M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Programme des journées de révisions n°6 et 7
Espaces vectoriels de dimension finie

David BLOTTIÈRE

La théorie des espaces vectoriels de dimension finie présente certaines analogies avec celles des ensembles finis. Citons deux propriétés issues de chacune des théorie pour illustrer le propos. Si A et B sont deux ensembles finis de même cardinal tels que $A \subset B$, alors $A = B$. Le pendant de cette propriété en algèbre linéaire peut s'énoncer comme suit : si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie tel que $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$. La formule de Grassmann est un outil précieux pour étudier l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de dimension finie (e.g. l'intersection de deux hyperplans distincts d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ est de dimension $n - 2$) et la formule du rang livre un critère d'isomorphie d'un grand intérêt : si E et F sont deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de même dimension finie, alors une application linéaire de E dans F est injective si et seulement si elle est surjective. Si l'on fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 1$, alors l'application

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n & \longrightarrow & E \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_1.e_1 + x_2.e_2 + \ldots + x_n.e_n \end{array} \right.$$

est un isomorphisme (cf. coordonnées d'un vecteur de E dans la base $\mathcal{B}$). Ainsi un problème posé dans E peut être transporté dans $\mathbf{K}^n$, avec parfois une traduction mettant en jeu un système linéaire.

R6-7. 1. *Notations.* — Dans tout ce document, la lettre $\mathbf{K}$ désigne l'un des deux corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

R6-7. 2. *Travail sur le cours.* — Le document support est le polycopié de cours sur les espaces vectoriels de dimension finie [PDF].

On commencera par étudier les familles (finies) remarquables dans un espace vectoriel : familles libres, familles liées, familles génératrices. On étudiera notamment une démonstration de la caractérisation des familles liées (Propriété 2 du document support) qui constitue un bon exercice, mêlant des concepts précédemment cités et la logique.

On sera alors en mesure d'introduire une définition centrale de ce chapitre : un espace vectoriel est dit *de dimension finie* s'il possède une famille génératrice finie.

Viendra alors le temps de revoir deux autres notions :

- celle de base d'un espace vectoriel ;
- celle de coordonnées d'un vecteur d'un espace vectoriel relativement à une base.

Ainsi, l'étude d'un espace vectoriel de dimension finie pourra être ramenée à l'étude d'un des espaces vectoriels $\mathbf{K}^n$, où $n \in \mathbf{N}^*$. Les systèmes linéaires joueront alors un grand rôle. Ils seront tous résolus en suivant l'algorithme du pivot de Gauß (aucune autre méthode n'est acceptée).

On reverra rapidement les bases, dites canoniques, de quelques espaces vectoriels usuels.

Étant donné un espace vectoriel de dimension finie (i.e. qui possède une famille génératrice finie), on dispose de deux résultats importants

- le théorème de la base incomplète ;
- le théorème de la base extraite ;

qui renferment chacun en leur sein un algorithme. Grâce au théorème de la base extraite, on est alors en mesure d'affirmer que tout espace vectoriel de dimension finie possède une base (ce qui ne parait pas aisé à établir sans).

De ces deux théorèmes, nous en déduisons deux conséquences importantes :

- tout espace vectoriel de dimension finie possède une base ;
- l'existence d'un supplémentaire pour un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel de dimension finie.

Après ce travail préparatoire, nous pouvons définir la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie. Il s'agit du cardinal commun d'une de ses bases (Théorème 9 du document support). Le fait que toutes les bases aient même cardinal est la pierre angulaire du chapitre. La Propriété 8 du document support doit être intensément travaillée (enoncé et, bien sûr, démonstration). L'interaction avec les systèmes linéaires culmine en ce point.

On saura caractériser les bases parmi les familles libres (resp. génératrices) d'un espace vectoriel et on commencera à dresser le formulaire sur la dimension des espaces vectoriels de dimension finie, avec le produit cartésien de deux espaces vectoriels de dimension finie.

On s'intéressera ensuite aux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie, en étudiant la Proposition 13 du document support (enoncé et, bien sûr, démonstration). En particulier, on verra qu'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est lui-même de dimension finie, ce qui n'est pas immédiat à démontrer.

On enrichira le formulaire sur la dimension des espaces vectoriels de dimension finie de la formule de Grassmann et on saura caractériser des sous-espaces supplémentaires d'un espace vectoriel de dimension finie (critère fort commode).

Après avoir défini et étudié le rang d'une famille finie de vecteurs, on se penchera sur l'apport de la théorie de la dimension pour l'analyse des applications linéaires. Il est absolument colossal !

On devra connaître absolument le théorème/la formule du rang (enoncé et, bien sûr, démonstration), ainsi que ses corollaires (critères d'isomorphie) dont la puissance est considérable.

Enfin, dans une dernière partie, on abordera les espaces d'applications linéaires, en ajoutant au formulaire sur la dimension des espaces vectoriels de dimension finie la dimension de $\mathcal{L}(E)\, F$, qui est de dimension finie, lorsque E et F sont des espaces vectoriels de dimension finie.

Les applications à la dualité (e.g. liens entre formes linéaires non nulles et hyperplans) constituent un joli champ d'applications de la théorie développée, que l'on prospectera avec intensité. On peut construire d'innombrables sujets sur ce thème.

