc $0 \in \mathcal{B}(X, E)$.
- Soit $(f, g) \in \mathcal{B}(X, E)^2$, soit $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$. Il existe $M_f, M_g > 0$ tels que pour tout $x \in X$, $||\,f(x)\,|| \leqslant M_f$ et $||\,g(x)\,|| \leqslant M_g$. Soit alors $x \in X$. D'après l'inégalité triangulaire et l'homogénéité :

$$||\,\lambda f(x) + \mu g(x)\,|| \leqslant |\lambda|\, ||\,f(x)\,|| + |\mu|\, ||\,g(x)\,|| \leqslant |\lambda|\, M_f + |\mu|\, M_g.$$

  On en déduit que $\lambda f + \mu g$ est bornée, donc que $\lambda f + \mu g \in \mathcal{B}(X, E)$.

2. Montrons ensuite que $||\,.\,||_\infty$ est une norme.

   - *Positivité et séparation*
     Soit $f \in \mathcal{B}(X,E)$. D'une part, $||\,f\,||_\infty \geqslant 0$ puisque pour tout $x \in X$, $||\,f(x)\,|| \geqslant 0$. D'autre part, si $||\,f\,||_\infty = 0$, alors pour tout $x \in X$, $||\,f(x)\,|| = 0$, donc $f(x) = 0_E$, d'où $f = 0$.
   - *Homogénéité*
     Soit $f \in \mathcal{B}(X,E)$, soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Si $\lambda = 0$, alors $||\,\lambda f\,||_\infty = 0 = |\lambda|\,||\,f\,||_\infty$. Supposons désormais $\lambda \neq 0$.
     Pour tout $x \in X$:
     $$||\,\lambda f(x)\,|| = |\lambda|\,||\,f(x)\,|| \leqslant \underbrace{|\lambda|\,||\,f\,||_\infty}_{\text{indépendant de } x \in X}$$
     Par passage à la borne supérieure :
     $$(\star) \qquad ||\,\lambda f\,||_\infty \leqslant |\lambda|\,||\,f\,||_\infty$$
     L'inégalité $(\star)$ vaut pour tout $\lambda \neq 0$ et pour tout $f \in \mathcal{B}(X,E)$. En effectuant les substitutions :
     $$\lambda \leftarrow \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad f \leftarrow \lambda f$$
     il vient
     $$||\,f\,||_\infty \leqslant \left|\frac{1}{\lambda}\right|\,||\,\lambda f\,||_\infty$$
     d'où :
     $$(\star\star) \qquad |\lambda|\,||\,f\,||_\infty \leqslant ||\,\lambda f\,||_\infty$$
     De $(\star)$ et $(\star\star)$, on déduit : $||\,\lambda f\,||_\infty = |\lambda|\,||\,f\,||_\infty$.
   - *Inégalité triangulaire*
     Soit $(f,g) \in \mathcal{B}(X,E)^2$. Pour tout $x \in X$, l'inégalité triangulaire pour la norme $||\,.\,||$ implique :
     $$||\,f(x)+g(x)\,|| \leqslant ||\,f(x)\,|| + ||\,g(x)\,|| \leqslant \underbrace{||\,f\,||_\infty + ||\,g\,||_\infty}_{\text{indépendant de } x \in X}$$
     Par passage à la borne supérieure, il vient $||\,f+g\,||_\infty \leqslant ||\,f\,||_\infty + ||\,g\,||_\infty$.

Q.E.D.

C4. 28. DÉFINITION (APPLICATIONS LIPSCHITZIENNES). — *Soient $(E, ||\,.\,||_E)$ et $(F, ||\,.\,||_F)$ deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels normés. Soit A une partie non vide de E. Soit $k \geqslant 0$. Une application $f\colon A \longrightarrow F$ est dite k-lipschitzienne si :*
$$\forall (x,y) \in A^2, \qquad ||\,f(x)-f(y)\,||_F \leqslant k\,||\,x-y\,||_E\,.$$

C4. 29. *Exercice.* —

1. Soit $(E, ||\,.\,||)$ un espace vectoriel normé. Montrer que l'application
   $$||\,.\,|| \quad \left|\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & ||\,x\,|| \end{array}\right.$$
   est 1-lipschitzienne.

2. Soit $A = B_f(0,1)$ la boule unité fermée dans $(\mathbf{R}^2, ||\,.\,||_2)$. Montrer que l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & (x_1^2, x_2^2) \end{array} \right.$$

est 2-lipschitzienne.

C4. 30. Proposition (L'application distance à un ensemble est 1-lipschitzienne). — *Soient $(E, ||\,.\,||)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé et $A \subset E$ une partie non vide. Pour tout $x \in E$, notons :*

$$d(x, A) := \inf_{y \in A} ||\, x - y \,||$$

la distance de x à l'ensemble A. L'application « distance à A » :

$$d(\cdot, A) \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & d(x, A) \end{array} \right.$$

est 1-lipschitzienne.

Démonstration. Soit $(x, y) \in E^2$. Pour tout $z \in A$, on a :

$$||\, x - z \,|| = ||\, (x - y) + (y - z) \,|| \geqslant ||\, x - y \,|| + ||\, y - z \,||$$

d'après l'inégalité triangulaire. Donc comme $d(x, A) \leqslant ||\, x - z \,||$, $d(x, A) \leqslant ||\, x - y \,|| + ||\, y - z \,||$ d'où :

$$\underbrace{d(x, A) - ||\, x - y \,||}_{\text{indépendant de } z \in A} \leqslant ||\, y - z \,||$$

Par passage à la borne inférieure, $d(x, A) - ||\, x - y \,|| \leqslant d(y, A)$, d'où :

$$(\star) \qquad d(x, A) - d(y, A) \leqslant ||\, x - y \,||$$

L'inégalité $(\star)$ vaut pour tout $(x, y) \in E^2$. En effectuant les substitutions :

$$x \leftarrow y \quad \text{et} \quad y \leftarrow x$$

il vient

$$(\star\star) \qquad d(y, A) - d(yx, A) \leqslant ||\, y - x \,|| = ||\, x - y \,||$$

De $(\star)$ et $(\star\star)$, on déduit $|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant ||\, x - y \,||$. Q.E.D.

C4. 31. PROPOSITION (CRITÈRE D'ÉQUIVALENCE DE NORMES VIA L'APPLICATION IDENTITÉ). — *Deux normes N_1 et N_2 sur un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E sont équivalentes si et seulement si les applications :*

$$i_{N_1,N_2} \left| \begin{array}{ccc} (E, N_1) & \longrightarrow & (E, N_2) \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$$

et

$$i_{N_2,N_1} \left| \begin{array}{ccc} (E, N_2) & \longrightarrow & (E, N_1) \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$$

sont lipschtziennes.

Démonstration. Soient N_1 et N_2 deux normes sur E. Remarquons que :

$$\begin{array}{lcl} i_{N_2,N_1} \text{ est lipschitzienne} & \iff & \text{il existe } \beta > 0 \text{ tel que pour tout } (x, y) \in E^2,\ N_2(x-y) \leqslant \beta N_1(x-y) \\ & \underset{(\star)}{\iff} & \text{il existe } \beta > 0 \text{ tel que pour tout } x \in E,\ N_2(x) \leqslant \beta N_1(x)\ . \end{array}$$

La démonstration de l'équivalence $(\star)$ est laissée en exercice. De même, i_{N_1,N_2} est lipschitzienne si et seulement s'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\dfrac{1}{\alpha} N_1(x) \leqslant N_2(x)$.
Ainsi, i_{N_1,N_2} et i_{N_2,N_1} sont toutes deux lipschitziennes si et seulement si N_1 et N_2 sont équivalentes. Q.E.D.

C4. 32. DÉFINITION (NORME INDUITE, DISTANCE INDUITE). — *Soit $(E, ||\,.\,||)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé. Soit F un sous-espace vectoriel de E.*

1. *La restriction de $||\,.\,||$ à F est une norme sur F, appelée normé induite.*
2. *Notons d la distance associée à $||\,.\,||$ sur $E \times E$. La restriction de d à $F \times F$ est appelée distance induite.*

C4. 33. PROPOSITION (PRODUIT D'UN NOMBRE FINI D'ESPACES VECTORIELS NORMÉS). — *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(E_i, N_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de n espaces vectoriels normés. Posons $E = E_1 \times \ldots \times E_n$ et pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$:*

$$N(x) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} N_i(x_i)$$

L'application N est une norme sur l'espace vectoriel E, appelée norme produit sur $E = E_1 \times \ldots \times E_n$.

Démonstration. Montrons que N vérifie les trois conditions nécessaires pourêtre une norme :

- *Positivité et séparation*
  Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$. Comme pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $N_i(x_i) \geqslant 0$, alors $N(x) \geqslant 0$.
  Par ailleurs, si $N(x) = 0$, alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $N_i(x_i) = 0$, donc $x_i = 0$. D'où $x = 0$.
- *Homogénéité*
  Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$, soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Si $\lambda = 0$ alors $N(\lambda x) = 0 = |\lambda|\, N(x)$. Supposons désormais $\lambda \neq 0$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

$$N_i(\lambda x_i) = |\lambda|\, N_i(x_i) \leqslant \underbrace{|\lambda|\, N(x)}_{\text{indépendant de } i \in [\![1, n]\!]}$$

Par passage au max :

$$(\star) \qquad N(\lambda x) \leqslant |\lambda|\, N(x)$$

L'inégalité $(\star)$ vaut pour tout $\lambda \neq 0$ et pour tout $x \in E$. En effectuant les substitutions :

$$\lambda \leftarrow \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad x \leftarrow \lambda x$$

il vient

$$N(x) \leqslant \left|\frac{1}{\lambda}\right| N(\lambda x)$$

d'où :

$$(\star\star) \qquad |\lambda|\, N(x) \leqslant N(\lambda x)$$

De $(\star)$ et $(\star\star)$, on déduit : $N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$.

- *Inégalité triangulaire*
  Soient $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in E$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. L'inégalité triangulaire pour la norme N_i donne :

$$N_i(x_i + y_i) \leqslant N_i(x_i) + N_i(y_i) \leqslant \underbrace{N(x) + N(y)}_{\text{indépendant de } i \in [\![1,n]\!]}$$

d'où, en passant au maximum, $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$.

Q.E.D.

C4. 34. *Exercice.* — Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$, de norme associée $||\,.\,||$. Montrer que pour tout $x \in E$:

$$||\, x \,|| = \sup_{||\, y \,|| = 1} \langle\, x \,,\, y \,\rangle$$

C4. 35. *Exercice.* — Soit $(E, ||\,.\,||)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

1. L'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} E \setminus \{0\} & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{||\, x \,||} \end{array} \right.$$

   est-elle lipschitzienne ?

2. Montrer que :

$$\forall (x, y) \in (E \setminus \{0\})^2, \qquad \frac{1}{2} \max\left(||\, x \,||\,, ||\, y \,||\right) \left|\left| \frac{x}{||\, x \,||} - \frac{y}{||\, y \,||} \right|\right| \leqslant ||\, x - y \,||\,.$$

3. En déduire que pour tout $r > 0$, la restriction de f à $E \setminus B(0, r)$ est lipschitzienne.

C4. 36. *Exercice.* —

1. Soit $(E, ||\,.\,||)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé. Soit f un automorphisme de E. Montrer que l'application
$$N \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x & \longmapsto & ||\, f(x)\,|| \end{array} \right.$$
est une norme sur E. Est-ce le cas si f n'est pas inversible ?
2. Supposons que $(E, ||\,.\,||) = (\mathbf{R}^n, ||\,.\,||_1)$. Notons $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice représentant f dans la base canonique et $A^{-1} = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ son inverse. Posons :
$$a = \sup_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \qquad \text{et} \qquad b = \sup_{1\leqslant i,j\leqslant n} |b_{i,j}|$$
   (a) Montrer que,
$$\forall x \in E, \qquad \frac{1}{nb}\,||\,x\,|| \leqslant N(x) \leqslant na\,||\,x\,||$$
   (b) Montrer que $f\colon\ (\mathbf{R}^n, ||\,.\,||_1) \to (\mathbf{R}^n, ||\,.\,||_\infty)$ est lipschitzienne.

C4. 37. *Exercice.* — Notons $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbf{R})$ et posons, pour $f \in E$, $||\,f\,||_{1,\infty} = ||\,f\,||_\infty + ||\,f'\,||_\infty$.

1. Montrer que $||\,.\,||_{1,\infty}$ est une norme sur E.
2. Cette norme est-elle équivalente à $||\,.\,||_\infty$?

C4. 38. *Exercice.* —

1. Montrer que l'application
$$d \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}\times\mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & |\arctan(x) - \arctan(y)| \end{array} \right.$$
est une distance sur $\mathbf{R}$. Est-elle associée à une norme sur $\mathbf{R}$?
2. Soit $(E, ||\,.\,||)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé. Posons, pour $(x,y) \in E \times E$
$$d(x,y) = \min\left(1, ||\,x-y\,||\right)\ .$$
L'application d est-elle une distance sur E ? Est-elle associée à une norme sur E ?
3. Ici, $E = \mathbf{R}^2$. Posons pour tout $(x,y) \in E \times E$:
$$d(x,y) = \frac{||\,x-y\,||_1}{1 + ||\,x-y\,||_1}.$$
Montrer que d est une distance sur E. On pourra commencer par montrer que pour tous réels $u, v \geqslant 0$, $\dfrac{u+v}{1+u+v} \leqslant \dfrac{u}{1+u} + \dfrac{v}{1+v}$. Est-elle associée à une norme ?

2 Suite d'éléments d'un espace vectoriel normé

C4. 39. DÉFINITION (CONVERGENCE D'UNE SUITE). — *Soit $(E, ||\,.\,||)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de vecteurs de E.*

1. *Soit $a \in E$ un vecteur. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers a dans $(E, ||\,.\,||)$ si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbf{N}, \quad \forall n \geqslant N_\varepsilon, \quad ||\, u_n - a \,|| \leqslant \varepsilon.$$

Si c'est le cas, on écrit $u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} a$.

2. *Si la suite (u_n) ne converge vers aucun point, on dit qu'elle diverge.*

C4. 40. *Remarque.* —

1. La notion de convergence n'a de sens que dans un espace vectoriel *normé*. Ainsi, si E est muni d'une seconde norme $||\,.\,||'$, il est possible *a priori* qu'une suite qui converge pour la norme $||\,.\,||$, ne converge pas pour la norme $||\,.\,||'$. Cf. Théorème **C4.46** et Corollaire **C4.47**.
2. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers a dans $(E, ||\,.\,||)$ si et seulement si la suite réelle de terme général $||\, u_n - a \,||$ converge dans $\mathbf{R}$ vers 0.

C4. 41. PROPOSITION (UNICITÉ DE LA LIMITE). — *Soit $(E, ||\,.\,||)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de vecteurs de E. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge, alors sa limite est unique. On la note $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite convergente, soient $a_1, a_2 \in E$ tels que $u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} a_1$ et $u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} a_2$. Raisonnons par l'absurde et supposons $a_1 \neq a_2$, i.e. $\varepsilon := ||a_1 - a_2|| > 0$.
Il existe $N_1 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_1$, $||u_n - a_1|| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$ et il existe $N_2 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_2$, $||u_n - a_2|| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$.
En particulier pour $n = \max(N_1, N_2)$, $||u_n - a_1|| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$ et $||u_n - a_2|| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Par suite :

$$\varepsilon = ||a_1 - a_2|| = ||a_1 - u_n + u_n - a_2|| \leqslant ||a_1 - u_n|| + ||u_n - a_2|| = ||u_n - a_1|| + ||u_n - a_2|| \leqslant \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Comme $\varepsilon > 0$, nous en déduisons $1 \leqslant \dfrac{2}{3}$, ce qui est faux. Q.E.D.

C4. 42. PROPOSITION (UNE SUITE CONVERGENTE EST BORNÉE). — *Soit $(E, ||\,.\,||)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de vecteurs de E. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge, alors elle est bornée, i.e. : il existe un réel $M > 0$ tel que :*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad ||\, u_n \,|| \leqslant M\ .$$

C4. 43. *Remarque.* — Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée si et seulement si l'ensemble $\{u_n \;:\; n \in \mathbf{N}\}$ est borné.

C4. 44. Théorème (Espace des suites convergentes). — *Soit $(E, ||\,.\,||)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé.*

1. *L'ensemble $\mathcal{C}(E, ||\,.\,||)$ des suites convergentes dans $(E, ||\,.\,||)$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble $E^{\mathbf{N}}$ des suites d'éléments de E.*
2. *De plus, l'application :*

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(E, ||\,.\,||) & \to & E \\ (u_n)_{n\in\mathbf{N}} & \mapsto & \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \end{array} \right.$$

est linéaire.

Démonstration. • Remarquons d'abord que la suite nulle converge vers 0.

- Soient maintenant $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites convergentes, de limites respectives a et b. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$. Nous allons montrer que la suite $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\lambda a + \mu b$, ce qui d'une part achèvera de montrer que l'ensemble des suites convergentes est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbf{N}}$ et, d'autre part que l'application qui à une suite convergente associe sa limite est linéaire.
  Supposons que $|\lambda| + |\mu| \neq 0$ (dans le cas contraire, $\lambda = \mu = 0$ et le résultat voulu est immédiat).
  Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|}$.
  Il existe $N_1 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_1$, $||\, u_n - a \,|| \leqslant \varepsilon'$, et il existe $N_2 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_2$, $||\, u_n - b \,|| \leqslant \varepsilon'$. Posons alors $N_3 = \max(N_1, N_2)$. Soit $n \geqslant N_3$.
  $$||\,(\lambda u_n + \mu v_n) - (\lambda a + \mu b)\,|| = ||\,\lambda(u_n - a) + \mu(v_n - b)\,|| \leqslant |\lambda|\,||\,u_n - a\,|| + |\mu|\,||\,v_n - b\,|| \leqslant (|\lambda| + |\mu|)\varepsilon' = \varepsilon.$$
  Ainsi, $\lambda u_n + \mu v_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \lambda a + \mu b$.

Q.E.D.

C4. 45. *Exemples.* —

1. Si $E = \mathbf{R}^2$ et $||\,.\,|| = ||\,.\,||_\infty$, $||\,.\,||_1$ ou $||\,.\,||_2$, alors une suite $(u_n)_{n\in N}$ de terme général $u_n = (x_n, y_n)$ converge vers un vecteur $a = (x, y)$ si et seulement si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent respectivement vers x et y dans $\mathbf{R}$.
2. Si $x \in E$ est un vecteur quelconque, la suite de terme général $u_n = \dfrac{x}{n}$ converge vers 0. Si $x \neq 0$, la suite de terme général nx diverge.
3. Si $E = \mathbf{R}[X]$ est muni de la norme $||\,.\,||_\infty$, alors la suite de terme général $P_n = X^n$ diverge.

C4. 46. Théorème (Critère séquentiel de comparaison des normes). — *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et soient N_1 et N_2 deux normes sur E.*
Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. *Toute suite d'éléments de E qui converge vers 0 au sens de N_1, converge vers 0 au sens de N_2.*
2. *$\exists\, \alpha > 0$ tel que $N_2 \leqslant \alpha N_1$.*

Démonstration. Procédons par double implication.

$\boxed{(2) \Rightarrow (1)}$ Soit $\alpha > 0$ tel que $N_2 \leqslant \alpha N_1$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite convergeant vers 0 au sens de N_1, i.e. telle que $N_1(u_n) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$. Comme pour tout $n \in \mathbf{N}$:
$$0 \leqslant N_2(u_n) \leqslant \alpha N_1(u_n)$$
le théorème d'encadrement pour les suites réelles implique $(N_2(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0, i.e. que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0 au sens de N_2.

$\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ Raisonnons par contraposée.

Supposons donc que pour tout $\alpha > 0$, il existe $x \in E$ tel que $N_2(x) > \alpha N_1(x)$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe $x_n \in E$ tel que $N_2(x_n) > nN_1(x_n)$.

Alors pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $x_n \neq 0_E$, et on peut considérer $y_n := \dfrac{x_n}{N_2(x_n)}$.

On observe :

- pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $N_2(y_n) = 1$, et donc $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ ne tend pas vers 0 pour la norme N_2 ;
- pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant N_1(y_n) < \dfrac{1}{n}N_2(y_n) = \dfrac{1}{n}$, donc par théorème d'encadrement pour les suites réelles, $N_1(y_n) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$. $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge donc vers 0 pour la norme N_1.

On a exhibé une suite de vecteurs de E qui converge vers 0 au sens de N_1, mais pas au sens de N_2.

Q.E.D.

C4. 47. Corollaire (Convergence et équivalence des normes). — *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et soient N_1 et N_2 deux normes sur E. Les normes N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in N}$ de E :*

$$(u_n)_{n\in N} \text{ converge vers } 0 \text{ au sens de } N_1 \iff (u_n)_{n\in N} \text{ converge vers } 0 \text{ au sens de } N_2.$$

Démonstration. Il s'agit d'une concéquence immédiate du théorème précédent. Q.E.D.

C4. 48. *Remarque.* — Ce corollaire peut être utilisé pour démontré que deux normes sur un même espace vectoriel ne sont pas équivalentes.

C4. 49. *Exercice.* —

1. Démontrer que sur $\mathbf{K}[X]$:
   (a) les normes $||\,.\,||_1$ et $||\,.\,||_2$ ne sont pas équivalentes ;
   (b) les normes $||\,.\,||_1$et $||\,.\,||_\infty$ ne sont pas équivalentes ;
   (c) les normes $||\,.\,||_2$et $||\,.\,||_\infty$ ne sont pas équivalentes.
2. Démontrer que sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})$,
   (a) les normes $||\,.\,||_1$et $||\,.\,||_2$ ne sont pas équivalentes ;
   (b) les normes $||\,.\,||_1$et $||\,.\,||_\infty$ ne sont pas équivalentes ;
   (c) les normes $||\,.\,||_2$et $||\,.\,||_\infty$ ne sont pas équivalentes

C4. 50. Théorème (Espace des suites bornées). — *Soit $(E, ||\,.\,||)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé.*

1. *L'ensemble des suites bornées d'éléments de E, noté $\ell^\infty(E)$, est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbf{N}}$.*
2. *$\mathcal{C}(E, ||\,.\,||)$ est un sous-espace vectoriel de $\ell^\infty(E)$.*
3. *Posons pour tout $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^\infty(E)$:*

$$||\,(u_n)_{n\in\mathbf{N}}\,||_\infty := \sup_{n\in\mathbf{N}} ||\,u_n\,||\,.$$

Alors $(\ell^\infty(E), ||\,.\,||_\infty)$ *est un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel normé.*

C4. 51. Théorème (Convergence et espaces produits). — *Soit* $(E_i, N_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ *une famille de* p *espaces vectoriels normés. Notons* (E, N) *l'espace produit. Soit alors* $(u_n)_{n\in N}$ *une suite d'éléments de* E *de terme général*

$$u_n = (u_n^1, \ldots, u_n^p)$$

où pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $(u_n^i)_{n\in\mathbf{N}}$ *est une suite d'éléments de* E_i.
Alors la suite $(u_n)_{n\in N}$ *converge vers un vecteur* $a = (a_1, \ldots, a_p) \in E$ *si et seulement si pour tout* $i \in [\![1, p]\!]$, *la suite* $(u_n^i)_{n\in N}$ *converge vers* a_i.

Démonstration. Procédons par double implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E convergeant vers $a \in E$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et pour tout $i \in [\![1, p]\!]$:

$$0 \leqslant N_i\left(u_n^i - a_i\right) \leqslant N(u_n - a) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0.$$

Donc pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $u_n^i \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{N_i} a_i$, par le théorème d'encadrement pour les suites réelles.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit $(u_n)_{n\in N}$ une suite d'éléments de E telle que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, il existe $a_i \in E_i$:

$$u_n^i \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{N_i} a_i.$$

Ainsi, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $N_i\left(u_n^i - a_i\right) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$, donc :

$$N_1\left(u_n^1 - a_1\right) + \ldots + N_p\left(u_n^p - a_p\right) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0.$$

Posons $a := (a_1, \ldots, a_p)$. Observons, pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$0 \leqslant N(u_n - a) \leqslant N_1\left(u_n^1 - a_1\right) + \ldots + N_p\left(u_n^p - a_p\right)$$

donc par le théorème d'encadrement pour les suites réelles, $N(u_n - a) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$. On en déduit que $u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{N} a$.

Q.E.D.

C4. 52. Définition (Suites extraites). — *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *deux suites d'éléments d'un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel* E. *On dit que* $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *est une suite extraite de* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *s'il existe une applications* $\varphi\colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ *strictement croissante telle que :*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad v_n = u_{\varphi(n)}.$$

C4. 53. *Remarque (Suite extraite d'une suite extraite).* — Si $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et si $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite extraite de $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$, alors $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. En effet, il existe deux applications $\varphi\colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ et $\psi\colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ strictement croissantes telles que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $w_n = v_{\psi(n)} = u_{\varphi\circ\psi(n)}$.

C4. 54. Définition (Valeur d'adhérence). — *Soit $(E, ||\,.\,||)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé. Un vecteur $a \in E$ est valeur d'adhérence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de E, s'il existe une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant vers a.*

C4. 55. *Remarque.* — Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $(||\,u_n\,||)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$ n'a pas de valeur d'adhérence.

C4. 56. Proposition (Une suite convergente possède une unique valeur d'adhérence). — *Soit $(E, ||\,.\,||)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E.*

1. *Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $a \in E$, alors toute sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers a, donc a est l'unique valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.*
2. *En particulier, si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ possède deux valeurs d'adhérence, alors elle diverge.*

Démonstration. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $a \in E$. Soit $\varphi : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ une application strictement croissante. Nous avons établi, plus tôt dans l'année, en raisonnant par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \varphi(n) \geqslant n.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \quad ||\,u_n - a\,|| \leqslant \varepsilon.$$

Soit alors $n \geqslant N$. Comme $\varphi(n) \geqslant n \geqslant N$, alors $\left|\left|\,u_{\varphi(n)} - a\,\right|\right| \leqslant \varepsilon$. Ainsi, $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} a$. Q.E.D.

C4. 57. *Exemple.* — La suite réelle de terme général $(-1)^n$ admet deux valeurs d'adhérence distinctes, 1 et -1. Elle est donc divergente.

C4. 58. Définition (Notations de Landau). — *Soit $(E, ||\,.\,||)$ un espace vectoriel normé. Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E et $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle.*

1. *On note $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\alpha_n)$ si $||\,u_n\,|| \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\alpha_n)$.*
2. *On note $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(\alpha_n)$ si $||\,u_n\,|| \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(\alpha_n)$.*
3. *Si $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une autre suite d'éléments de E, on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ si $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(||\,v_n\,||)$. On dit que les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont équivalentes.*

C4. 59. *Exercice.* — Trouver un exemple de suite bornée d'un espace vectoriel normé n'ayant pas de valeur d'adhérence.

C4. 60. *Exercice.* — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle bornée. Montrer qu'elle converge si et seulement si elle n'a qu'une seule valeur d'adhérence. Est-ce vrai si on ne suppose plus $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ bornée ?

C4. 61. *Exercice.* — Posons, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \right. .$$

La suite (f_n) converge-t-elle dans $(\mathcal{C}([0,1]), ||\,.\,||_\infty)$? Et dans $(\mathcal{C}([0,1]), ||\,.\,||_1)$?

C4. 62. *Exercice.* — Posons, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \cos(nx) \end{array} \right. .$$

1. Montrer que (f_n) converge vers 0 dans $(\mathcal{C}([0,2\pi],\mathbf{R}), ||\,.\,||_1)$.
2. Supposons que (f_n) admette une valeur d'adhérence f dans $(\mathcal{C}([0,1],\mathbf{R}), ||\,.\,||_\infty)$: on dispose alors d'une fonction $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante telle que $||\, f_{\varphi(n)} - f\,||_\infty \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \left| f_{\varphi(n)}(0) - f_{\varphi(n)}\left(\frac{\pi}{2\,\varphi(n)}\right)\right| \leqslant 2\,||\, f_{\varphi(n)} - f\,||_\infty + \left| f(0) - f\left(\frac{\pi}{2\,\varphi(n)}\right)\right| .$$

   Que peut-on en déduire ?

C4. 63. *Exercice.* — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, notons f_n la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1], \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 - 1/n \\ 2n(x-1+1/n) & \text{si } 1-1/n \leqslant x \leqslant 1-1/2n \\ -2n(x-1+1/n) & \text{si } 1-1/2n \leqslant x \leqslant 1 \end{array} \right.$$

Faire un dessin, et montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $f_n(x) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$. Est-ce que (f_n) converge vers 0 dans $(\mathcal{C}([0,1]), ||\,.\,||_\infty)$?

3 Topologie d'un espace vectoriel normé

C4. 64. *Notation.* — Dans toute cette partie, on fixe un espace vectoriel normé $(E, ||\,.\,||)$.

C4. 65. DÉFINITION (VOISINAGE D'UN POINT). — *Soit $a \in E$. Un ensemble $V_a \subset E$ est appelé voisinage de a, s'il contient une boule ouverte de centre a.*

C4. 66. *Exemple.* —

1. Soit $a \in E$. Une boule ouverte de centre a est un voisinage de a.
2. Les intervalles $]0,1[$, $[0,1]$, $]0,1]$ sont des voisinages de $\frac{1}{2}$ dans $\mathbf{R}$.
3. $\{0\}$ n'est pas un voisinage de 0, puisque pour tour $r > 0$, $B(0,r) =]-r, r[\not\subset \{0\}$.

C4. 67. *Remarque.* — Soit $a \in E$. Un ensemble contenant un voisinage de a est un voisinage de a.

C4. 68. PROPOSITION (UNION QUELCONQUE ET INTERSECTION FINIE DE VOISINAGES D'UN POINT). — *Soit $a \in E$.*

1. *Une réunion de voisinages de a est un voisinage de a.*
2. *Une intersection finie de voisinages de a est un voisinage de a.*

Démonstration.

1. Soit $(V_i)_{i \in I}$ une famille de voisinages de a. Soit $i_0 \in I$. Il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset V_{i_0}$. Alors $B(a,r) \subset \bigcup_{i \in I} V_i$. Donc $\bigcup_{i \in I} V_i$ est un voisinage de a.
2. Soient $V_1, \ldots, V_r$ des voisinages de a. Alors :
$$\forall i \in [\![1, r]\!], \quad \exists \quad r_i > 0, \quad B(a, r_i) \subset V_i.$$
Posons alors $r = \min_{1 \leqslant i \leqslant r} r_i > 0$. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $B(a,r) \subset B(a, r_i) \subset V_i$ donc $B(a,r) \subset \bigcap_{i=1}^{r} V_i$.
Donc $\bigcap_{i=1}^{r} V_i$ est un voisinage de a.

Q.E.D.

C4. 69. *Remarque (La finitude est essentielle dans 2 de la précédente proposition).* — Une intersection infinie de voisinages peut ne pas être un voisinage. Par exemple, posons $E = \mathbf{R}$, $a = 0$, et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $V_n = [-1/n, 1/n]$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$B(0, 1/n) =]-1/n, 1/n[\subset V_n$$

donc V_n est un voisinage de 0. Or, $\bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} V_n = \{0\}$ qui n'est pas un voisinage de 0.

C4. 70. Définition (Partie ouverte, partie fermée). —

1. *Une partie $U \subset E$ est un ouvert de $(E, ||\,.\,||)$ si U est un voisinage de tous ses points, ie. si :*

$$\forall x \in U, \quad \exists r_x > 0, \quad B(x, r_x) \subset U.$$

2. *Une partie $F \subset E$ est un fermé de $(E, ||\,.\,||)$ si son complémentaire $E \setminus F$ est un ouvert.*

C4. 71. *Exemple.* —

1. E et $\emptyset$ sont des ouverts de $(E, ||\,.\,||)$.
2. Si $a \in E$, $\{a\}$ est un fermé de $(E, ||\,.\,||)$.
3. Si $E = \mathbf{R}$, l'ensemble $]0, 1[$ est un ouvert, l'ensemble $[0, 1]$ est un fermé, l'ensemble $[0, 1[$ n'est ni ouvert, ni fermé.

C4. 72. *Remarque.* — Une partie de E peut très bien n'être ni ouverte, ni fermée. C'est le cas pour $[-1, 2[$ dans $(\mathbf{R}, |\cdot|)$.

C4. 73. Proposition (Propriété topologique des boules). — *Une boule ouverte est un ouvert, une boule fermée est un fermé.*

Démonstration. Soit $a \in E$, soit $r > 0$.