Ce travail sur le cours est fondamental. Il convient de connaître toutes les définitions, ainsi que les énoncés et des démonstrations de chacun des résultats de ce chapitre.

R6-7. 3. *Vrai-Faux.* — Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Si la réponse est « Vrai », alors démontrer le résultat. Si la réponse est « Faux », argumenter au moyen un contre-exemple.

1. Soient u et v deux vecteurs de $\mathbf{R}^3$ tels que la famille (u, v) est liée. Alors il existe $k \in \mathbf{R}$ tel que $v = k.u$.

   Faux. Prenons $u = (0, 0, 0)$ et $v = \left(\dfrac{2022}{2021}, \pi^{1977}, \dfrac{\sqrt{2011}}{e}\right)$ par exemple. Puisque :

   $$1.u + 0.v = (0, 0, 0)$$

   la famille (u, v) n'est pas libre. D'autre part, s'il existait $k \in \mathbf{R}$ tel que $v = k.u$, alors v serait le vecteur nul, ce qui n'est pas.

   Remarque. Dire que la famille (u, v) est libre signifie que :

   $$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2 \quad \alpha.u + \beta.v = 0_{\mathbf{R}^3} \Longrightarrow (\alpha, \beta) = (0, 0)\ .$$

   Ainsi (revoir comment on nie formellement une implication si nécessaire), dire que la famille est liée signifie :

   $$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2 \quad \alpha.u + \beta.v = 0_{\mathbf{R}^3} \text{ et } (\alpha, \beta) \neq (0, 0)\ .$$

   La propriété $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ se traduit par $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$, mais pas par $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$.

2. Les sous-espaces vectoriels

   $$F = \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}\left((1, 1, 1), (0, 1, 0)\right) \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}\left((1, 2, 1), (1, 0, 1)\right)$$

   de $\mathbf{R}^3$ sont égaux.

Vrai.

- Les vecteurs $(1,1,1)$ et $(0,1,0)$ ne sont pas colinéaires. La famille
$$\mathcal{B}_F := ((1,1,1),(0,1,0))$$
est donc libre. Comme la famille $\mathcal{B}_F$ est de plus génératrice de F par définition, elle forme une base de F. Ainsi $\dim(F) = 2$.
- De manière analogue, on établit $\dim(G) = 2$.
- On remarque :
$$(1,2,1) = (1,1,1) + (0,1,0) \in F \quad \text{et} \quad (1,0,1) = (1,1,1) - (0,1,0) \in F$$
Par minimalité d'un sous-espace vectoriel engendré, nous en déduisons :
$$(\star) \qquad G = \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}\left((1,2,1),(1,0,1)\right) \subset F\ .$$

D'après l'inclusion $(\star)$ et de l'égalité des dimensions finies de F et G, $F = G$.

Remarque. L'égalité des dimensions finies nous permet de ne montrer qu'une seule des deux inclusions $F \subset G$ et $G \subset F$ pour conclure à l'égalité.

3. Soient u, v, w trois vecteurs de $\mathbf{R}^3$ tels que u et v ne sont pas colinéaires, u et w ne sont pas colinéaires et v et w ne sont pas colinéaires. Alors la famille (u,v,w) est libre.

Faux. Considérons les vecteurs :
$$u = (1,0,0) \quad ; \quad v = (0,1,0) \quad ; \quad w = u + v = (1,1,0)\ .$$
Ces trois vecteurs ne sont pas deux-à-deux colinéaires, mais la famille (u,v,w) n'est pas libre, puisque :
$$1.u + 1.v + (-1).w = (0,0,0)$$

4. Il existe une application linéaire injective de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^2$.

Faux. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une application linéaire injective $f\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$. Alors, d'après la formule du rang :
$$(\star) \qquad \dim\left(\mathbf{R}^3\right) = \dim\left(\mathrm{Ker}\,(f)\right) + \dim\left(\mathrm{Im}\,(f)\right)\ .$$
Comme f est injective, $\mathrm{Ker}\,(f) = \{0_{\mathbf{R}^3}\}$. Comme $\mathrm{Im}\,(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$, $\dim\left(\mathrm{Im}\,(f)\right) \leqslant 2$. Ainsi $(\star)$ livre $3 \leqslant 2$, ce qui n'est pas.

Remarque. On peut généraliser le résultat précédent, en raisonnant de la même manière (i.e. à l'aide de la formule du rang) : si E et F sont des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim(E) > \dim(F)$, alors il n'existe pas d'application linéaire injective de E dans F.

5. L'application linéaire

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y+3z, 4x+5y+6z, 7x+8y+9z) \end{array} \right.$$

est injective.

Faux. Pour le démontrer, calculons $\operatorname{Ker}(f)$ et démontrons que $\operatorname{Ker}(f) \neq \{(0,0,0)\}$. Soit $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$.

$$(x,y,z) \in \operatorname{Ker}(f) \iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ 4x & + & 5y & + & 6z & = & 0 \\ 7x & + & 8y & + & 9z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{cccccccl} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 & \\ & & -3y & - & 6z & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ & & -6y & - & 12z & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1 \end{array} \right.$$

Après cet échelonnement partiel de ce système linéaire à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauß, nous observons que le vecteur $(-1,2,-1)$ appartient à $\operatorname{Ker}(f)$. L'application f n'est donc pas injective.