- *$B(a, r)$ est un ouvert*
  Soit $x \in B(a, r)$. Montrons qu'il existe une boule ouverte centrée en x contenue dans $B(a, r)$. Posons $r_x = r - ||\,a - x\,|| > 0$ (faire une figure pour comprendre ce choix). Montrons que $B(x, r_x) \subset B(a, r)$. Soit $y \in B(x, r_x)$. Par l'inégalité triangulaire :

$$||\,y - a\,|| = ||\,y - x + x - a\,|| \leqslant ||\,y - x\,|| + ||\,x - a\,|| < r_x + ||\,a - x\,|| = r$$

  donc $y \in B(a, r)$ et $B(x, r_x) \subset B(a, r)$. La boule $B(a, r)$ est bien un voisinage de x, et ceci étant vrai pour tout $x \in B(a, r)$, la boule $B(a, r)$ est un ouvert.
- *$\overline{B(a, r)}$ est un fermé*
  Montrons que $E \setminus \overline{B}(a, r)$est un ouvert. Soit $x \in E \setminus \overline{B(a, r)}$. Montrons qu'il existe une boule ouverte de centre x contenue dans $E \setminus \overline{B(a, r)}$. Posons $r_x = ||\,x - a\,|| - r > 0$ (faire une figure pour comprendre ce choix). Montrons que $B(x, r_x) \subset E \setminus \overline{B(a, r)}$. Soit $y \in B(x, r_x)$. Par la deuxième inégalité triangulaire :

$$||\,y - a\,|| = ||\,y - x + x - a\,|| \geqslant ||\,x - a\,|| - ||\,y - x\,|| > ||\,x - a\,|| - r_x = r$$

  donc $y \in E \setminus \overline{B(a, r)}$. Ainsi, $B(x, r_x) \subset E \setminus \overline{B(a, r)}$ et $E \setminus \overline{B(a, r)}$ est bien un voisinage de x. D'où le résultat.

Q.E.D.

C4. 74. Proposition (Union quelconque et intersection finie d'ouverts). —

1. *Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.*
2. *Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.*

Démonstration.

1. Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts. Soit $x \in U = \bigcup_{i\in I} U_i$. Il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in U_{i_0}$. Comme U_{i_0} est un ouvert, c'est un voisinage de x. Donc, comme $U_{i_0} \subset U$, U est un voisinage de x.
   Ceci étant vrai pour tout $x \in U$, U est un ouvert.
2. Soient $U_1, \dots, U_r$ des ouverts de E. Soit $x \in U = \bigcap_{i=1}^{r} U_i$. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, U_i est un voisinage de x. Donc, d'après la proposition **C4.68**, U est un voisinage de x. Ceci étant vrai pour tout $x \in U$, U est bien un ouvert.

Q.E.D.

C4. 75. Corollaire (Union finie et intersection quelconque de fermés). —

1. *Une réunion finie de fermés est un fermé.*
2. *Une intersection de fermés est un fermé.*

Démonstration.

1. Soient $F_1, \dots, F_r$ des fermés, alors pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $U_i = E \setminus F_i$ est un ouvert. Donc d'après la proposition précédente :

$$\bigcap_{i=1}^{r} U_i = E \setminus \bigcup_{i=1}^{r} F$$

   est un ouvert, donc $\bigcup_{i=1}^{r} F_i$ est un fermé.
2. Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés, alors pour tout $i \in I$, $U_i = E \setminus F_i$ est un ouvert, donc d'après la proposition précédente :

$$\bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{i\in I} E \setminus F_i = E \setminus \bigcap_{i\in I} F_i$$

   est un ouvert, donc $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un fermé.

Q.E.D.

C4. 76. *Remarque (Importance de l'hypothèse de finitude).* —

1. Une intersection infinie d'ouverts n'est pas nécessairement un ouvert. Par exemple, $\bigcap_{n\geqslant 1} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\}$.
2. Une réunion infinie de fermés n'est pas nécessairement un fermé. Par exemple

$$\bigcup_{n\geqslant 1} \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] =]-1, 1[\,.$$

C4. 77. DÉFINITION (POINT ADHÉRENT, ADHÉRENCE D'UNE PARTIE). — *Soit A une partie non vide de E.*

1. *Soit $a \in E$. On dit que a est adhérent à A, si tout voisinage de a rencontre A, ie. si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

2. *L'ensemble des points adhérents à A est appelé adhérence de A, et noté $\overline{A}$.*
   Par convention, $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

C4. 78. *Remarque (Une partie est toujours contenue dans son adhérence).* — Une partie A de E est contenue dans son adhérence, i.e. $A \subset \overline{A}$.

C4. 79. *Exemple.* —

1. L'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même centre et de même rayon. Donc pour tout $a \in E$, $r > 0$:
$$\overline{B(a, r)} = B_f(a, r)$$
2. L'adhérence de $]0, 1]$ est $[0, 1]$ dans $(\mathbf{R}, |\cdot|)$.

C4. 80. DÉFINITION (PARTIE DENSE). — *Une partie A de E est dite dense dans E si $\overline{A} = E$, ie. si :*

$$\forall x \in E, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists a \in A \textit{ tel que } a \in B(x, \varepsilon).$$

C4. 81. *Exemple.* —

1. $\mathbb{Q}$ est dense dans $(\mathbf{R}, |\cdot|)$.
2. L'ensemble $\left\{ \dfrac{p}{2^q} \ : \ (p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N} \right\}$ est dense dans $(\mathbf{R}, |\cdot|)$.
3. $\mathbb{Q}^n$ est dense dans $(\mathbf{R}^n, ||\,.\,||_\infty)$.

C4. 82. THÉORÈME (CARACTÉRISATION DES FERMÉS VIA L'ADHÉRENCE). — *Soit A une partie non vide de E.*

1. *$\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.*
2. $\overline{A} = \displaystyle\bigcap_{A \subset F \text{ , } F \textit{ fermé}} F$
3. *L'ensemble A est fermé si et seulement si $\overline{A} = A$.*

Démonstration.

- *Commençons par montrer que $\overline{A}$ est un fermé.*
  Montrons que $E \setminus \overline{A}$ est un ouvert.
  Soit $x \in E \setminus \overline{A}$. Comme $x \notin \overline{A}$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \cap A = \emptyset$. Montrons que $B(x, r) \subset E \setminus \overline{A}$.
  Soit $y \in B(x, r)$, posons $r' = r - ||\,y - x\,|| > 0$ (faire une figure pour comprendre ce choix). On observe que $B(y, r') \subset B(x, r)$ (preuve laissée en exercice). Donc $B(y, r') \subset E \setminus A$, donc $y \notin \overline{A}$.
  Ceci étant vrai pour tout $y \in B(x, r)$, alors $B(x, r) \cap \overline{A} = \emptyset$, soit encore $B(x, r) \subset E \setminus \overline{A}$. Donc $E \setminus \overline{A}$ est un ouvert, donc $\overline{A}$ est un fermé.

- *Nous montrerons ensuite que $\overline{A}$ le plus petit fermé contenant A.*
  Montrons maintenant que $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A, c'est-à-dire que tout fermé contenant A contient aussi $\overline{A}$.
  Soit F un fermé contenant A. Montrons que $E \setminus F \subset E \setminus \overline{A}$. Soit $x \in E \setminus F$, comme F est un fermé, $E \setminus F$ est un ouvert, donc il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset E \setminus F$. Comme $A \subset F$, alors $E \setminus F \subset E \setminus A$, donc $B(x, r) \subset E \setminus A$, donc $B(x, r) \cap A = \emptyset$, donc $x \in E \setminus \overline{A}$. Ainsi, nous venons de montrer que $E \setminus F \subset E \setminus \overline{A}$, d'où $\overline{A} \subset F$.

- *Montrons que $\overline{A}$ est l'intersection de tous les fermés contenant A*
  Comme $\overline{A}$ est un fermé contenant A, $\displaystyle\bigcap_{A \subset F,\ F \text{ fermé}} F \subset \overline{A}$.
  Or $\displaystyle\bigcap_{A \subset F,\ F \text{ fermé}} F$ est un fermé (comme intersection quelconque de fermés) contenant A. Comme tout fermé contenant A contient aussi $\overline{A}$, il vient $\overline{A} \subset \displaystyle\bigcap_{A \subset F,\ F \text{ fermé}} F$.
  D'où l'égalité.

- *Terminons en montrant que A est fermé si et seulement si $\overline{A} = A$.*
  Si A est fermé, A est un fermé contenant A, donc $\overline{A} \subset A$. Comme $A \subset \overline{A}$ dans tous les cas, $\overline{A} = A$.
  Réciproquement, si $A = \overline{A}$, comme $\overline{A}$ est un fermé, alors A est un fermé.

Q.E.D.

C4. 83. Théorème (Caractérisation séquentielle de l'adhérence). — *Soit A une partie non vide de E.*

1. *Un élément $a \in E$ est adhérent à A si et seulement si a est limite d'une suite d'éléments de A, i.e. si et seulement si :*

$$\text{il existe une suite } (a_n)_{n \in \mathbf{N}} \text{ d'éléments de } A \text{ telle que } a_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} a.$$

2. *L'ensemble A est fermé si et seulement si toute suite d'éléments de A qui converge dans E a sa limite dans A.*

Démonstration.

1. Posons A' l'ensemble des points $x \in E$ tels qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de A convergeant vers x. Montrons que $\overline{A} = A'$.
   $\boxed{\subset}$ Soit $x \in \overline{A}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $B\left(x, \dfrac{1}{n+1}\right) \cap A \neq \emptyset$, donc il existe $a_n \in A$ tel que
   $$0 \leqslant ||\, x - a_n \,|| \leqslant \frac{1}{n+1}.$$
   Alors, par le théorème d'encadrement pour les suites réelles, $||\, x - a_n \,|| \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$. La suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge donc vers x. Ainsi $x \in A'$.
   $\boxed{\supset}$ Soit $x \in A'$. Il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x. Soit alors $r > 0$. Il existe un $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $||\, x - a_n \,|| < r$, i.e. $a_n \in B(x, r) \cap A$. Ainsi, pour tout $r > 0$, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$, donc $x \in \overline{A}$.

2. Cette assertion découle du fait que A est fermé si et seulement si $\overline{A} = A$.

Q.E.D.

C4. 84. Corollaire (Caractérisation séquentielle de la densité). — *Une partie $A \subset E$ est dense dans E si et seulement si tout élément de E est limite d'une suite d'éléments de A, i.e. si et seulement si :*

$$\forall x \in E,\ \exists (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}} \text{ telle que } a_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} x.$$

Démonstration. Cette assertion découle de la définition de la densité et de la caractérisation séquentielle de l'adhérence.

Q.E.D.

C4. 85. *Exercice.* — Munissons $E = \mathbf{R}[X]$ de la norme N définie par, pour tout $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$, $N(P) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|}{k+1}$. Montrer que l'ensemble :

$$A = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \in \mathbf{R}[X] \ :\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k = 0 \right\}$$

est dense dans E.

C4. 86. Définition (Point intérieur à un ensemble, intérieur d'un ensemble). — *Soit A une partie non vide de E, soit $a \in E$.*

1. *Le point a est intérieur à A si A est un voisinage de a.*
   De manière équivalente, a est intérieur à A s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$.
2. *L'ensemble des points intérieurs à A est appelé intérieur de A, et noté $\overset{o}{A}$.*
   Par convention, $\overset{o}{\emptyset} = \emptyset$.

C4. 87. Théorème (Caractérisation des ouverts). — *Soit A une partie non vide de E.*

1. *$\overset{o}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A.*
2. $\overset{o}{A} = \bigcup_{U\subset A\ ,\ U \text{ ouvert}} U.$
3. *A est ouvert si et seulement si $\overset{o}{A} = A$.*

Démonstration. • *Commençons par montrer que $\overset{o}{A}$ est un ouvert.*

Soit $a \in \overset{o}{A}$. Comme A est un voisinage de a, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$.

Pour tout $x \in B(a, r)$, $B(a, r)$ est un voisinage de x, donc A est un voisinage de x, donc $x \in \overset{o}{A}$.

Ainsi, $B(a, r) \subset \overset{o}{A}$. Donc $\overset{o}{A}$ est un voisinage de tous ses points, c'est donc un ouvert.

- *Nous montrons ensuite que c'est le plus grand ouvert contenu dans A.*
  Soit U un ouvert contenu dans A. Soit $a \in U$. Comme U est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset U$, donc $B(a,r) \subset A$, donc $a \in \overset{o}{A}$.
  Ainsi, $U \subset \overset{o}{A}$.
- *Montrons que $\overset{o}{A}$ est la réunion de tous les ouverts contenus dans A*
  $\overset{o}{A}$ est un ouvert contenu dans A, donc $\overset{o}{A} \subset \displaystyle\bigcup_{U \subset A,\ U \text{ ouvert}} U$.
  Or, $\displaystyle\bigcup_{U \subset A,\ U \text{ ouvert}} U$ est un ouvert (comme réunion quelconque d'ouverts) qui est contenu dans A.
  Comme tout ouvert contenu dans A est contenu dans $\overset{o}{A}$, $\displaystyle\bigcup_{U \subset A,\ U \text{ ouvert}} U \subset \overset{o}{A}$.
  D'où l'égalité.
- *Terminons en montrant que A est ouvert si et seulement si $\overset{o}{A} = A$.*
  Si A est un ouvert, A est un ouvert contenu dans A, donc $A \subset \overset{o}{A}$. Comme par ailleurs $\overset{o}{A} \subset A$, on a égalité.
  Réciproquement, si $A = \overset{o}{A}$, comme $\overset{o}{A}$ est un ouvert, alors A est un ouvert.

Q.E.D.

C4. 88. Théorème (Adhérence, intérieur et complémentaire). — *Soit A une partie non vide de E.*

1. *Le complémentaire de l'intérieur de A est égal à l'adhérence du complémentaire de A :*
$$E \setminus \overset{o}{A} = \overline{E \setminus A}.$$
2. *Le complémentaire de l'adhérence de A est égal à l'intérieur du complémentaire de A :*
$$E \setminus \overline{A} = \overset{\circ}{\overbrace{E \setminus A}}.$$

Démonstration. 1. Remarquons d'abord que $E \setminus \overset{o}{A}$ est un fermé contenant $E \setminus A$, donc $\overline{E \setminus A} \subset E \setminus \overset{o}{A}$.
Ensuite, soit $x \in E \setminus \overset{o}{A}$. Comme $x \notin \overset{o}{A}$, pour tout $r > 0$, $B(x,r) \not\subset A$, donc $B(x,r) \cap (E \setminus A) \neq \emptyset$.
Ainsi, $x \in \overline{E \setminus A}$. D'où $E \setminus \overset{o}{A} \subset \overline{E \setminus A}$.
D'où l'égalité.

2. Remarquons d'abord que $E \setminus \overline{A}$ est un ouvert contenu dans $E \setminus A$, donc $E \setminus \overline{A} \subset \overset{\circ}{\overbrace{E \setminus A}}$.
Réciproquement, soit $x \in \overset{\circ}{\overbrace{E \setminus A}}$. Il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset E \setminus A$. Donc $B(x,r) \cap A = \emptyset$, et $x \notin \overline{A}$, i.e. $x \in E \setminus \overline{A}$.
D'où l'inclusion réciproque, puis l'égalité.

Q.E.D.

C4. 89. DÉFINITION (POINT FRONTIÈRE, FRONTIÈRE D'UN ENSEMBLE). — *Soit A une partie non vide de E.*

1. *Soit $a \in E$. On dit que a est un point frontière à A si a appartient à l'adhérence de A et de son complémentaire $E \setminus A$.*
2. *L'ensemble des points frontières de A est appelé frontière de A, et noté $\mathrm{Fr}(A)$ ou ∂A.*

C4. 90. *Remarque.* — Soit A une partie non vide de E. Alors $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{o}{A}$.

C4. 91. *Exemple.* —

1. La frontière d'un intervalle $[a, b]$ vaut $\{a, b\}$. Idem pour la frontière de $]a, b[$, de $]a, b]$ ou de $[a, b[$.
2. La frontière de la boule euclidienne $B(a, r)$ de $(\mathbf{R}^n, ||\,.\,||_2)$ est l'ensemble

$$\{x \in \mathbf{R}^n \ : \ ||\, x - a \,||_2 = r\} \ .$$

   On parle de sphère euclidienne de centre a et de rayon r.
3. Plus généralement, la frontière d'une boule $B(a, r)$ est égale à $\{x \in E \mid \ ||\, x - a \,|| = r\}$.

C4. 92. DÉFINITION (TOPOLOGIE INDUITE). — *Soit A une partie non vide de E.*

1. *Soit $a \in A$. Si V_a est un voisinage de a dans E, $V_a \cap A$ est un voisinage relatif de a dans a.*
2. *Si U est un ouvert de E, $U \cap A$ est un ouvert relatif de A.*
3. *Si F est un fermé de E, $F \cap A$ est un fermé relatif de A.*

C4. 93. *Exemple.* —

1. Sur $\mathbf{R}$, si $A =]a, b[$ et $c \in A$, alors $[c, b[$ est un fermé relatif de A, $]c, b[$ est un ouvert relatif de A, $]a, b[$ est un fermé relatif et un ouvert relatif de A.
2. Sur $\mathbf{R}$, si $A = [a, b]$ et $c \in]a, b[$, alors $]c, b]$ est un ouvert relatif de A, $[c, b]$ est un fermé relatif de A, $[a, b]$ est un fermé relatif et un ouvert relatif de A.

C4. 94. DÉFINITION (PROPRIÉTÉ PORTANT SUR UNE FONCTION, VRAIE AU VOISINAGE D'UN POINT). — *Soit $f \in \mathcal{F}(A, F)$ une fonction définie sur une partie A de E.*

1. *On dit qu'une propriété $\mathcal{P}(f)$ portant sur la fonction f est vraie au voisinage de $a \in A$ s'il existe un voisinage $V_{a,A}$ relatif de a dans A tel que $\mathcal{P}(f)$ soit vraie sur $V_{a,A}$.*
2. *On dit qu'une propriété $\mathcal{P}(f)$ portant sur la fonction f est vraie au voisinage de l'infini s'il existe une boule $B(0, r)$ telle que $\mathcal{P}(f)$ soit vraie sur $E \setminus B(0, r)$.*

C4. 95. *Exemple.* —

1. On dit qu'une fonction f est positive au voisinage de $+\infty$ s'il existe $I =]c, +\infty[$ tel que f soit positive sur I.
2. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas bornée au voisinage de 0.

C4. 96. *Exercice.* — Soit $E = \mathbf{R}[X]$, $||\,.\,|| = ||\,.\,||_1$.

1. Montrer que $A = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \ : \ \sum_{k=0}^{\infty} a_k > 0 \right\}$ est un ouvert de $(E, ||\,.\,||)$. Déterminer $\overline{A}$.
2. Montrer que $B = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \ : \ \sum_{k=0}^{\infty} a_k = 0 \right\}$ est un fermé de $(E, ||\,.\,||)$. Déterminer $\overset{o}{B}$.

C4. 97. *Exercice.* — Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbf{R})$, $||\,.\,|| = ||\,.\,||_\infty$.

1. Montrer que $A = \{f \in E \ : \ f > 0\}$ est un ouvert de $(E, ||\,.\,||)$. Déterminer $\overline{A}$.
2. Montrer que $B = \{f \in E \ : \ f(0) = 0\}$ est un fermé de $(E, ||\,.\,||)$. Déterminer $\overset{o}{B}$.

C4. 98. *Exercice.* — Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbf{R})$, $||\,.\,|| = ||\,.\,||_1$.
Montrer que $A = \{f \in E \ : \ f(0) = 0\}$ est dense dans $(E, ||\,.\,||)$.

4 Étude locale d'une application, continuité

C4. 99. *Notation.* — $(E, ||\,.\,||_E)$ et $(F, ||\,.\,||_F)$ désignent deux espaces vectoriels normés et A une partie non vide de E.

C4. 100. Définition (Limite d'une fonction). — ***Soient a un point adhérent à A et $b \in F$. Soit une application $f \in \mathcal{F}(A, F)$.***
On dit que f a pour limite b en a si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \textit{ tel que } \forall x \in A \cap B(a, \eta),\ f(x) \in B(b, \varepsilon).$$

On écrit alors $f(x) \xrightarrow[x \longrightarrow a]{} b$.

C4. 101. *Remarque.* — Avec les notations de la précédente définition, la fonction f a pour limite b en a si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in A,\ ||\,x - a\,||_E < \eta \Longrightarrow ||\,f(x) - b\,||_F < \varepsilon.$$

ou encore si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ tel que } f(A \cap B(a, \eta)) \subset B(b, \varepsilon).$$

C4. 102. Proposition (Uncité de la limite). — ***Soient a un point adhérent à A et $b_1, b_2 \in F$. Soit une application $f \in \mathcal{F}(A, F)$. Si $f(x) \xrightarrow[x \longrightarrow a]{} b_1$ et $f(x) \xrightarrow[x \longrightarrow a]{} b_2$, alors $b_1 = b_2$.***

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons $b_1 \neq b_2$, i.e. $\varepsilon := ||b_1 - b_2||_F > 0$.
Il existe $\eta_1 > 0$ tel que $f(A \cap B(a, \eta_1)) \subset B(b_1, \varepsilon/3)$. De même, il existe $\eta_2 > 0$ tel que $f(A \cap B(a, \eta_2)) \subset B(b_2, \varepsilon/3)$.
Posons alors $\eta := \min(\eta_1, \eta_2)$. Comme $B(a, \eta) = B(a, \eta_1) \cap B(a, \eta_2)$, alors :

$$f(A \cap B(a, \eta)) \subset B(b_1, \varepsilon/3) \cap B(b_2, \varepsilon/3).$$

Soit alors $x \in B(a, \eta) \cap A$, qui est ensemble non vide car a est adhérent à A. On a par l'inégalité triangulaire :

$$\varepsilon = ||\,b_1 - b_2\,||_F = ||\,b_1 - f(x) + f(x) - b_2\,||_F \leqslant ||\,b_1 - f(x)\,||_F + ||\,f(x) - b_2\,||_F < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Comme $\varepsilon > 0$, il vient $1 < \dfrac{2}{3}$, ce qui est faux. Q.E.D.

C4. 103. *Remarque.* — Si f a pour limite b en a, on dit que b est la limite de f en a, et on note $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = b$.

C4. 104. Définition (Continuité). — *Soient $a \in A$ et $f : A \longrightarrow F$.*

1. *On dit que f est continue en a si :*
$$f(x) \xrightarrow[x \longrightarrow a]{} f(a).$$
2. *On dit que f est continue sur A si f est continue en tout point de A.*

C4. 105. Proposition (Composition de limites). — *Soit $(G, ||\,.\,||_G)$ un espace vectoriel normé, soit $B \subset F$ et soient $f \in \mathcal{F}(A, F)$, $g \in \mathcal{F}(B, G)$.*
Supposons que $f(A) \subset B$.
L'application $g \circ f$ est bien définie et pour tout $a \in \overline{A}$, $b \in \overline{B}$ et $c \in G$:
$$\left.\begin{array}{l} f(x) \xrightarrow[x \longrightarrow a]{} b \\[2em] g(y) \xrightarrow[y \longrightarrow b]{} c \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad g \circ f(x) \xrightarrow[x \longrightarrow a]{} c.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$.
Comme $g(x) \xrightarrow[x \longrightarrow b]{} c$, il existe $\eta > 0$ tel que $g(B \cap B(b, \eta)) \subset B(c, \varepsilon)$.
Comme $f(x) \xrightarrow[x \longrightarrow a]{} b$, il existe $\alpha > 0$ tel que $f(A \cap B(a, \alpha)) \subset B(b, \eta) \cap B$ (ici nous utilisons l'hypothèse $f(A) \subset B$).
Donc $g \circ f(A \cap B(a, \alpha)) \subset B(c, \varepsilon)$.
Ainsi $g \circ f(x) \xrightarrow[x \longrightarrow a]{} c$. Q.E.D.

C4. 106. Théorème (Caractérisation séquentielle de la limite). — *Soient $a \in \overline{A}$, $b \in F$ et $f \in \mathcal{F}(A, F)$.*
Alors $f(x) \xrightarrow[x \longrightarrow a]{} b$ si et seulement si pour toute suite (x_n) d'éléments de A :
$$x_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} a \quad \Longrightarrow \quad f(x_n) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} b.$$

Démonstration. Procédons par double implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit (x_n) une suite d'éléments de A convegeant vers a. Soit $\varepsilon > 0$.
Comme $f(x) \xrightarrow[x \longrightarrow a]{} b$, il existe $\eta > 0$ tel que $f(A \cap B(a, \eta)) \subset B(b, \varepsilon)$.
Comme $x_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} a$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que :
$$\forall n \geqslant N, \quad ||\, x_n - a \,||_E < \eta$$
soit $x_n \in A \cap B(a, \eta)$. Alors pour tout $n \geqslant N$, $f(x_n) \in B(b, \varepsilon)$, soit $||\, f(x_n) - b \,||_F < \varepsilon$.
Donc $f(x_n) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} b$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Raisonnons par contraposée et supposons que $f(x)$ ne converge pas vers b quand x tend vers a.
Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, $f(A \cap B(a, \eta)) \not\subset B(b, \varepsilon)$.
Donc pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe $x_n \in A \cap B(a, 1/n)$ tel que $f(x_n) \notin B(b, \varepsilon)$, ie $||\, f(x_n) - b \,||_F \geqslant \varepsilon$.

— La suite (x_n) converge vers a, puisque pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $||x_n - a||_E < \frac{1}{n}$ (théorème d'encadrement pour les suites réelles).

— La suite $(f(x_n))$ ne converge pas vers b, car pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $||\, f(x_n) - b\,||_F \geqslant \varepsilon$ (faire un bref raisonnement par l'absurde pour s'en convaincre).

Q.E.D.

C4. 107. *Remarque.* — Si f a pour limite b en a, alors pour toute suite (x_n) convergeant vers a :

$$(f(x_n)) \text{ converge et } f\left(\lim_{n\to+\infty} f(x_n)\right) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} f(x_n).$$

C4. 108. **Définition (Notations de Landau).** — ***Soient $f \in \mathcal{F}(A, F)$ et $\varphi \in \mathcal{F}(A, \mathbf{R})$. Soit $a \in \overline{A}$. Alors :***

1. $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(\varphi)$ ***si :***

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in A \cap B(a, \eta), \quad ||\, f(x)\,||_F \leqslant \varepsilon\,|\varphi(x)|\,.$$

Lorsque φ ne s'annule pas, ceci équivaut à $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \xrightarrow[x\longrightarrow a]{} 0.$

2. $f \underset{a}{=} \mathrm{O}(\varphi)$ ***si :***

$$\exists M > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in A \cap B(a, \eta), \quad ||\, f(x)\,||_F \leqslant M\,|\varphi(x)|\,.$$

Lorsque φ ne s'annule pas, ceci équivaut à $\frac{f}{\varphi}$ ***est bornée au voisinage de*** a.

C4. 109. **Définition (Fonctions équivalentes).** — ***Soient $f, g \in \mathcal{F}(A, F)$ et $a \in \overline{A}$. On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de a, et on écrit $f \underset{a}{\sim} g$, si***

$$f - g \underset{a}{=} \mathrm{o}\left(||\, g\,||_F\right)$$

C4. 110. **Proposition ($\underset{a}{\sim}$ est une relation d'équivalence).** — ***Soit $a \in \overline{A}$. La relation $\underset{a}{\sim}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{F}(A, F)$.***

Démonstration. Il s'agit de montrer que la relation $\underset{a}{\sim}$ est réflexive, symétrique et transitive.

- La réflexivité est évidente.
- Pour la symétrie, soient $(f, g) \in \mathcal{F}(A, F)^2$ telles que $f \underset{a}{\sim} g$, ie $f - g \underset{a}{=} o\left(||\, g\,||_F\right)$ au voisinage de a.

  Ainsi, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in A \cap B(a, \eta)$, $||\, f(x) - g(x)\,|| \leqslant \frac{||\, g(x)\,||_F}{2}$. Donc, pour tout $x \in B(a, \eta) \cap A$:

$$||\, f(x)\,|| = ||\, f(x) - g(x) + g(x)\,||_F \geqslant ||\, g(x)\,||_F - ||\, f(x) - g(x)\,||_F \geqslant \frac{||\, g(x)\,||_F}{2}.$$

Donc pour tout $x \in B(a,\eta) \cap A$, $||\, g(x)\,||_F \leqslant 2\,||\, f(x)\,||_F$. On en déduit donc que $g - f \underset{a}{=} o(||\, f\,||)$ au voisinage de a. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in B(a,\alpha) \cap A$:

$$||\, g(x) - f(x)\,||_F \leqslant \varepsilon \frac{||\, g(x)\,||_F}{2}.$$

Posons $\beta = \min(\eta, \alpha)$, pour tout $x \in A \cap B(a,\beta)$, $||\, g(x) - f(x)\,||_F \leqslant \varepsilon\,||\, f(x)\,||_F$. Donc $g \underset{a}{\sim} f$.

- Montrons que $\underset{a}{\sim}$ est transitive. Soient $f, g, h \in \mathcal{F}(A,F)$ telles que $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$. Alors

$$f - h \underset{a}{=} (f-g) + (g-h) = o\left(||\, g\,||_F\right) + o\left(||\, h\,||_F\right).$$

On montre comme dans la preuve de la symétrie que dans un voisinage de a, $||\, g\,||_F \leqslant 2\,||\, h\,||_F$, puis que $f - h \underset{a}{=} o\left(||\, h\,||_F\right)$, d'où $f \underset{a}{\sim} h$.

Q.E.D.

C4. 111. Proposition (Espace vectoriel des fonctions continues). — *L'ensemble $\mathcal{C}^0(A,F)$ des fonctions continues sur A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(A,F)$.*

Démonstration.
- Remarquons d'abord que la fonction nulle est continue sur A.
- Soit alors $(f,g) \in \mathcal{C}^0(A,F)^2$, soit $(\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$, soit $a \in A$. Montrons que $\lambda f + \mu g$ est continue en a, en utilsant la caractérisation séquentielle de la limite.
Soit (a_n) une suite d'éléments de A convergeant vers a. Par continuité de f et g en a, il vient :

$$f(a_n) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} f(a) \qquad \text{et} \qquad g(a_n) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} g(a).$$

Par opération sur les limites de suites, nous en déduisons :

$$(\lambda f + \mu g)(a_n) = \lambda f(a_n) + \mu g(a_n) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \lambda f(a) + \mu g(a) = (\lambda f + \mu g)(a).$$

Ceci étant vrai pour toute suite (a_n) d'éléments de A convergeant vers a :

$$(\lambda f + \mu g)(x) \xrightarrow[x \longrightarrow a]{} (\lambda f + \mu g)(a).$$

Q.E.D.

C4. 112. Proposition (D'autres modes de construction d'applications continues). —

1. *Composition*
Soit $(G, ||\,.\,||_G)$ un espace vectoriel normé, soit $B \subset F$, et soient $f \in \mathcal{C}^0(A,F)$, $g \in \mathcal{C}^0(B,G)$ telles que $f(A) \subset B$.
Alors $g \circ f \in \mathcal{C}^0(A,G)$.
2. *Restriction*
Soit $f \in \mathcal{C}^0(A,F)$ soit $A' \subset A$. Alors $f \in \mathcal{C}^0(A',F)$.
3. *n-uplet*
Soient $(F_1, ||\,.\,||_1), \ldots, (F_n, ||\,.\,||_n)$ un nombre fini d'espaces vectoriels normés. Notons $(F, ||\,.\,||_F)$ l'espace vectoriel normé produit. Soit $f = (f_1, \ldots, f_n) \in \mathcal{F}(A,F)$. Alors :

$$f \in \mathcal{C}^0(A,F) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i \in [\![1,n]\!],\ f_i \in \mathcal{C}^0(A,F).$$

Démonstration. 1. Conséquence immédiate de la Proposition **C4.105**.

2. Immédiat.
3. S'obtient simplement par caractérisation séquentielle de la limite et par caractérisation de la convergence dans les espaces produits (Théorème **C4.51**).

Q.E.D.

C4. 113. Théorème (Continuité, densité et prolongement d'identité). — *Soient $f,g \in \mathcal{C}^0(A,F)$. Soit $B \subset A$ une partie dense dans A.*
Si f et g coïncident sur B (i.e. si $\forall x \in B$, $f(x) = g(x)$) alors $f = g$.

Démonstration. Soit $x \in A$. Par densité de B dans A, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de B telle que $x_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} a$.
Par hypothèse, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(x_n) = g(x_n)$. Mais par ailleurs, par caractérisation séquentielle de la continuité :

$$f(x_n) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} f(x) \qquad \text{et} \qquad g(x_n) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} g(x).$$

Donc par unicité de la limite, $f(x) = g(x)$.
Ceci étant vrai pour tout $x \in A$, $f = g$. Q.E.D.

C4. 114. Théorème (Caractérisation des applications continues via les ouverts). — *Soit $f \in \mathcal{F}(A,F)$. Alors f est continue sur A si et seulement si pour tout ouvert U de F, $f^{-1}(U)$ est un ouvert relatif de A.*

Démonstration. Procédons par double implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit U un ouvert de F. Montrons que $f^{-1}(U)$ est un ouvert relatif de A.
Soit $x \in f^{-1}(U)$. Comme $f(x) \in U$ et U est un ouvert de F, il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$B(f(x),\varepsilon) \subset U.$$

Comme f est continue en x, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$f(A \cap B(x,\eta)) \subset B(f(x),\varepsilon) \subset U$$

donc $A \cap B(x,\eta) \subset f^{-1}(U)$. On en déduit que $f^{-1}(U)$ est un voisinage relatif de x.
Ceci étant vrai pour tout $x \in f^{-1}(U)$, on en déduit que $f^{-1}(U)$ est un ouvert relatif.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit $x \in A$, soit $\varepsilon > 0$. Posons $U = B(f(x),\varepsilon)$.
Comme U est un ouvert, $f^{-1}(U)$ est un ouvert relatif de A, donc il existe $\eta > 0$ tel que $B(x,\eta) \cap A \subset f^{-1}(U)$, d'où $f(A \cap B(x,\eta)) \subset B(f(x),\varepsilon)$. Ainsi, f est continue en x.
Ceci étant vrai pour tout $x \in A$, f est continue sur A.