R6-7. 4. *Détermination d'un supplémentaire d'un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.* — Soient $E_1 = \operatorname{Vect}_{\mathbf{R}}(v_1, v_2)$ et $E_2 = \operatorname{Vect}_{\mathbf{R}}(w_1, w_2)$ avec $v_1 = (1,-1,0,1)$, $v_2 = (0,2,1,0)$, $w_1 = (0,6,-1,4)$ et $w_2 = (3,3,1,5)$.

1. Déterminer une base de $E_1 \cap E_2$.

- Soit $u \in E_1 \cap E_2$. Comme $u \in E_1$, il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R}^2$ tel que

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = (\lambda_1, -\lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_2, \lambda_1).$$

Comme $u \in E_2$, il existe $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbf{R}^2$ tel que

$$u = \mu_1 w_1 + \mu_2 v_2 = (3\mu_2, 6\mu_1 + 3\mu_2, -\mu_1 + \mu_2, 4\mu_1 + 5\mu_2).$$

D'où

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & & = & & & 3\mu_2 \\ -\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & = & 6\mu_1 & + & 3\mu_2 \\ & & \lambda_2 & = & -\mu_1 & + & \mu_2 \\ \lambda_1 & & & = & 4\mu_1 & + & 5\mu_2 \end{array} \right.$$

On applique l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & & = & & & 3\mu_2 \\ & & 2\lambda_2 & = & 6\mu_1 & + & 6\mu_2 \\ & & \lambda_2 & = & -\mu_1 & + & \mu_2 \\ \lambda_1 & & & = & 4\mu_1 & + & 5\mu_2 \end{array} \right.$$

De L_1 et L_4, nous déduisons $3\mu_2 = 4\mu_1 + 5\mu_2$, soit $\mu_2 = -2\mu_2$, puis

$$u = (-6\mu_1, 0, -3\mu_1, -6\mu_1) = \mu_1(-6, 0, -3, -6).$$

Donc $u \in \mathbf{Vect}(-6, 0, -3, -6) = \mathbf{Vect}(2, 0, 1, 2)$. Nous avons donc établi

$$E_1 \cap E_2 \subset \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}\left((2, 0, 1, 2)\right).$$

- Nous observons :

$$(2, 0, 1, 2) = 2v_1 + v_2 \in E_1 \qquad \text{et} \qquad (2, 0, 1, 2) = \frac{2}{3}w_1 - \frac{1}{3}w_2.$$

Donc $(2, 0, 1, 2) \in E_1 \cap E_2$. Par minimalité d'un sous-espace vectoriel engendré,

$$\mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}\left((2, 0, 1, 2)\right) \subset E_1 \cap E_2.$$

- Ainsi, $((2, 0, 1, 2))$ est une base de $E_1 \cap E_2$.

2. Donner une base de $E_1 + E_2$.

- D'après le cours, la famille (v_1, v_2, w_1, w_2) est génératrice de $E_1 + E_2$.
- D'après la formule de Grassmann,

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2).$$

Les vecteurs v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires, donc (v_1, v_2) est une base de E_1. Ainsi $\dim(E_1) = 2$. Les vecteurs w_1 et w_2 ne sont pas colinéaires, donc (w_1, w_2) est une base de E_2. Ainsi $\dim(E_2) = 2$. D'après 1, $\dim(E_1 \cap E_2) = 1$. Par suite, $\dim(E_1 + E_2) = 3$.
- De la question 1, nous déduisons $2v_1 + v_2 = \frac{2}{3}w_1 - \frac{1}{3}w_2$ et donc :

$$v_2 = -2v_1 + \frac{2}{3}w_1 - \frac{1}{3}w_2 \in \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}\left(v_1, w_1, w_2\right).$$

D'après le cours, la famille (v_1, w_1, w_2) reste génératrice de $E_1 + E_2$. Or elle possède $3 = \dim(E_1 + E_2)$ éléments. C'est donc une base de $E_1 + E_2$.

3. Définir un supplémentaire de $E_1 + E_2$ dans $\mathbf{R}^4$.

- La famille (v_1, w_1, w_2) est une famille libre de 3 éléments de $\mathbf{R}^4$. D'après le théorème de la base incomplète, on peut la compléter en une base de $\mathbf{R}^4$ en lui adjoignant un des vecteurs de la base canonique.
- On résout l'équation

$$ae_1 + bv_1 + cw_1 + dw_2 = 0$$

d'inconnue $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$ et on trouve $a = b = c = d = 0$ (*à détailler sur la copie*). La famille (e_1, v_1, w_1, w_2) est donc libre. Comme elle contient $4 = \dim(\mathbf{R}^4)$ éléments, c'est une base de $\mathbf{R}^4$. Donc

$$\mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}\left(e_1\right) + (E_1 + E_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}\left(e_1\right) + \mathbf{Vect}(v_1, w_1, w_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}\left(e_1, v_1, w_1, w_2\right) = \mathbf{R}^4.$$

Il reste à voir que $\text{Vect}_{\mathbf{R}}(e_1) \cap (E_1 + E_2) = \{0\}$ pour savoir que $\text{Vect}_{\mathbf{R}}(e_1)$ est un supplémentaire de $E_1 + E_2$ dans $\mathbf{R}^4$.