Q.E.D.

C4. 115. *Exercice.* —

1. Soit $\in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$. Montrer que $\{x \in [0,1] \ : \ f(x) > 0\}$ est un ouvert relatif de $[0,1]$.
2. Plus généralement, si $f \in \mathcal{C}^0(A, F)$, montrer que $\{x \in A \ : \ f(x) \neq 0\}$ est un ouvert relatif de A.

5 Applications linéaires continues

C4. 116. Théorème (Caractérisation des applications linéaires continues. —) *Soient* $(E, ||\,.\,||_E)$ *et* $(F, ||\,.\,||_F)$ *deux espaces vectoriels normés. Soit* $u \in \mathcal{L}(E,F)$ *une application linéaire. Les cinq propositions suivantes sont équivalentes.*

1. u *est continue sur* E.
2. u *est continue en* 0.
3. *La restriction de* u *à la boule unité fermée est bornée.*
4. *Il existe un réel* $C > 0$ *tel que* $\forall x \in E$, $||\,u(x)\,||_F \leqslant C\,||\,x\,||_E$.
5. u *est lipschitzienne.*

C4. 117. *Exemple.* —

1. Tout endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ est continu pour la norme $||\,.\,||_\infty$.
2. Soit $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire sur un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E, de norme associée $||\,.\,||$. Alors pour tout $x \in E$, l'application :
$$(x|\cdot)\colon E \longrightarrow \mathbf{R}\ ;\ y \mapsto (x|y)$$
est continue.
3. L'application évaluation en 0 :
$$ev_0\colon \mathcal{C}^0([0,1],\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}\ ;\ f \mapsto f(0)$$
est continue pour la norme $||\,.\,||_\infty$. En revanche, elle n'est pas continue pour la norme $||\,.\,||_1$.
4. L'application évaluation en 2 :
$$ev_2\colon \mathbf{R}[X] \longrightarrow \mathbf{R}\ ;\ P \mapsto P(2)$$
n'est pas continue pour la norme $||\,.\,||_1$. En effet, $||\,X^n\,||_1 = 1$ alors que $\varphi(X^n) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty$.

C4. 118. *Exercice.* — Soient $(E, ||\,.\,||)$ un espace vectoriel normé et $\varphi \in E^*$ une forme linéaire.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est fermé si et seulement si φ est continue.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est dense dans E si et seulement si φ n'est pas continue.

C4. 119. Théorème (Caractérisation de l'équivalence des normes). — *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, soient N_1 et N_2 deux normes sur E. Les trois propositions suivantes sont équivalentes.*

1. *N_1 et N_2 sont équivalentes.*
2. *(E, N_1) et (E, N_2) ont les mêmes parties ouvertes.*
3. *L'application identité de E est continue en tant qu'application de (E, N_1) vers (E, N_2), et en tant qu'application de (E, N_1) vers (E, N_2).*

C4. 120. Théorème (Espace vectoriel des application linéaires continues). — *Soient $(E, ||\,.\,||_E)$ et $(F, ||\,.\,||_F)$ deux espaces vectoriels normés. Notons $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de $(E, ||\,.\,||_E)$ vers $(F, ||\,.\,||_F)$.*
Alors $\mathcal{L}_c(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_c(E, F)$.

C4. 121. Théorème (Composition des applications linéaires continues). — *Soient $(E, ||\,.\,||_E)$, $(F, ||\,.\,||_F)$, $(G, ||\,.\,||_G)$ trois espaces vectoriels normés. Soient $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}_c(F, G)$. Alors :*

$$v \circ u \in \mathcal{L}_c(E, G)$$

C4. 122. Définition (Algèbre normée unitaire). — *Soient $\mathcal{A}$ une K-algèbre normée unitaire et $||\,.\,||$ une norme sur $\mathcal{A}$. On dit que $(\mathcal{A}, ||\,.\,||)$ est une algèbre normée unitaire si :*

$$\forall (x, y) \in \mathcal{A}^2,\ ||\,x.y\,|| \leqslant ||\,x\,||\,.\,||\,y\,||\,.$$

C4. 123. *Exercice.* — Soit $(\mathcal{A}, ||\,.\,||)$ une algèbre unitaire normée. Montrer que l'application :

$$\pi \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{A} \times \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ (x, y) & \longmapsto & x \times y \end{array} \right.$$

est continue.

C4. 124. Proposition (Un exemple d'algèbre normée unitaire). — *Soient $(E, ||\,.\,||_E)$ un espace vectoriel normé et $A \subset E$. Alors $(\mathcal{B}(A, \mathbf{K}), ||\,.\,||_\infty)$ est une algèbre unitaire normée.*

C4. 125. *Exemple.* — Pour tout $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ on pose :

$$||\,A\,|| := \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$$

Démontrer que $(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), ||\cdot||)$ est une algèbre unitaire normée.

C4. 126. Proposition (Applications bilinéaires continues). — *Soient* $(E, ||\,.\,||_E)$, $(F, ||\,.\,||_F)$, $(G, ||\,.\,||_G)$ *trois espaces vectoriels normés. Soit*

$$B\colon E \times F \to G$$

une application bilinéaire. Alors B *est continue si et seulement s'il existe un réel* $C > 0$ *tel que :*

$$\forall (x,y) \in E \times F, \quad ||\,B(x,y)\,||_G \leqslant C\,.\,||\,x\,||_E\,.\,||\,y\,||_F\,.$$

Démonstration. Rappelons que la norme placée sur $E \times F$ est la norme produit $||\cdot||$, définie par :

$$\forall\,(x,y) \in E \times F, \quad ||\,(x,y)\,|| := \max\left(||\,x\,||_E\,,||\,y\,||_F\right).$$

Procédons par double implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons l'application B continue. Alors B est continue en tout point de $E \times F$, en particulier continue au point $(0_E, 0_F)$. Remarquons que, B étant bilinéaire, $B\,(0_E, 0_F) = 0_G$. Dans la définition de la continuité de B en $(0_E, 0_F)$, nous spécifions ε à $1 > 0$ pour obtenir qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in E \times F$:

$$\underbrace{||\,(x,y)\,|| \leqslant \alpha}_{||\,(x,y)-(0_E,0_F)\,|| \leqslant \alpha} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{||\,B(x,y)\,||_G \leqslant 1}_{||\,B(x,y)-B(0_E,0_F)\,||_G \leqslant 1}\,.$$

- Soient x un vecteur de E non nul et y un vecteur de F non nul. Alors le vecteur $\left(\dfrac{\alpha}{||\,x\,||_E}\,x\,,\,\dfrac{\alpha}{||\,y\,||_F}\,y\right)$ de $E \times F$ a une norme $||\cdot||$ égale à α. Donc :

$$\left|\left|\,B\left(\frac{\alpha}{||\,x\,||_E}\,x\,,\,\frac{\alpha}{||\,y\,||_F}\,y\right)\right|\right|_G \leqslant 1\,.$$

  En utilisant la bilinéarité de B, l'homogénéité de la norme $||\cdot||_G$ et le fait que α, $||\,x\,||_E$ et $||\,y\,||_F$ sont strictement positifs, nous en déduisons :

$$(\star) \qquad\qquad ||\,B(x,y)\,||_G \leqslant \frac{1}{\alpha^2}\;||\,x\,||_E\;||\,y\,||_F\,.$$

- Si $(x,y) \in E \times F$ est tel que $x = 0_E$ ou $y = 0_F$, alors la bilinéarité de B livre $B(x,y) = 0_G$. L'inégalité $(\star)$ s'étend donc à tous les vecteurs (x,y) de $E \times F$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons qu'il existe un réel $C > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in E \times F, \quad ||\,B(x,y)\,||_G \leqslant C\;||\,x\,||_E\;||\,y\,||_F\,.$$

Soient $(x,y) \in E \times F$. Démontrons que B est continue en (x,y), en appliquant le critère séquentiel de continuité. Soit $((x_n, y_n))_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $E \times F$ telle que :

$$(x_n, y_n) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{||\cdot||} (x,y)\,.$$

D'après le Théorème **C4.51**, nous en déduisons :

$$x_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{||\cdot||_E} x \quad \text{et} \quad y_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{||\cdot||_F} y\,.$$

Soient $n \in \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned} \|\, B(x_n, y_n) - B(x,y) \,\|_G &\leqslant \|\, B(x_n, y_n) - B(x_n, y) \,\|_G + \|\, B(x_n, y) - B(x,y) \,\|_G && \text{[Inégalité triang} \\ &= \|\, B(x_n, y_n - y) \,\|_G + \|\, B(x_n - x, y) \,\|_G && [B \text{ est bilinéaire}] \\ &\leqslant C \;\|\, x_n \,\|_E \;\|\, y_n - y \,\|_F + C \;\|\, x_n - x \,\|_E \;\|\, y \,\|_F && \text{[cf. hypothèse]} \end{aligned}$$

La suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est convergente donc bornée, pour la norme $\|\cdot\|_E$. Donc il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\|\, x_n \,\|_E \leqslant M$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$0 \leqslant \|\, B(x_n, y_n) - B(x,y) \,\|_G \leqslant C\ M\ \|\, y_n - y \,\|_F + C\ \|\, x_n - x \,\|_E\ \|\, y \,\|_F\ .$$

D'après le théorème d'encadrement, $\|\, B(x_n, y_n) - B(x,y) \,\|_G \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$, i.e. $B(x_n, y_n) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{\|\cdot\|_G} B(x,y)$.

Q.E.D.

C4. 127. *Exemple.* — Si E est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot\,,\, \cdot \rangle$ de norme associée $\|\,.\,\|$, alors l'application

$$\langle \cdot\,,\, \cdot \rangle \;\left|\; \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \langle\, x\,,\, y \,\rangle \end{array} \right.$$

est continue pour la norme $\|\,.\,\|$.

6 Compacité

C4. 128. *Notation.* — Soient $(E, ||\,.\,||_E)$ un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E.

C4. 129. Définition (Propriété de Bolzano-Weierstrass). — *On dit que A vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass si de toute suite d'éléments de A on peut extraire une sous-suite convergente dans A, i.e. si :*

$$\forall (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}}, \quad \exists\, \varphi \colon \mathbf{N} \to \mathbf{N} \nearrow\!\!\nearrow, \quad \exists a \in A, \quad u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} a.$$

C4. 130. Définition (Partie compacte). — *On dit que A est une partie compacte (ou que A est un compact) si A vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass.*

C4. 131. *Exemple.* — Un segment de $\mathbf{R}$ est un compact (cf. théorème de Bolzano-Weierstrass de MPSI).

C4. 132. Proposition (Un compact est fermé borné). — *Si A est un compact, alors A est fermé et borné.*

C4. 133. *Remarque (La réciproque de la proposition précédente n'est pas nécessairement vraie.).* —

1. La boule unité de $(\mathbf{R}[X], ||\,.\,||_\infty)$ n'est pas compacte. En effet, la suite (X^n) n'a pas de valeur d'adhérence.
2. La boule unité de $(\mathcal{B}([0,1],\mathbf{R}), ||\,.\,||_\infty)$ n'est pas compacte. En effet, la suite (f_n) définie par pour tout $n \in \mathbf{N}$:

   $$f_n \colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}\ ;\ x \mapsto \sin(2n\pi x)$$

   n'a pas de valeur d'adhérence.

C4. 134. Proposition (Un fermé d'un compact est compact). — *Supposons A compacte. Soit $B \subset A$. Alors B est un compact si et seulement si B est fermé.*

C4. 135. Théorème (Un produit d'un nombre fini de compacts est compact). — *Soient $(E_1, ||\,.\,||_1), \ldots, (E_n, ||\,.\,||_n)$ des espaces vectoriels normés. Soient $A_1 \subset E_1, \subset, A_n \subset E_n$ des compacts. Alors $A_1 \times \ldots \times A_n$ est un compact de l'espace vectoriel normé produit $(E_1 \times \ldots \times E_n, ||\,.\,||)$.*

C4. 136. Corollaire (Compacts de $(\mathbf{K}^n, ||\,.\,||_\infty)$). — *Une partie de $(\mathbf{K}^n, ||\,.\,||_\infty)$ est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.*

C4. 137. THÉORÈME (L'IMAGE CONTINUE D'UN COMPACT EST UN COMPACT). — *Soit $(F, ||\,.\,||_F)$ un espace vectoriel normé. Soit $f \in \mathcal{C}^0(A, F)$.*
Si A est compact, alors $f(A)$ est compact.

C4. 138. *Remarque (Conséquence fondamentale du théorème précédent).* — Si A est compact et $f \in \mathcal{C}(A, \mathbf{R})$, alors f est bornée et atteint ses bornes.

C4. 139. DÉFINITION. — *Continuité uniforme) Soit $(F, ||\,.\,||_F)$ un espace vectoriel normé. Une application $f : A \longrightarrow F$ est dite uniformément continue si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall (x, y) \in A^2, \quad ||\, x - y \,|| \leqslant \eta \Longrightarrow ||\, f(x) - f(y) \,|| \leqslant \varepsilon.$$

C4. 140. *Remarque.* — Soit $(F, ||\,.\,||_F)$ un espace vectoriel normé. Soit $f : A \longrightarrow F$. Alors :

$$f \text{ lipschtizienne} \quad \Longrightarrow \quad f \text{ uniformément continue} \quad \Longrightarrow \quad f \text{ continue.}$$

C4. 141. THÉORÈME (UNE FONCTION CONTINUE SUR UN COMPACT EST UNIFORMÉMENT CONTINUE). — *Soit $(F, ||\,.\,||_F)$ un espace vectoriel normé. Soit $f \in \mathcal{C}^0(A, F)$. Si A est compact, alors f est uniformément continue.*

Démonstration. La démonstration est analogue à celle du théorème de Heine, vue en MPSI. Q.E.D.

C4. 142. *Exercice.* — Soit $(E, ||\,.\,||_E)$ un espace vectoriel normé. Supposons que la sphère unité $S = \{x \in E \ : \ ||\, x \,|| = 1\}$ est compacte. Montrer que $\overline{B(0,1)}$ est compacte.

C4. 143. *Exercice.* — La boule unité de $(\ell^\infty(\mathbf{R}), ||\,.\,||_\infty)$ est-elle compacte ?

C4. 144. *Exercice.* — Soit K un compact d'un espace vectoriel normé. Montrer qu'il existe une boule fermée de rayon minimal contenant K.

7 Espaces vectoriels normés de dimension finie

C4. 145. *Notation.* — Dans toute cette partie, E désigne un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

C4. 146. THÉORÈME (ÉQUIVALENCE DES NORMES EN DIMENSION FINIE). — *Toutes les normes sur E sont équivalentes.*

Étapes d'une démonstration.

1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On considère une norme quelconque $||\cdot||$ sur $\mathbf{R}^n$.
   (a) Démontrer que l'application
   $$f \left| \begin{array}{ccc} (\mathbf{R}^n, ||\cdot||_\infty) & \longrightarrow & (\mathbf{R}^n, ||\cdot||) \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$$
   est continue.
   (b) Soit $S := \{x \in \mathbf{R}^n \ : \ ||\, x\,||_\infty = 1\}$. Justifier que S est une partie compacte de $(\mathbf{R}^n, ||\cdot||_\infty)$.
   (c) Démontrer qu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que, pour tout $x \in S$:
   $$\alpha \leqslant ||\, x\,|| \leqslant \beta \ .$$
   (d) En déduire que les normes $||\cdot||$ et $||\cdot||_\infty$ sont équivalentes.
2. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. Soit N_1 et N_2 deux normes sur E.
   (a) Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Justifier que l'application
   $$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n & \longrightarrow & E \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k.e_k \end{array} \right.$$
   est un isomorphisme.
   (b) Justifier que l'application
   $$N_\infty \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x & \longmapsto & ||\, \varphi^{-1}(x)\,||_\infty \end{array} \right.$$
   définit une norme sur E.
   (c) Justifier que l'application
   $$||\cdot|| \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & N_1\left(\varphi\left((x_1, \ldots, x_n)\right)\right) \end{array} \right.$$
   définit une norme sur $\mathbf{R}^n$.
   (d) Déduire de Q1.(d) que les normes N_1 et N_∞ sont équivalentes.
   (e) Justifier que N_1 et N_2 sont équivalentes.

C4. 147. Corollaire (Suites et topologie en dimension finie). — *Soient deux normes N_1 et N_2 sur E.*

1. *Une partie de E est ouverte pour la norme N_1 si et seulement si elle est ouverte pour la norme N_2.*
2. *Une suite d'éléments de E converge vers $x \in E$ pour la norme N_1 si et seulement si elle converge vers x pour la norme N_2.*
3. *Une partie de E est compacte pour N_1 si et seulement si elle est compacte pour N_2.*

Démonstration. 1. Conséquence du Théorème **C4.119** et du Théorème **C4.146**.