- La propriété $\text{Vect}_{\mathbf{R}}(e_1) \cap (E_1 + E_2) = \{0\}$ découle de la liberté de la famille (e_1, v_1, w_1, w_2). Soit $u \in \text{Vect}_{\mathbf{R}}(e_1) \cap (E_1 + E_2)$. Alors il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $u = ae_1$ et $(b, c, d) \in \mathbf{R}^3$ tel que $u = bv_1 + cw_1 + dw_2$. Donc

$$ae_1 - bv_1 - cw_1 - dw_2 = 0$$

ce qui entraîne, par liberté de (e_1, v_1, w_1, w_2), $a = 0$ et donc $u = 0$.
- $\text{Vect}_{\mathbf{R}}(e_1)$ est donc un supplémentaire de $E_1 + E_2$ dans $\mathbf{R}^4$.

R6-7. 5. *Un critère pour qu'un endomorphisme soit une homothétie.* — Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel. Soit f un endomorphisme de E. On suppose que pour tout $u \in E$, la famille $(u, f(u))$ est liée. Démontrer que f est une homothétie, i.e. :

$$\exists \lambda \in \mathbf{R} \quad \forall u \in E \quad f(u) = \lambda u.$$

- Soit $u \in E \setminus \{0_E\}$. La famille $(u, f(u))$ étant liée, il existe $(\alpha_u, \beta_u) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que

$$\alpha_u u + \beta_u f(u) = 0.$$

Si $\beta_u = 0$, alors $\alpha_u \neq 0$ et $\alpha_u u = 0_E$, d'où $u = 0_E$, ce qui est exclu. D'où $\beta_u \neq 0$ et

$$f(u) = \lambda_u u \quad \text{avec } \lambda_u := -\frac{\alpha_u}{\beta_u}.$$

Notons que comme la famille (u) est libre, le scalaire λ_u vérifiant $f(u) = \lambda_u u$ est unique.
- Fixons un vecteur non nul de E, noté u. Soit $v \in E \setminus \{0_E\}$. Montrons que $\lambda_v = \lambda_u$.
  . Supposons que la famille (u, v) est liée.
  Alors, comme précédemment, puisque $u \neq 0_E$, on démontre l'existence d'un scalaire μ tel que $v = \mu u$. De

$$\lambda_v v = f(v) = f(\mu u) = \mu f(u) = \mu \lambda_u u = \lambda_u v$$

  et de la liberté de (v), on déduit $\lambda_v = \lambda_u$.
  . Supposons que la famille (u, v) est libre.
  Alors, $u + v \neq 0_E$. De

$$\lambda_{u+v} u + \lambda_{u+v} v = \lambda_{u+v}(u + v) = f(u + v) = f(u) + f(v) = \lambda_u u + \lambda_v v$$

  et de la liberté de (u, v), on déduit $\lambda_u = \lambda_{u+v} = \lambda_v$.
- Nous venons de démontrer que tous les λ_v, pour $v \in E \setminus \{0_E\}$ sont égaux. Notons λ leur valeur commune. Il vient

$$\forall v \in E \setminus \{0_E\} \quad f(v) = \lambda v.$$

La relation $f(v) = \lambda v$ vaut aussi pour $v = 0_E$, puisque f étant linéaire, $f(0_E) = 0_E = \lambda 0_E$. Donc

$$\forall v \in E \quad f(v) = \lambda v.$$

R6-7. 6. *Condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme soit factorisable à droite par un autre.* — Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer

$$\mathrm{Ker}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(g) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, h \in \mathcal{L}(E)\,,\ g = h \circ f.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose qu'il existe $h \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g = h \circ f$.
Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(f)$.

$$g(x) = h \circ f(x) = h(f(x)) = h(0) = 0$$

où la dernière identité vient de la linéarité de h. Donc $x \in \mathrm{Ker}\,(g)$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $\mathrm{Ker}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(g)$.

- Soit A un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\,(f)$ dans E (nous sommes en dimension finie, A peut être construit, par exemple, avec le théorème de la base incomplète du programme).
- Considérons l'application

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & f(A) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

  Cette application est linéaire (restriction et co-restriction d'une application linéaire) et surjective par construction. Vérifions qu'elle est injective.
  Soit $x \in A$ tel que $\varphi(x) = 0$. Alors $f(x) = 0$ et donc $x \in \mathrm{Ker}\,(f)$. Ainsi $x \in A \cap \mathrm{Ker}\,(f) = \{0\}$ car A et $\mathrm{Ker}\,(f)$ sont supplémentaires dans E. Donc $x = 0$.
  L'application φ étant un isomorphisme, nous pouvons considérer sa bijection réciproque φ^{-1}, qui est également linéaire.
- Soit B un supplémentaire de $f(A)$ dans E (nous sommes en dimension finie, B peut être construit, par exemple, avec le théorème de la base incomplète du programme). Posons

$$p \left| \begin{array}{ccc} E = f(A) \oplus B & \longrightarrow & f(A) \\ y + z & \longmapsto & y \end{array} \right.$$

  la projection de E sur $f(A)$ parallèlement à B.
- Nous vérifions que l'application

$$h = g \circ i \circ \varphi^{-1} \circ p$$

  convient, où

$$i \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$$

  est l'injection canonique, qui est clairement linéaire.
  . L'application h est linéaire, comme composée d'applications linéaires.
  . Soit $x \in E = \mathrm{Ker}\,(f) \oplus A$. Alors x s'écrit $x = x_0 + a$, avec $x_0 \in \mathrm{Ker}\,(f)$ et $a \in A$. Nous calculons

$$h \circ f(x_0) = h(0) = 0$$

$$h \circ f(a) = g(i(\varphi^{-1}(p(f(a))))) = g(i(\varphi^{-1}(f(a)))) = g(i(a)) = g(a).$$

  pour obtenir

$$h \circ f(x) = h \circ f(x_0) + h \circ f(a) = g(a).$$

D'autre par comme $\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}(g)$, $g(x_0) = 0$ et donc $g(x) = g(x_0) + g(a) = g(a)$. Ainsi $g(x) = h \circ f(x)$.

R6-7. 7. *Endomorphismes qui ont un carré qui leur est proportionnel.* — Soit E un espace vectoriel réel non réduit à $\{0_E\}$. Soit k un réel donné. On note A_k l'ensemble des endomorphismes u de E tels que $u^2 = ku$.

1. Soit $u \in A_k$.

(a) L'endomorphisme u peut-il être inversible ? Qu'est-ce que u dans ce cas ?

Nous effectuons une disjonction de cas.

- Cas où $k = 0$

  Si $k = 0$, alors $u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Donc u^2 n'est pas inversible. u n'est pas inversible, car s'il l'était $u^2 = u \circ u$ le serait, ce qui n'est pas.

  $$\boxed{\text{Si } k = 0, \text{ alors } u \text{ n'est pas inversible.}}$$

- Cas où $k \neq 0$

  Supposons u inversible. Alors en composant par u^{-1} chaque membre de l'identité $u^2 = ku$, il vient $u = k\, \mathrm{id}_E$.

  Si à présent $u = k\, \mathrm{id}_E$, alors $u \in A_k$ (clair) et :

  $$u \circ \frac{1}{k}\, \mathrm{id}_E = \frac{1}{k}\, \mathrm{id}_E \circ u = \mathrm{id}_E\,.$$

  Donc u est inversible et $u^{-1} = \dfrac{1}{k}\, \mathrm{id}_E\,.$

  $$\boxed{\text{Si } k \neq 0, \text{ alors } u \in A_k \text{ est inversible si et seulement si } u = k\, \mathrm{id}_E.}$$

(b) Déterminer $u(x)$, pour $x \in \operatorname{Im}(u)$.

Soit $x \in \mathrm{Im}(u)$. Alors il existe $x' \in E$ tel que $x = u(x')$. Donc $u(x) = u(u(x')) = k\, u(x') = k\, x$.

$$\boxed{\text{Si } x \in \mathrm{Im}(u), \text{ alors } u(x) = k\, x.}$$

(c) Démontrer que, si $k \neq 0$, alors $\operatorname{Im}(u)$ et $\operatorname{Ker}(u)$ sont des sous-espaces vectoriels de E supplémentaires. Que dire de $\operatorname{Im}(u)$ et $\operatorname{Ker}(u)$, si $k = 0$?

Cas où $k \neq 0$

- Démonstration de $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0_E\}$

  Comme $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont des sous-espaces vectoriels de E, l'inclusion $\{0_E\} \subset \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)$ est claire. Démontrons l'autre.

  Soit $x \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)$. Alors $0 = u(x) = k\, x$, d'après 1 b). Comme $k \neq 0$, il vient $x = 0$.
- Démonstration de $\mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}(u) = E$

Comme $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont des sous-espaces vectoriels de E, l'inclusion $\text{Ker}(u)+\text{Im}(u) \subset E$ est claire. Démontrons l'autre.
Soit $x \in E$. On cherche $x_1 \in \text{Ker}(u)$ et $x_2 \in \text{Im}(u)$ tels que

$$x = x_1 + x_2. \tag{1}$$

Pour cela, nous raisonnons par analyse-synthèse.

. *Analyse*
Supposons qu'une telle décomposition de x existe. En appliquant u à chaque membre de (1), il vient

$$u(x) = k\,x_2$$

en utilisant à nouveau 1 b). Comme $k \neq 0$, nous en déduisons :

$$x_2 = \frac{1}{k}\,u(x) = u\left(\frac{1}{k}\,x\right).$$

D'après (1), $x_1 = x - u\left(\frac{1}{k}\,x\right)$.

. *Synthèse*
Soient x_1 et x_2 comme en fin d'analyse. Il est clair que $x_2 \in \text{Im}(u)$ et que $x_1 + x_2 = x$. Ensuite, comme :

$$u(x_1) = u\left(x - u\left(\frac{1}{k}\,x\right)\right) = u(x) - \frac{1}{k}\,u(u(x)) = u(x) - \frac{1}{k}\,k\,u(x) = 0$$

le vecteur x_1 est dans $\text{Ker}(u)$.

Donc

$$\boxed{\text{si } k \neq 0, \text{ alors } E = \text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u).}$$

Cas où $k = 0$
Alors $u^2 = 0$ et on vérifie aisément que $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$. En effet, soit $x \in \text{Im}(u)$. Alors il existe $x' \in E$ tel que $x = u(x')$ et :

$$u(x) = u(u(x')) = 0.u(x') = 0.$$

Donc $x \in \text{Ker}(u)$.

$$\boxed{\text{Si } k = 0, \text{ alors } \text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u).}$$

(d) On suppose que E est de dimension finie. Lorsque $k \neq 0$, comment doit-on choisir une base de E pour que la matrice associée à u dans cette base soit diagonale ? Quelle sera alors cette matrice ? Si $k = 0$, peut-on trouver une base de E telle que la matrice associée à u dans cette base soit diagonale ?