2. D'après le Théorème **C4.146**, il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha N_1 \leqslant N_2 \leqslant \beta N_1$.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ qui converge vers $x \in E$ pour la norme N_1, i.e. telle que
$$N_1(x_n - x) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0.$$
Pour tout $n \in \mathbf{N}$:
$$0 \leqslant N_2(x_n - x) \leqslant \beta N_1(x_n - x).$$
Par théorème d'encadrement pour les suites réelles, $N_2(x_n - x) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$, i.e. la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $x \in E$ pour la norme N_2.
Par symétrie des rôles joués par N_1, N_2, toute suite convergente d'éléments de E qui converge vers $x \in E$ pour la norme N_2, converge vers x pour la norme N_1.
3. D'après le Théorème **C4.146**, il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha N_1 \leqslant N_2 \leqslant \beta N_1$. Soit A une partie compacte de E pour la norme N_1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}}$. Comme A est compacte pour la norme N_1, il existe une application strictement croissante $\varphi \colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ et $a \in A$ tels que :
$$a_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{N_1} a.$$
D'où $N_1\left(a_{\varphi(n)} - a\right) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$:
$$0 \leqslant N_2\left(a_{\varphi(n)} - a\right) \leqslant \beta N_1\left(a_{\varphi(n)} - a\right).$$
Par théorème d'encadrement pour les suites réelles, $N_2\left(a_{\varphi(n)} - a\right) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$, i.e. la suite $\left(a_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $a \in A$ pour la norme N_2. La partie A est donc compacte pour la norme N_2.
Par symétrie des rôles joués par N_1, N_2, toute suite partie compacte pour la norme N_2 est compacte pour la norme N_1.

Q.E.D.

C4. 148. Théorème (Compacité en dimension finie). — *Soit $||\,.\,||_E$ une norme sur E. Soit A une partie de E. Alors :*

$$A \text{ est compacte} \iff A \text{ est fermée et bornée.}$$

Démonstration. $\boxed{\Longrightarrow}$ Cf. Proposition **C4.132**.

$\boxed{\Longleftarrow}$ • Soit $p \in \mathbf{N}^*$ la dimension de E, soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. L'application :
$$||\cdot||_{E,\infty} \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i e_i & \longmapsto & \displaystyle\max_{1\leqslant i\leqslant p} |x_i| \end{array} \right.$$
définit une norme sur E.

- Nous vérifions qu'une suite
$$\left(a_n = \sum_{i=1}^{p} a_{i,n} e_i\right)_{n\in\mathbf{N}}$$
d'éléments de E converge pour la norme $||\cdot||_{E,\infty}$ si et seulement si pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ la suite de nombres réels $(a_{i,n})_{n\in\mathbf{N}}$ converge dans $\mathbf{R}$ (cf. preuve du Théorème **C4.51**).
Nous vérifions également que cette même suite est bornée pour la norme $||\cdot||_{E,\infty}$ si et seulement si si pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ la suite de nombres réels $(a_{i,n})_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée dans $\mathbf{R}$.
- Par le Théorème **C4.146**, les normes $||\,.\,||_E$ et $||\cdot||_{E,\infty}$ sont équivalentes.
- Soit A une partie fermée pour la norme $||\cdot||_E$. Montrons que A est fermée pour la norme $||\cdot||_{E,\infty}$.
Par le Théorème **C4.119**, $(E, ||\cdot||_E)$ et $(E, ||\cdot||_{E,\infty})$ ont les mêmes ouverts. Ainsi, ils ont les mêmes fermés et donc A est également fermée pour $||\cdot||_{E,\infty}$.
- Soit A une partie bornée pour la norme $||\cdot||_E$. Montrons que A est bornée pour la norme $||\cdot||_{E,\infty}$.
Nous savons qu'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que
$$\alpha||\cdot||_E \leqslant ||\cdot||_{E,\infty} \leqslant \beta||\cdot||_E.$$
La partie A étant bornée pour la norme $||\cdot||_{E,\infty}$, il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in A$, $||x||_E \leqslant M$. Nous en déduisons que pour tout $x \in A$, $||x||_{E,\infty} \leqslant \beta M$. La partie A est donc bornée pour la norme $||\cdot||_{E,\infty}$.
- Soit A une partie fermée et bornée pour la norme $||\cdot||_E$. Montrons que A est une partie compacte pour la norme $||\cdot||_E$, ou ce qui revient au même pour la norme $||\cdot||_{E,\infty}$ (cf. Corollaire **C4.147**).
D'après ce qui précède, nous en déduisons que A est fermée et bornée pour la norme $||\cdot||_{E,\infty}$.
Soit
$$(a_n = (a_{1,n}, \ldots, a_{p,n}))_{n\in\mathbf{N}}$$
une suite d'éléments de A. La partie A étant bornée pour la norme $||\cdot||_{E,\infty}$, il existe $M > 0$ tel que :
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad ||a_n||_{E,\infty} \leqslant M.$$
On en déduit que pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, la suite $(a_{i,n})_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments du segment $[-M, M]$.
— Par le théorème de Bolzano-Weierstraß, il existe $\varphi_1 \colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante telle que $(a_{1,\varphi_1(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un réel de $[-M, M]$ noté a_1.
— Par le théorème de Bolzano-Weierstraß, il existe $\varphi_2 \colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante telle que $(a_{2,\varphi_1\circ\varphi_2(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un réel de $[-M, M]$ noté a_2.
— Par le théorème de Bolzano-Weierstraß, il existe $\varphi_3 \colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante telle que $(a_{3,\varphi_1\circ\varphi_2\circ\varphi_3(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un réel de $[-M, M]$ noté a_3.
— De proche en proche on construit p applications $\varphi_1, \ldots, \varphi_p \colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$, toutes strictement croissantes, telles que pour tout $i \in [\![1,p]\!]$:
$$a_{i,\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_i(n)} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} a_i \in [-M, M].$$
Comme une suite extraite d'une suite convergente est convergente de même limite, il vient que pour tout $i \in [\![1,p]\!]$:
$$a_{i,\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_p(n)} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} a_i \in [-M, M].$$

Nous en déduisons que la suite

$$\left(a_{\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_p(n)} = (a_{1,\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_p(n)}, \ldots, a_{p,\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_p(n)})\right)_{n\in\mathbf{N}}$$

converge pour $||\cdot||_{E,\infty}$ et a pour limite $a := (a_1, \ldots, a_p)$. La suite $(\left(a_{\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_p(n)}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de A, partie fermée pour la norme $||\cdot||_{E,\infty}$, qui converge vers a pour la norme $||\cdot||_{E,\infty}$. Sa limite a appartient donc à A.
Nous avons donc construit une suite extraite de $(a_n = (a_{1,n}, \ldots, a_{p,n}))_{n\in\mathbf{N}}$, qui converge dans A pour la norme $||\cdot||_{E,\infty}$.
Nous en déduisons que la partie A est compacte pour la norme $||\cdot||_{E,\infty}$.

Q.E.D.

C4. 149. Théorème (Sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé quelconque). — *Soit $(F, ||\cdot||_F)$ un espace vectoriel normé, non nécessairement de dimension finie. Soit G un sous-espace vectoriel de dimension finie de F.*
Alors G est une partie fermée de F.

C4. 150. *Exercice.* — On munit $E := \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$ de la norme $||\cdot||_\infty$. Soit F le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynomiales. F est-il fermé dans E ?

C4. 151. Théorème (Applications linéaires en dimension finie). — *Soit $(E, ||\cdot||_E)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $(F, ||\,.\,||_F)$ un espace vectoriel normé. Toute application linéaire de $(E, ||\cdot||_E)$ vers $(F, ||\,.\,||_F)$ est continue, i.e. :*

$$\mathcal{LC}^0(E, F) = \mathcal{L}(E, F).$$

Démonstration. Soit $u\colon (E, ||\cdot||_E) \longrightarrow (F, ||\cdot||_F)$. Montrons que u est continue.

- Soit n la dimension de E et soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On vérifie que l'application :

$$||\cdot||_{E,\infty} \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i e_i & \longmapsto & \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i| \end{array} \right.$$

  est une norme sur E.
- Soit m la dimension de F et soit $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_m)$ une base de F. On vérifie que l'application :

$$||\cdot||_{F,\infty} \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \displaystyle\sum_{j=1}^m y_j f_j \mapsto \max_{1\leqslant j\leqslant m} |y_j| & \longmapsto & e \end{array} \right.$$

  st une norme sur F.

- Montrons que $u\colon (E, ||\cdot||_{E,\infty}) \longrightarrow (F, ||\cdot||_{F,\infty})$ est continue. Soit A la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

$$u(x) = u\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} [A]_{ji} f_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i [A]_{ji}\right) f_j.$$

Ainsi :

$$||u(x)||_{F,\infty} = \max_{1\leqslant j\leqslant m} \left|\sum_{i=1}^{n} x_i [A]_{ji}\right| \leqslant n\, ||A||\, ||x||_{E,\infty}$$

où $||A|| := \max_{1\leqslant i\leqslant n\,,\, 1\leqslant j\leqslant m} |[A]_{ij}|$. Par le Théorème **C4.116**, $u\colon (E, ||\cdot||_{E,\infty}) \longrightarrow (F, ||\cdot||_{F,\infty})$ est continue.

- D'après les Théorèmes **C4.146** et **C4.119**, les applications :

$$id_E\colon (E, ||\cdot||_E) \longrightarrow (E, ||\cdot||_{E,\infty}) \quad \text{et} \quad id_F\colon (F, ||\cdot||_{F,\infty}) \longrightarrow (F, ||\cdot||_F)$$

sont continues.

- Par la Proposition **C4.121**, la composition d'applications continues :

$$(E, ||\cdot||_E) \xrightarrow{id_E} (E, ||\cdot||_{E,\infty}) \xrightarrow{u} (F, ||\cdot||_{F,\infty}) \xrightarrow{id_F} (F, ||\cdot||_F)$$

qui coïncide avec $u\colon (E, ||\cdot||_E) \longrightarrow (F, ||\cdot||_F)$ est continue.

Q.E.D.

C4. 152. Théorème (Applications bilinéaires en dimension finie). — *Soient* $(E_1, ||\,.\,||_1), (E_2, ||\,.\,||_2)$ *deux espaces vectoriels normés de dimension finie et soit* $(F, ||\,.\,||)$ *un espace vectoriel normé. Soit* $B\colon E_1 \times E_2 \longrightarrow F$ *une application bilinéaire. Alors* B *est continue.*

Démonstration. Soient $(e_{1,1}, \ldots, e_{1,n_1})$ une base de E_1 et $(e_{2,1}, \ldots, e_{2,n_2})$ une base de E_2. On définit une nouvelle norme sur E_1 et une nouvelle norme sur E_2 en posant :

$$N_1 \left| \begin{array}{ccc} E_1 & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n_1} \lambda_{1,i} e_{1,i} & \longmapsto & N_1(x_1) := \displaystyle\max_{1\leqslant i\leqslant n_1} |\lambda_{1,i}| \end{array} \right.$$

et

$$N_2 \left| \begin{array}{ccc} E_2 & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x_2 = \displaystyle\sum_{j=1}^{n_2} \lambda_{2,j} e_{2,j} & \longmapsto & N_2(x_2) := \displaystyle\max_{1\leqslant j\leqslant n_2} |\lambda_{2,j}| \ . \end{array} \right.$$

Comme E_1 et E_2 sont de dimension finie, les normes $N_1, ||\cdot||_1$ sont équivalentes et les normes $N_2, ||\cdot||_2$ sont équivalentes. Il existe donc deux constantes α_1 et α_2 telles que :

$$\forall\, x_1 \in E_1,\ N_1(x_1) \leqslant \alpha_1\, ||\, x_1\, ||_1 \qquad \text{et} \qquad \forall\, x_2 \in E_2,\ N_2(x_2) \leqslant \alpha_2\, ||\, x_2\, ||_2 \ .$$

Soit $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$. Alors il existe deux familles de scalaires $(\lambda_{1,i})_{1 \leqslant i \leqslant n_1}$ et $(\lambda_{2,j})_{1 \leqslant j \leqslant n_2}$ telles que :

$$x_1 = \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_{1,i} e_{1,i} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_{2,j} e_{2,j} \ .$$

Comme B est bilinéaire :

$$B(x_1, x_2) = \sum_{(i,j) \in [\![1,n_1]\!] \times [\![1,n_2]\!]} \lambda_{1,i} \lambda_{2,j} B(e_{1,i}, e_{2,j}) \ .$$

Puisque $||\cdot||$ est une norme sur F :

$$||\, B(x_1, x_2) \,|| \leqslant \sum_{(i,j) \in [\![1,n_1]\!] \times [\![1,n_2]\!]} |\lambda_{1,i} \lambda_{2,j}| \, ||\, B(e_{1,i}, e_{2,j}) \,|| \ .$$

En posant $\mu := \max_{(i,j) \in [\![1,n_1]\!] \times [\![1,n_2]\!]} ||\, B(e_{1,i}, e_{2,j}) \,||$, il vient alors :

$$\begin{aligned}
||\, B(x_1, x_2) \,|| &\leqslant \mu \times \sum_{(i,j) \in [\![1,n_1]\!] \times [\![1,n_2]\!]} |\lambda_{1,i}| \, |\lambda_{2,j}| \\
&\leqslant \mu \times \sum_{(i,j) \in [\![1,n_1]\!] \times [\![1,n_2]\!]} N_1(x_1) \;\; N_2(x_2) \\
&= \mu \times n_1 \times n_2 \times N_1(x_1) \times N_2(x_2) \\
&\leqslant \underbrace{\mu \times n_1 \times n_2 \times \alpha_1 \times \alpha_2}_{=:C} \times ||\, x_1 \,||_1 \times ||\, x_2 \,||_2 \ .
\end{aligned}$$

D'après la Propriété **C4.126**, l'application B est continue. Q.E.D.

C4. 153. *Remarque (Continuité du déterminant).* — Le théorème précédent admet une généralisation pour les applications multilinéaires : si $(E_1, ||\,.\,||_1)$,…,$(E_n, ||\,.\,||_n)$ sont des espaces vectoriels normés de dimension finie et si $(F, ||\,.\,||)$ est un espace vectoriel normé, alors toute application multilinéaire de $E_1 \times \ldots \times E_n$ vers F est continue.
En particulier, si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors le déterminant dans $\mathcal{B}$ est continu. De plus, l'application déterminant :

$$\det \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ M & \longmapsto & \det(M) \end{array} \right.$$

est continue.

C4. 154. *Exercice.* —

1. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
2. L'ensemble $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid \det(M) = 1\}$ est-il compact ?
3. Montrer que $\mathrm{O}(n) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid M \times M^\top = I_n\}$ est compact.

C4. 155. Théorème (Suites et coordonnées en dimension finie). — *Fixons une base* $(e_1, ..., e_p)$ *de* E*. Étant donnée une suite* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *d'éléments de* E*, il existe des suites* $(u_{1,n})_{n\in\mathbf{N}}, \dots, (u_{p,n})_{n\in\mathbf{N}}$ *d'éléments de* $\mathbf{K}$ *telles que :*

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \sum_{i=1}^{p} u_{i,n} e_i.$$

Alors $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge vers un vecteur* $a = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_i e_i$ *si et seulement si pour tout* $i \in [\![1, p]\!]$, $(u_{i,n})_{n\in\mathbf{N}}$ *converge vers* a_i*.*

C4. 156. Théorème (Applications coordonnées des applications continues). — *Soient* $(F, ||\,.\,||_F)$ *un espace vectoriel normé et* A *une partie non vide de* E*. Fixons une base* $(e_1, \dots, e_n)$ *de* F*. Étant donnée une application* $f\colon A \longrightarrow F$*, il existe des applications* $f_1, \dots, f_n\colon A \longrightarrow \mathbf{K}$ *(uniques), appelées applications coordonnées de* f*, telles que :*

$$\forall x \in A, \qquad f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i.$$

Alors f *est continue si et seulement si pour tout* $i \in [\![1, p]\!]$*, les applications* f_i *sont continues.*

8 Séries d'un espace vectoriel normé

C4. 157. *Notation.* — Dans toute cette partie, E désigne un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé.

C4. 158. Définition (Série asociée à une suite). — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E.*

1. *La suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de terme général*
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$
est appelée série associée à $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. On la note $\sum u_n$. On dit aussi que $\sum u_n$ est la série de terme général u_n.
2. *Pour tout $n \in \mathbf{N}$, le vecteur S_n de E est appelé somme partielle d'ordre n.*

C4. 159. Définition (Série convergente, somme d'une série). —

1. *Une série $\sum u_n$ d'éléments de E est dite convergente si la suite (S_n) de terme général*
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$
converge, i.e. la suite des sommes partielles est convergente.
2. *Si c'est le cas, la limite de $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est appelée somme de la série $\sum u_n$, et est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.*

C4. 160. *Remarque.* — La série associée à une suite (u_n) d'éléments de E définie pour $n \geqslant n_0$ est la suite de teme général $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ définie pour $n \geqslant n_0$. La série $\sum u_n$ est dite convergente si la suite (S_n) est convergente. Sa limite, encore appelée somme de la série, est notée $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

C4. 161. Proposition (Espace vectoriel des séries convergentes). —

1. *L'ensemble $\mathcal{S}_c$ des suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ telles que $\sum u_n$ converge est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbf{N}}$.*
2. *De plus, l'application :*
$$\text{« somme d'une série convergente »} \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_c & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ (u_n)_{n\in\mathbf{N}} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \end{array} \right.$$
est linéaire.