Cas où $k \neq 0$

- Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale. Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

Alors il existe $\lambda_i \in \mathbf{R}$ tel que $u(e_i) = \lambda_i e_i$.

. Si $\lambda_i = 0$, alors $e_i \in \text{Ker}(u)$.

. Si $\lambda_i \neq 0$, alors

$$e_i = \frac{1}{\lambda_i}\, u(e_i) = u\left(\frac{1}{\lambda_i}\, e_i\right)$$

et donc $e_i \in \text{Im}(u)$.

Ainsi $e_i \in \text{Ker}(u)$ ou $e_i \in \text{Im}(u)$.

- Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E telle pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $e_i \in \text{Ker}(u)$ ou $e_i \in \text{Im}(u)$. Alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$u(e_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } e_i \in \text{Ker}(u) \\ k\, e_i & \text{si } e_i \in \text{Im}(u), \text{ d'après 1 b).} \end{cases}$$

Dans tous les cas, $u(e_i)$ est multiple de e_i, donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale.

> Si $k \neq 0$, alors $\mathcal{B}$ est une base de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale si et seulement si tout vecteur de $\mathcal{B}$ est dans $\text{Ker}(u)$ ou dans $\text{Im}(u)$.

Un vecteur d'une base de E ne peut être à la fois dans $\text{Ker}(u)$ et dans $\text{Im}(u)$, sinon il serait nul, par 1 c). Donc :

> Si $k \neq 0$, alors $\mathcal{B}$ est une base de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale si et seulement si tout vecteur de $\mathcal{B}$ est soit dans $\text{Ker}(u)$, soit dans $\text{Im}(u)$.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Nous observons que : tout vecteur de $\mathcal{B}$ est soit dans $\text{Ker}(u)$, soit dans $\text{Im}(u)$ si et seulement si la base $\mathcal{B}$ est adaptée à la décomposition $E = \text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u)$, à l'ordre des vecteurs près. Donc :

> Si $k \neq 0$, alors $\mathcal{B}$ est une base de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale si et seulement si la base $\mathcal{B}$ est adaptée à la décomposition $E = \text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u)$, à l'ordre des vecteurs près.

En particulier, si l'on prend $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de $\text{Im}(u)$ et $(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ une base de $\text{Ker}(u)$, alors $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n)$ est une base de E et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale.

D'après 1 b) et ce qui précède, si $\mathcal{B}$ est une base de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale alors :

> (α) $\quad \forall\, i \in [\![1, n]\!], \quad [\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)]_{ii} = 0$ ou k
>
> (β) $\quad$ la diagonale de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ contiendra $r := \text{rang}(u)$ fois le nombre k et $n - r$ fois le nombre 0.

Dans le cas particulier où la base $\mathcal{B}$ est adaptée à la décomposition $E = \text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u)$ alors nous avons la description par blocs suivante :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} k.I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cas où $k=0$

- Supposons qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale. Notons $d_1, \ldots, d_n$ ses coefficients diagonaux, i.e. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Diag}(d_1, \ldots, d_n)$. Alors :

$$0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{R})} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(u^2\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)^2 = \mathrm{Diag}\left(d_1^2, \ldots, d_n^2\right).$$

Par suite $d_1 = d_2 = \ldots = d_n = 0$. Donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{R})}$ et ainsi $u = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

- Réciproquement si $u = 0_{\mathcal{L}(E)}$ alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{R})}$ est diagonale, pour toute base $\mathcal{B}$ de E.

Si $k=0$, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale si et seulement si $u = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

2. Soient u et v des endomorphismes de E appartenant à A_k. On suppose dans les questions (a), (b) et (c) de cette partie que $k \neq 0$.

   (a) Montrer que $u \circ v + v \circ u = 0$ implique $u \circ v = v \circ u = 0$.

Ici $k \neq 0$. Supposons $u \circ v + v \circ u = 0$.

- Démonstration de $v \circ u = 0$.
  Puisque $E = \mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u)$, il (faut et il) suffit de montrer que :
  (α) $v(u(x))$, pour tout $x \in \mathrm{Ker}(u)$.
  (β) $v(u(x))$, pour tout $x \in \mathrm{Im}(u)$.
  La propriété (α) est claire. Soit $x \in \mathrm{Im}(u)$. Par 1 b),

$$v(u(x)) = v(k\,x) = k\,v(x). \tag{2}$$

Comme $u \circ v + v \circ u = 0$:

$$v(u(x)) = -u(v(x)). \tag{3}$$

De (2) et (3), il vient : $v(x) = u\left(-\dfrac{1}{k}\,v(x)\right)$. Donc $v(x) \in \mathrm{Im}(u)$. Par 1 b) :

$$u(v(x)) = k\,v(x). \tag{4}$$

De (2) et (4), on déduit $v(u(x)) = u(v(x))$, puis grâce à (3) $v(u(x)) = -v(u(x))$. Ainsi, $v(u(x)) = 0$.

- Par symétrie des rôles joués par u et v, nous déduisons de ce qui précède que $u \circ v = 0$.

Donc

$$\boxed{u \circ v + v \circ u = 0 \Longrightarrow u \circ v = v \circ u = 0.}$$

   (b) À quelle condition nécessaire et suffisante $u+v$ appartient-il à A_k ? Montrer que dans ce cas, $\mathrm{Im}\,(u+v) = \mathrm{Im}\,(u) + \mathrm{Im}\,(v)$ et $\mathrm{Ker}\,(u+v) = \mathrm{Ker}\,(u) \cap \mathrm{Ker}\,(v)$.

- Nous raisonnons par équivalences.

$$\begin{array}{rcll} u+v\in A_k & \Longleftrightarrow & (u+v)^2=k\,(u+v) & \\ & \Longleftrightarrow & u^2+u\circ v+v\circ u+v^2=k\,(u+v) & \\ & \Longleftrightarrow & k\,u+u\circ v+v\circ u+k\,v=k\,(u+v) & [u,v\in A_k] \\ & \Longleftrightarrow & u\circ v+v\circ u=0 & \end{array}$$

Donc

$$\boxed{u+v\in A_k \Longleftrightarrow u\circ v+v\circ u=0.}$$

- Supposons que $u+v\in A_k$, i.e. que $u\circ v+v\circ u=0$ d'après ce qui précède. Alors, par 2 a), $u\circ v=v\circ u=0$.
  . L'inclusion $\text{Im}(u+v)\subset\text{Im}(u)+\text{Im}(v)$ est claire. Démontrons $\text{Im}(u)+\text{Im}(v)\subset\text{Im}(u+v)$. Soit $x\in\text{Im}(u)+\text{Im}(v)$. Alors il existe $x_1,x_2\in E$ tels que :

$$x=u(x_1)+v(x_2).$$

Nous calculons :

$$\begin{array}{rcll} (u+v)(x) & = & u^2(x_1)+u(v(x_2))+v(u(x_1))+v^2(x_2) & \\ & = & k\,u(x_1)+k\,v(x_2) & [u,v\in A_k,\ uv=vu=0] \\ & = & k\,x. & \end{array}$$

Ainsi $x=\dfrac{1}{k}\,(u+v)(x)=(u+v)\left(\dfrac{1}{k}\,x\right)$. Donc $x\in\text{Im}(u+v)$.
Nous avons établi :

$$\boxed{\text{Im}(u+v)=\text{Im}(u)+\text{Im}(v).}$$

  . L'inclusion $\text{Ker}(u)\cap\text{Ker}(v)\subset\text{Ker}(u+v)$ est claire. Démontrons $\text{Ker}(u+v)\subset\text{Ker}(u)\cap\text{Ker}(v)$. Soit $x\in\text{Ker}(u+v)$.
Comme $(u+v)(x)=0$:

$$u(x)=-v(x). \tag{5}$$

Nous calculons :

$$k\,u(x)=u(u(x))=u(-v(x))=-uv(x)=0 \qquad [u\in A_k,\ uv=0]\,.$$

Comme $k\neq 0$, $u(x)=0$. Par (5), il vient $v(x)=0$. Donc $x\in\text{Ker}(u)\cap\text{Ker}(v)$.
Nous avons établi :

$$\boxed{\text{Ker}(u+v)=\text{Ker}(u)\cap\text{Ker}(v).}$$

(c) Montrer que si $u\circ v=v\circ u$, $u\circ v$ appartient à un ensemble $A_{k'}$, et que dans ce cas :

$$\text{Im}\,(u\circ v)=\text{Im}\,(u)\cap\text{Im}\,(v) \quad \text{et} \quad \text{Ker}\,(u\circ v)=\text{Ker}\,(u)+\text{Ker}\,(v)\ .$$

Supposons $u \circ v = v \circ u$.

- Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned}
(u \circ v)^2(x) &= u \circ v \circ u \circ v(x) \\
&= u \circ u \circ v \circ v(x) \qquad [u \circ v = v \circ u] \\
&= u^2(v^2(x)) \\
&= u^2(k\, v(x)) \qquad [v \in A_k] \\
&= k\, u(k\, v(x)) \qquad [u \in A_k] \\
&= k^2\, uv(x).
\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{u \circ v \in A_{k^2}.}$$

- L'inclusion $\mathrm{Im}(u \circ v) \subset \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v)$ est claire, car $uv = vu$.

Démontrons $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Im}(u \circ v)$. Soit $x \in \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v)$. Alors il existe $x_1, x_2 \in E$ tels que :

$$x = u(x_1) = v(x_2).$$

Comme $u \in A_k$:

$$u(x) = u^2(x_1) = k\, u(x_1) = k\, x$$

donc

$$x = \frac{1}{k}\, u(x) = u\left(\frac{1}{k}\, x\right) \in \mathrm{Im}(u).$$

Comme $v \in A_k$:

$$v(x) = v^2(x_2) = k\, v(x_2) = k\, x$$

donc

$$x = \frac{1}{k}\, v(x) = v\left(\frac{1}{k}\, x\right) \in \mathrm{Im}(v).$$

Par suite $x \in \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v)$.

Nous avons établi :

$$\boxed{\mathrm{Im}(u \circ v) = \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v).}$$

- L'inclusion $\mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(u \circ v)$ est claire, car $u \circ v = v \circ u$.