C4. 162. Proposition (Le terme général d'un série convergente converge vers 0). — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E. Alors :*

$$\sum u_n \text{ converge} \quad \Longrightarrow \quad u_n \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} 0$$

C4. 163. *Attention.* — La réciproque de la Proposition précédente est fausse. Cf. série harmonique dans $(\mathbf{R}, |\cdot|)$.

C4. 164. Définition (Reste d'une série convergente). — *Soit $\sum u_n$ une série d'éléments de E, convergente. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, le reste R_n d'ordre n est défini par :*

$$R_n := \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

C4. 165. Proposition (La suite des restes d'une série convergente converge vers 0). — *Soit $\sum u_n$ une série d'éléments de E, convergente. La suite (R_n) des restes converge vers 0_E.*

C4. 166. Définition (Série absolument convergente). — *Soit (u_n) une suite d'éléments de E. La série $\sum u_n$ est dite absolument convergente si la série de nombre réels positifs $\sum ||\, u_n \,||$ est convergente.*

C4. 167. Théorème (En dim. finie une série absolument convergente est convergente). — *Supposons $(E, ||\,.\,||_E)$ de dimension finie. Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbf{K}$. Alors :*

$$\sum u_n \text{ est absolument convergente} \quad \Longrightarrow \quad \sum u_n \text{ est convergente}$$

C4. 168. *Remarque (Pas d'extension du théorème précédent en dimension infinie).* — Ce résultat n'est pas nécessairement vraie en dimension infinie, cf. exercice suivant.

C4. 169. *Exercice.* — Soit $\mathbf{R}[X]$ muni de la norme $||\,.\,||_\infty$. Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{X^n}{n!}$ est absolument convergente, mais qu'elle n'est pas convergente.

C4. 170. THÉORÈME (EXPONENTIELLE D'UNE MATRICE). — *Soit* $p \in \mathbf{N}^*$.

1. *Pour tout* $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$, *la série* $\sum \frac{A^n}{n!}$ *est convergente.*
2. *Pour tout* $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$, *on note* $\exp(A)$ *l'exponentielle de la matrice* A *définie par :*

$$\exp(A) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

C4. 171. *Exercice.* — Calculer $\exp(A)$, où $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

9 Connexité par arcs

C4. 172. *Notation.* — Dans toute cette partie, E désigne un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé.

C4. 173. DÉFINITION (CONNEXITÉ PAR ARCS). — *Soit $A \subset E$ une partie non vide. On dit que A est connexe par arcs si pour tout couple $(a, b) \in A^2$, il existe deux réels $\alpha < \beta$ et une application continue*

$$\varphi \colon [\alpha, \beta] \longrightarrow A$$

telle que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$.

C4. 174. THÉORÈME (CONVEXITÉ ET CONNEXITÉ PAR ARCS). — *Une partie convexe de E est connexe par arcs.*

C4. 175. *Exemple.* —

1. Les intervalles de $\mathbf{R}$ sont connexes par arcs.
2. Une boule d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs.

C4. 176. THÉORÈME (PARTIES CONNEXES PAR ARCS DE $\mathbf{R}$). — *Soit $A \subset \mathbf{R}$ une partie non vide. Alors A est connexe par arcs si et seulement si A est un intervalle.*

C4. 177. *Exercice.* —

1. L'intersection de deux parties connexes par arcs est-elle connexe par arcs ?
2. Une réunion de deux parties connexes par arcs est-elle connexe par arcs ?

C4. 178. THÉORÈME (**Image continue d'une partie connexe par arcs**). — *Soit $(F, ||\,.\,||_F)$ un espace vectoriel normé. Soit $f \colon E \longrightarrow F$ une application continue. Soit $A \subset E$ une partie connexe par arcs. Alors $f(A)$ est connexe par arcs.*

C4. 179. COROLLAIRE (GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES). — *Soit $f \colon E \longrightarrow \mathbf{R}$ une application continue. Soit $A \subset E$ une partie connexe par arcs. S'il existe $x_1, x_2 \in A$ tels que $f(x_1)f(x_2) \leqslant 0$, alors l'équation :*

$$f(x) = 0_{\mathbf{R}}$$

d'inconnue $x \in A$ possède au moins une solution.

Démonstration. Si $f(x_1) = 0$ ou $f(x_2) = 0$, alors l'assertion est établie. Supposons donc $f(x_1)f(x_2) < 0$. L'image $f(A)$ de A par f est une partie connexe par arcs de $\mathbf{R}$ (Théorème **C4.178**), donc un intervalle de $\mathbf{R}$ (Théorème **C4.176**). Comme $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont dans $f(A)$, et de signes opposés, 0 se trouve donc aussi dans $f(A)$ qui est un intervalle de $\mathbf{R}$. Donc $0 \in \mathbf{R}$ possède au moins un antécédent par f dans A. Q.E.D.

C4. 180. *Exercice.* — Un homéomorphisme de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}^2$ est une application bijective et continue, dont la bijection réciproque est également continue. Montrer qu'il n'existe pas d'homéomorphisme de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}^2$.

10 Une sélection d'exercices

C4. 181. *Exercice (CCINP).* — Notons $E = \mathcal{C}^0([0\ ;\ 1], \mathbf{R})$. Pour tout $f \in E$, notons :

$$N_\infty(f) = \sup_{x\in[0\ ;\ 1]} |f(x)| \qquad \text{et} \qquad N_1(f) = \int_0^1 |f(x)|\ \mathrm{d}x$$

1. (a) Démontrer succintement que N_∞ et N_1 sont des normes sur E.
   (b) Démontrer qu'il existe un réel $k > 0$ tel que pour tout $f \in E$, $N_1(f) \leq k\ N_\infty(f)$.
   (c) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.
2. Démontrer que les normes N_∞ et N_1 ne sont pas équivalentes.

C4. 182. *Exercice (CCINP).* — Notons $E = \mathbf{R}[X]$. Pour tout polynôme $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in E$, posons :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{n} |a_k| \quad \text{et} \quad N_\infty(P) = \max_{0\leq k\leq n} |a_k|$$

1. (a) Démontrer succinctement que N_1 et N_∞ sont des normes sur E.
   (b) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_∞ est un ouvert pour la norme N_1.
   (c) Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.
2. Soit $n \in \mathbf{N}$. Notons respectivement N_1' et N_∞' les restrictions de N_1 et N_∞ à $\mathbf{R}_n[X]$. Les normes N_1' et N_∞' sont-elles équivalentes ?

C4. 183. *Exercice (CCINP).* —

1. Soit $(E, ||\,.\,||)$ un espace vectoriel normé, soit $A \subset E$ une partie non vide, soit $x \in E$. Démontrer que :
$$x \in \overline{A} \iff \exists (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}} \text{ telle que } x_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} x$$
2. Démontrer que si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\overline{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.

C4. 184. *Exercice (CCINP).* — E et F désignent deux espaces vectoriels normés.

1. Soit $f\colon E \longrightarrow F$, soit $a \in E$. Montrer que f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de E telle que $x_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} a$, $f(x_n) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} f(a)$.
2. Soit $A \subset E$ une partie dense dans E, soient f, g deux applications continues de E dans F telles que pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$. Montrer que $f = g$.

C4. 185. *Exercice.* — Soit $(E, ||\,.\,||)$ un espace vectoriel normé. Montrer qu'une boule ouverte de E est convexe.

C4. 186. *Exercice (CCINP).* — Notons $E = \mathcal{C}^0([0\ ;\ 1], \mathbf{R})$. Pour toute fonction $f \in E$, posons :

$$N(f) = \int_0^1 e^x \, |f(x)| \, \mathrm{d}x$$

1. Montrer que N est une norme sur E. Comparer N et $||\,.\,||_\infty$.
2. Trouver la meilleure constante $\beta > 0$ telle que pour tout $f \in E$, $N(f) \leq \beta \; ||\, f \,||_\infty$.

C4. 187. *Exercice.* — Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, soient N_1 et N_2 deux normes sur E. Montrer que les boules ouvertes $B_{N_1}(0, 1)$ et $B_{N_2}(0, 1)$ sont égales si et seulement si $N_1 = N_2$.

C4. 188. *Exercice.* — Munissons $E = \mathbf{R}[X]$ des normes $||\,.\,||_\infty$ et $||\,.\,||'_\infty$ définies pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ par :

$$||\, P \,||_\infty = \max_{0 \leq k \leq n} |a_k| \qquad \text{et} \qquad ||\, P \,||'_\infty = \sup_{x \in [0\ ;\ 1]} |P(x)|$$

1. Montrer que $||\,.\,||_\infty$ et $||\,.\,||'_\infty$ sont des normes.
2. Sont-elles équivalentes ?
3. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que les normes induites sur $\mathbf{R}_n[X]$ par $||\,.\,||_\infty$ et $||\,.\,||'_\infty$ sont équivalentes.

C4. 189. *Exercice.* — Munissons $E = \mathbf{R}[X]$ de la norme $||\,.\,||'_\infty$ définie dans l'exercices précédent et de la norme $||\,.\,||'_1$ définie par :

$$\forall P \in \mathbf{R}[X], \quad ||\, P \,||'_1 = \int_0^1 |P(x)| \, \mathrm{d}x$$

1. Vérifier que $||\,.\,||'_1$ est bien une norme sur $\mathbf{R}[X]$.
2. Les normes $||\,.\,||'_\infty$ et $||\,.\,||'_1$ sont-elles équivalentes ?
3. Montrer que les normes induites sur $\mathbf{R}_n[X]$ par $||\,.\,||'_\infty$ et $||\,.\,||'_1$ sont équivalentes.

C4. 190. *Exercice ((ENSEA)).* — Notons $E = \mathbf{R}[X]$. Pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$ et tout $n \in \mathbf{N}$, posons :

$$\theta_n(P) = \int_0^1 P(t) t^n \, \mathrm{d}t$$

Posons $N(P) = \sup_{n \in \mathbf{N}} |\theta_n(P)|$. Montrer que $N(P)$ est bien définie et qu'elle induit une norme sur $\mathbf{R}[X]$.

C4. 191. *Exercice.* — Munissons $\mathbf{R}[X]$ des normes $||\,.\,||_\infty$ et $||\,.\,||'_\infty$ définies dans l'exercice 10.188. Notons(P_n) la suite de polynômes de terme général $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$.

1. Montrer que (P_n) est bornée pour les normes $||\,.\,||_\infty$ et $||\,.\,||'_\infty$.
2. Montrer que (P_n) est divergente pour la norme $||\,.\,||_\infty$.
3. Munissons $\mathcal{C}([0\ ;\ 1], \mathbf{R})$ de la norme $||\,.\,||'_\infty$ définie par :
$$\forall f \in \mathcal{C}([0\ ;\ 1], \mathbf{R}), \quad ||\, f\, ||'_\infty = \sup_{x \in [0\ ;\ 1]} |f(x)|.$$
Montrer que la suite (P_n), vue comme suite d'éléments de $\mathcal{C}([0\ ;\ 1], \mathbf{R})$, converge. Déterminer sa limite.
4. La suite (P_n) converge-t-elle dans $(\mathbf{R}[X], ||\,.\,||'_\infty)$?

C4. 192. *Exercice.* — Munissons $\ell^\infty(\mathbf{R})$ de la norme $||\,.\,||_\infty$ définie pour toute suite bornée (u_n) par :
$$||\,(u_n)\,||_\infty = \sup_{n \in \mathbf{N}} |u_n|$$

1. Notons (u_k) la suite d'éléments de $\ell^\infty(\mathbf{R})$ telle que pour tout k, u_k soit la suite constante de terme général $\frac{1}{k+1}$. Montrer que $u_k \xrightarrow[k \longrightarrow +\infty]{||\,.\,||_\infty} 0$.
2. Notons (v_k) la suite d'éléments de $\ell^\infty(\mathbf{R})$ définie de terme général $v_k = \left(\frac{k}{n+1}\right)_{n \in \mathbf{N}}$. La suite $(v_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est-elle bornée dans $(\ell^\infty, ||\,.\,||_\infty)$?
3. La suite (w_k) d'éléments de $\ell^\infty(\mathbf{R})$ de terme général $w_k = (\sin(kn))_{n \in \mathbf{N}}$ est-elle bornée ? Admet-elle une valeur d'adhérence ?

C4. 193. *Exercice.* — Munissons $\ell^\infty(\mathbf{R})$ de la norme $||\,.\,||_\infty$ définie dans l'exercice précédent.

1. Soit (U_k) une suite d'éléments de $\ell^\infty(\mathbf{R})$. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, U_k est une suite bornée notée $\left(u_n^{(k)}\right)_{n \in \mathbf{N}}$. Supposons que (U_k) converge vers une suite $U \in \ell^\infty(\mathbf{R})$ de terme général u_n. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n^{(k)} \xrightarrow[k \longrightarrow +\infty]{} u_n$.
2. Réciproquement, si pour tout $n \in \mathbf{N}$, la suite $\left(u_n^{(k)}\right)_{k \in \mathbf{N}}$ converge vers un réel u_n, la suite (U_k) converge-t-elle vers la suite (u_n) ?

C4. 194. *Exercice.* — Munissons $\mathcal{C}^0([0\ ;\ 1], \mathbf{R})$ de la norme $||\,.\,||_\infty$ définie par :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([0\ ;\ 1], \mathbf{R}), \quad ||\, f\,||_\infty = \sup_{x\in[0\ ;\ 1]} |f(x)|$$

L'espace des fonctions polynomiales est-il fermé dans $(\,\mathcal{C}^0([0\ ;\ 1], \mathbf{R}), ||\,.\,||_\infty)$?

C4. 195. *Exercice.* — Munissons $\mathbf{R}[X]$ de la norme $||\,.\,||_1$ définie par :

$$\left|\left|\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right|\right|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$$

Le sous-espace $F = \mathrm{Vect}\,(\{X^{2n}\ :\ n \in \mathbf{N}\})$ est-il fermé dans $(\mathbf{R}[X], ||\,.\,||_1)$?

C4. 196. *Exercice.* — Soit $f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction polynomiale. Montrer que pour tout ouvert U, $f(U)$ est un ouvert et que pour tout fermé F, $f(F)$ est un fermé.

C4. 197. *Exercice ((TPE)).* — Soit $(E, ||\,.\,||)$ un espace vectoriel normé. Montrer que E est le seul sous-espace vectoriel de E d'intérieur non vide.

C4. 198. *Exercice ((TPE)).* — Soit $(E, ||\,.\,||)$ un espace vectoriel normé, soit $C \subset E$ une partie convexe. Montrer que l'adhérence et l'intérieur de C sont convexes.

C4. 199. *Exercice.* — Notons $\ell^2(\mathbf{R})$ l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telles que la série $\sum |x_n|$ converge. Pour toute suite $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^2(\mathbf{R})$, notons :

$$||\,x\,||_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2}$$

1. Montrer que $||\,.\,||_2$ est une norme sur $\ell^2(\mathbf{R})$.
2. Posons F l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\ell^2(\mathbf{R})$. L'ensemble F est-il fermé ?

C4. 200. *Exercice.* — Notons $\ell^\infty(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des suites réelles bornées. Pour toute suite $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^\infty(\mathbf{R})$, posons $||\,x\,||_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbf{N}} |x_n|$.

1. Notons $\mathcal{C}_0$ le sous-espace vectoriel de $\ell^\infty(\mathbf{R})$ constitué des suites convergeant vers 0. Déterminer la distance de la suite constante égale à 1 à $\mathcal{C}_0$.
2. Notons $\mathcal{C}$ le sous-espace vectoriel de $\ell^\infty(\mathbf{R})$ constitué des suites convergentes. Déterminer la distance de la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbf{N}}$ à $\mathcal{C}$.

C4. 201. *Exercice.* — Soit $(E, ||\,.\,||)$ un espace vectoriel normé. Soit (u_n) une suite d'éléments de E. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérences de (u_n) est un fermé de E.

C4. 202. *Exercice.* — Soient $(E, ||\,.\,||)$ et $(F, ||\,.\,||)$ deux espaces vectoriels normés.

1. Soit $A \subset E$, soit $f\colon E \longrightarrow F$ une fonction continue. Montrer que si A est un compact de E, alors $f(A)$ est un compact de F.
2. Soit $g\colon E \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue. Montrer que si A est un compact de E, alors :
   (a) $g(A)$ est une partie bornée de $\mathbf{C}$.
   (b) Il existe $x_0 \in A$ tel que $|g(x_0)| = \sup\limits_{x\in A} |g(x)|$.

C4. 203. *Exercice (CCINP).* — Soient $(E, ||\,.\,||)$, $(F, ||\,.\,||)$ deux espaces vectoriels normés.

1. Démontrer que si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :
   (a) f est continue sur E.
   (b) f est continue en 0.
   (c) $\exists k > 0$ tel que $\forall x \in E$, $||\,f(x)\,|| \leq k\,||\,x\,||$.
2. Notons E l'espace des fonctions continues sur $[0\ ;\ 1]$ à valeurs dans $\mathbf{R}$, munissons-le de la norme $||\,.\,||_\infty$. On considère l'application :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \end{array} \right.$$

   Montrer que φ est continue.

C4. 204. *Exercice (CCINP).* — Soit $(\mathcal{A}, ||\,.\,||)$ une algèbre unitaire normée de dimension finie, d'élément unité e.

1. Soit $u \in \mathcal{A}$ tel que $||\,u\,|| < 1$.
   (a) Montrer que la série $\sum u^n$ converge.

(b) Montrer que $(e-u)$ est inversible, d'inverse $\sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.

2. Montrer que pour tout $u \in \mathcal{A}$, la série $\sum \frac{u^n}{n!}$ converge.

C4. 205. *Exercice (CCINP tronqué).* — Munissons l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([0\ ;\ 1], \mathbf{R})$ de la norme $||\,.\,||_\infty$ et l'espace vectoriel $F = \mathcal{C}^1([0\ ;\ 1], \mathbf{R})$ de la norme $||\,.\,||'_\infty$ définie par :

$$\forall f \in F, \quad ||\, f\,||'_\infty = ||\, f\,||_\infty + ||\, f'\,||_\infty$$

1. Vérifier que $||\,.\,||'_\infty$ est une norme sur F.
2. Notons $\varphi\colon E \longrightarrow F$ l'application linéaire définie par :

$$\forall f \in E, \forall x \in [0\ ;\ 1], \quad \varphi(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

   Montrer que φ est continue.

C4. 206. *Exercice (CCINP tronqué).* — Munissons l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([0\ ;\ 1], \mathbf{R})$ de la norme $||\,.\,||_\infty$. Notons φ la forme linéaire sur E définie par :

$$\forall f \in E, \qquad \varphi(f) = f(1) - f(0)$$

1. Montrer que φ est continue.
2. L'application φ est-elle continue si l'on remplace $||\,.\,||_\infty$ par $||\,.\,||_1$?

C4. 207. *Exercice ((CCINP tronqué).* — Munissons l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([0\ ;\ 1], \mathbf{R})$ de la norme $||\,.\,||_1$. Notons φ la forme linéaire sur E définie par :

$$\forall f \in E, \qquad \varphi(f) = \int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que φ est continue.

C4. 208. *Exercice (CCINP).* — Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme réel de degré n scindé à racines simples sur $\mathbf{R}$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in [-\alpha, \alpha]$, le polynôme $P(X) + \varepsilon X^{n+1}$ soit scindé à racines simples dans $\mathbf{R}$.

C4. 209. *Exercice (CCINP).* — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$ telle que $4A^3 + 2A^2 + A = 0$.

1. Montrer que pour tout $P \in GL_n(\mathbf{R})$, $M \mapsto P^{-1}MP$ est un endomorphisme continu dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
2. Montrer que les valeurs propres de A sont toutes de module inférieur ou égal à $1/2$. En déduire :
$$A^k \xrightarrow[k \longrightarrow +\infty]{} 0$$
3. Montrer qu'une suite d'entiers relatif qui converge est stationnaire. En déduire que A est nilpotente. Que peut-on alors dire de A ?

C4. 210. *Exercice (CCINP).* — Munissons $\mathcal{M}_p(\mathbf{C})$ de la norme $||\,(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq p}\,|| = \max\limits_{1\leq i,j\leq p} |a_{i,j}|$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{C})$ telle que la suite $(||\,A^n\,||)_{n\in\mathbf{N}}$ soit bornée. Montrer que les valeurs propres de A sont toutes de module inférieur ou égal à 1.
2. Soit $B \in \mathcal{M}_p(\mathbf{C})$. On suppose que la suite $(B^n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers une matrice $C \in \mathcal{M}_p(\mathbf{C})$.
   (a) Montrer que $C^2 = C$ et que $\mathrm{Spec}_{\mathbf{C}}(C) \subset \{0, 1\}$.
   (b) Monter que les valeurs propres de B sont toutes de module inférieur ou égal à 1, et qu'une valeur propre de B de module 1 est égale à 1.

C4. 211. *Exercice (TPE).* — Munissons $E = \mathcal{C}^0([0\ ;\ 1], \mathbf{R})$ de la norme $||\,.\,||_1$. Soit $x_0 \in [0\ ;\ 1]$.

1. Montrer que l'application :
$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ f & \longmapsto & f(x_0) \end{array} \right.$$
n'est pas continue.
2. Que dire de $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$?

C4. 212. *Exercice (TPE tronqué).* — Notons $\ell^\infty(\mathbf{R})$ l'ensemble des suites bornées sur $\mathbf{R}$. Munissons-le de la norme $||\,.\,||_\infty$. Pour toute suite $u = (u_n)_{nin\mathbf{N}} \in \ell^\infty(\mathbf{R})$, posons :
$$\Delta(u) = (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbf{N}}$$
Montrer que Δ est un endomorphisme continu de $(\ell^\infty, ||\,.\,||_\infty)$.

C4. 213. *Exercice.* —

1. Soit $(E, ||\,.\,||)$ un espace vectoriel normé, soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Montrer que F est fermé.
2. Le résultat précédent demeure-t-il si F n'est pas supposé de dimension finie ? On pourra s'intéresser au sous-espace F de $\ell^1(\mathbf{R})$ de constitué des suites nulles à partir d'un certain rang.

C4. 214. *Exercice (Mines).* — Soit K une partie fermée de $[0\ ;\ 1]^2$. On suppose que pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$, l'ensemble :

$$\{y \in [0\ ;\ 1]\ :\ (x, y) \in K\}$$

est un intervalle non vide. Montrer que K intersecte la droite d'équation $y = x$.

C4. 215. *Exercice.* — Munissons $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ d'une norme matricielle, i.e. d'une norme d'algèbre.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $||\,M\,|| < 1$.
   (a) Montrer que la série M^k converge.
   (b) Que vaut $(I_n - M)\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} M^k$?
2. En déduire que $GL_n(\mathbf{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbf{R})$. Donner une autre démonstration de ce résultat à l'aide du déterminant.
3. Montrer que l'application :

$$\text{inv} \left| \begin{array}{ccc} GL_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbf{R}) \\ A & \longmapsto & A^{-1} \end{array} \right.$$

   est continue.

C4. 216. *Exercice.* — Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

C4. 217. *Exercice (Navale).* — Montrer que toute suite réelle admet une suite extraite monotone.

C4. 218. *Exercice (Mines).* — Soit (P_k) une suite de polynômes de $\mathbf{R}_n[X]$ convergeant simplement vers un polynôme $P \in \mathbf{R}_n[X]$. Montrer que la convergence est uniforme sur toute partie compacte et $\mathbf{R}_n[X]$.

C4. 219. *Exercice.* — Soient $(E, ||\,.\,||)$ et $(F, ||\,.\,||)$ deux espaces vectoriels normés. Soit $f\colon E \longrightarrow F$ une application injective.

1. Montrer que f est continue si et seulement si pour tout compact K de E, $f(K)$ est un compact de f.
2. Le résultat subsiste-t-il si f n'est pas supposée injective ?

C4. 220. *Exercice.* — Soient $(E, ||\,.\,||)$ et $(F, ||\,.\,||)$ deux espaces vectoriels normés. Soit $f\colon E \longrightarrow F$ une application continue telle que pour tout compact K de F, $f^{-1}(K)$ est un compact de E.

1. Montrer que pour tout femé A de E, $f(A)$ est un fermé de F.
2. En général, l'image d'un fermé par une application continue est-elle nécessairement fermée ?

C4. 221. *Exercice (Centrale).* — Soit K un compact d'un espace vectoriel normé $(E, ||\,.\,||)$. Soit $f\colon K \longrightarrow K$ une application continue telle que :

$$\forall (x,y) \in K^2,\ ||\, f(x) - f(y)\, || \geq ||\, x - y\, ||$$

Soit $(x,y) \in K^2$. Notons (x_n), (y_n) les suites d'éléments de K définies par $\forall n \in \mathbf{N}$, $x_n = f^n(x)$ et $y_n = f^n(y)$. En d'autres termes, $x_0 = x$ et $y_0 = y$, et $\forall n \in \mathbf{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$ et $y_{n+1} = f(y_n)$.

1. Montrer qu'il existe une application $\varphi :: N \longrightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante telle que les suites $(x_{\varphi(n)})$ et $(y_{\varphi(n)})$ convergent. Notons x' et y' leurs limites respectives.
2. Montrer que $\left|\left|\, x - x_{\varphi(n+1)-\varphi(n)}\, \right|\right| \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$.
3. Montrer que $x_{\varphi(n+1)-\varphi(n)} \xrightarrow[+\infty]{} x$ et $y_{\varphi(n+1)-\varphi(n)} \xrightarrow[+\infty]{} y$.
4. Montrer que :
$$||\, x - y\, || \leq ||\, f(x) - f(y)\, || \leq \left|\left|\, f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(x) - f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(y)\, \right|\right|$$
5. En déduire que $||\, f(x) - f(y)\, || = ||\, x - y\, ||$.
6. Montrer que f est bijective.

C4. 222. *Exercice (Centrale).* — Soit K un convexe compact non vide d'un espace vectoriel normé $(E, ||\,.\,||)$, soit $f \in \mathcal{L}\left(()\, E\right)$ un endomorphisme continu tel que $f(K) \subset K$. Montrer que f possède un point fixe.

Indication : étant donné un $a \in K$, on pourra considérer la suite de terme général $x_n = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f^k(a)$.

C4. 223. *Exercice (Centrale).* — Soit $(E, ||\,.\,||)$ un espace vectoriel normé, soit $K \subset E$ un compact non vide, soit $f\colon K \longrightarrow K$ telle que pour tout $(x, y) \in K^2$,

$$x \neq y \Longrightarrow ||\, f(x) - f(y)\, || < ||\, x - y\, ||$$

Montrer que f possède un unique point fixe $c \in K$, et que pour tout $x \in K$, la suite définie par $x_0 = x$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers c.

C4. 224. *Exercice.* — Soit $(E, ||\cdot||)$ un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé, soit $C \subset E$ un ouvert convexe de E, contenant 0, borné et symétrique par rapport à 0, i.e. tel que $\forall x \in C$, $-x \in C$. Pour tout $x \in E$, posons :

$$||\, x\, ||_C = \inf \left\{ t > 0 \;:\; \frac{x}{t} \in C \right\}$$

On dit que $||\,.\,||_C$ est la jauge associée à C.

1. Montrer que $||\,.\,||_C$ est bien définie sur E.
2. Montrer que $||\,.\,||_C$ est une norme sur E.
3. Quelle est la boule unité ouverte pour la norme $||\,.\,||_C$?

C4. 225. *Exercice (Centrale).* — Notons $\ell^\infty(\mathbf{R})$ l'espace des suites réelles bornées et $\ell^1(\mathbf{R})$ l'espace des suites réelles $x = (x_n)$ telles que la série $\sum |x_n|$ converge. Pour tout $a = (a_n) \in \ell^\infty(\mathbf{R})$ et $x = (x_n) \in \ell^1(\mathbf{R})$, posons :

$$\langle\, a\,,\, x\,\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n$$

1. Justifier l'existence de $\langle\, a\,,\, x\,\rangle$.
2. Soit $a \in \ell^\infty(\mathbf{R})$. Montrer que l'application :
$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \ell^1(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \langle\, a\,,\, x\,\rangle \end{array} \right.$$
est une forme linéaire continue sur $\ell^1(\mathbf{R})$.
3. Soit $x \in \ell^1(\mathbf{R})$. Montrer que l'application :
$$\psi \left| \begin{array}{ccc} \ell^\infty(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ a & \longmapsto & \langle\, a\,,\, x\,\rangle \end{array} \right.$$
est une forme linéaire continue sur $\ell^\infty(\mathbf{R})$.
4. Question subsidiaire : soit f une forme linéaire continue sur $\ell^1(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe $a \in \ell^\infty(\mathbf{R})$ telle que :
$$\forall x \in \ell^1(\mathbf{R}), \quad f(x) = \langle\, a\,,\, x\,\rangle\,.$$

C4. 226. *Exercice.* — Soit $n \in \mathbf{N}^*$, soit $p \geq 1$. Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, posons :

$$|| \, x \, ||_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

Soit $q \geq 1$ l'unique réel tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1. Montrer que pour tout $(x, y) \in (\mathbf{R}^{+*})^2$, $x^{1/p} y^{1/q} \leq \dfrac{1}{p} x + \dfrac{1}{q} y$.
2. Notons $(.|.)$ le produit scalaire usuel sur $\mathbf{R}^n$. Montrer que pour tout $(x, y) \in (\mathbf{R}^n)^2$, $|(x|y)| \leq || \, x \, ||_p \, || \, y \, ||_q$.
3. Soient $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$. En remarquant que :
$$(|x_k| + |y_k|)^p = |x_k| \, (|x_k| + |y_k|)^{p-1} + |y_k| \, (|x_k| + |y_k|)^{p-1}$$
montrer que $|| \, . \, ||_p$ est une norme sur $\mathbf{R}^n$.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, $|| \, x \, ||_p \xrightarrow[p \longrightarrow +\infty]{} || \, x \, ||_\infty$.

C4. 227. *Exercice.* — Notons $f = \mathcal{C}^0([0 \ ; \ 1], \mathbf{R})$, soit $p \geq 1$. Pour toute fonction $f \in E$, notons :

$$|| \, f \, ||_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p}$$

1. En s'inspirant de l'exercice précédent, démontrer que $|| \, . \, ||_p$ est une norme sur E.
2. Montrer que pour toute fonction $f \in E$, $|| \, f \, ||_p \xrightarrow[p \longrightarrow +\infty]{} || \, f \, ||_\infty$.

C4. 228. *Exercice (Centrale).* — Posons $E = \mathcal{C}^1([0 \ ; \ 1], \mathbf{R})$. Pour toute fonction $f \in E$, notons :

$$N(f) = \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(x)^2 \, \mathrm{d}x}$$

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. Comparer N et $|| \, . \, ||_\infty$.

C4. 229. *Exercice (X).* — Déterminer tous les morphismes continus de $(\mathbb{U}, \times)$ dans lui-même.

C4. 230. *Exercice (X).* — Que dire d'une partie convexe et dense d'un espace vectoriel normé ?

C4. 231. *Exercice (Centrale).* — Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est connexe par arcs. Qu'en est-il de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$?

C4. 232. *Exercice.* — Soit I un ouvert non vide de $\mathbf{R}$. Montrer qu'il existe une famille au plus dénombrable $(I_n)_{n\in I}$ d'intervalles ouverts deux- à-deux disjoints telle que :

$$I = \bigcup_{n\in I} I_n$$

Indication : on pourra considérer la relation d'équivalence sur I définie par $x\mathcal{R}y \iff (x-y) \in I$ et étudier les classes d'équivalence pour cette relation.

C4. 233. *Exercice.* — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On note :

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| \;:\; \lambda \in \mathrm{Spec}(A)\}$$

le rayon spectral de A.

1. Soit $||\,.\,||$ une norme d'algèbre unitaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que pour toute matrice $A \in M_n(\mathbf{C})$, $||\,A\,|| \leq \rho(A)$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une norme d'algèbre $||\,.\,||_{A,\varepsilon}$ telle que $||\,A\,||_{A,\varepsilon} \leq \rho(A) + \varepsilon$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) $A^k \xrightarrow[k\longrightarrow+\infty]{} 0$.
   (b) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$, $A^kX \xrightarrow[k\longrightarrow+\infty]{} 0$.
   (c) La série $\sum A^k$ converge.
   (d) $\rho(A) < 1$.

C4. 234. *Exercice (X).* — Déterminer l'adhérence et l'intérieur de l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

C4. 235. *Exercice (X).* — Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dont la classe similitude, i.e. l'ensemble

$$\left\{P^{-1}AP \ : \ P \in GL_n(\mathbf{C})\right\}$$

est fermée.

C4. 236. *Exercice (X).* — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que A est nilpotente si et seulement si il existe une suite (A_k) de matrices semblables à A convergeant vers 0.

C4. 237. *Exercice (ENS).* — Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles que la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbf{N}}$ soit bornée.