Démontrons $\mathrm{Ker}(u \circ v) \subset \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v)$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u \circ v)$. Comme $u \in A_k$, $u(u(x)) = k\, u(x) = u(k\, x)$ et donc :

$$u(u(x) - k\, x) = 0$$

et par suite $x' := u(x) - k\, x \in \mathrm{Ker}(u)$. Par définition même de x', il vient :

$$x = -\frac{1}{k}\, x' + \frac{1}{k}\, u(x).$$

Comme $x' \in \text{Ker}(u)$, $-\dfrac{1}{k}\,x' \in \text{Ker}(u)$.

$$v\left(\frac{1}{k}\,u(x)\right) = \frac{1}{k}\,v(u(x)) = \frac{1}{k}\,u(v(x)) = 0$$

car $x \in \text{Ker}(uv)$. Donc $\dfrac{1}{k}\,u(x) \in \text{Ker}(v)$. De ce qui précède, nous déduisons x s'écrit comme somme d'un élément de $\text{Ker}(u)$ et d'un élément de $\text{Ker}(v)$.
Nous avons établi :

$$\boxed{\text{Ker}(u \circ v) = \text{Ker}(u) + \text{Ker}(v).}$$

(d) On suppose enfin que u et v appartiennent à A_0, avec $u \neq 0$ et que $\dim(E) = 2$. Soit e_1 un vecteur de E tel que $u(e_1) = e_2 \neq 0$. Montrer que (e_1, e_2) forme une base de E et déterminer la matrice de u dans cette base. En déduire que dans ce cas $u \circ v + v \circ u = 0$ implique encore $u \circ v = v \circ u = 0$.

- Notons que comme $u \neq 0$, il existe bien un vecteur e_1 de E tel que $u(e_1) \neq 0$.
Comme E est de dimension 2 et que la famille (e_1, e_2) comporte deux vecteurs, pour prouver que (e_1, e_2) est une base de E, il (faut et il) suffit de prouver que la famille (e_1, e_2) est libre.
Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ tels que $\lambda_1\, e_1 + \lambda_2\, e_2 = 0$, i.e. tels que :
$$\lambda_1\, e_1 + \lambda_2\, u(e_1) = 0. \tag{6}$$
En appliquant u à chaque membre de la précédente identité et $u^2 = 0$, nous obtenons : $\lambda_1\, u(e_1) = 0$. Comme $u(e_1) \neq 0$, il vient $\lambda_1 = 0$. L'identité (6) se réécrit alors $\lambda_2\, u(e_1) = 0$. Comme $u(e_1) \neq 0$, $\lambda_2 = 0$. La famille (e_1, e_2) est donc libre. Donc :
$$\boxed{(e_1, e_2) \text{ est une base de } E.}$$
- Comme $e_2 = u(e_1)$, $u(e_1) = e_2 = 0.e_1 + 1.e_2$ et $u(e_2) = 0 = 0.e_1 + 0.e_2$ (cf. $u^2 = 0$). Nous en déduisons :
$$\boxed{\text{Mat}_{(e_1,e_2)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$
- Supposons $u \circ v + v \circ u = 0$. Nous commençons par étudier la matrice $\text{Mat}_{(e_1,e_2)}(v)$. Le vecteur $v(e_1)$ est un vecteur de E, dont (e_1, e_2) est une famille génératrice. Donc il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ tels que :
$$v(e_1) = \lambda_1\, e_1 + \lambda_2\, e_2 = \lambda_1\, e_1 + \lambda_2\, u(e_1). \tag{7}$$
En appliquant v à chaque membre de (7), et en utilisant $v^2 = 0$, il vient :
$$0 = \lambda_1\, v(e_1) + \lambda_2\, v(u(e_1)). \tag{8}$$

Nous calculons, en utilisant (7) et $u^2 = 0$:

$$v(u(e_1)) = -u(v(e_1)) = -\lambda_1 u(e_1). \tag{9}$$

En injectant dans (8), les expressions de $v(e_1)$ et $v(u(e_1))$ données par (7) et (9), nous obtenons :

$$0 = \lambda_1(\lambda_1 \, e_1 + \lambda_2 \, u(e_1)) + \lambda_2 \, (-\lambda_1 \, u(e_1)) = \lambda_1^2 \, e_1.$$

Ainsi avons nous $\lambda_1 = 0$, et par suite : $v(e_1) = \lambda_2 \, u(e_1)$, et $v(u(e_1) = 0$ d'après (9). Donc :

$$\text{Mat}_{(e_1,e_2)}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous en déduisons $v = \lambda_2 \, u$. Comme $u^2 = 0$, il en résulte $uv = vu = 0$.
Nous avons établi :

$$\boxed{u \circ v + v \circ u = 0 \Longrightarrow u \circ v = v \circ u = 0.}$$

3. Soit f un endomorphisme de E satisfaisant à la condition $f^2 - af + bid_E = 0$, où a et b sont des réels donnés. On suppose f et id_E linéairement indépendants.

 (a) À quelle condition nécessaire et suffisante doivent satisfaire a et b pour qu'il existe deux constantes réelles distinctes λ_1 et λ_2, telles que les endomorphismes $u = f - \lambda_1 id_E$ et $v = f - \lambda_2 id_E$ appartiennent à des ensembles A_k et $A_{k'}$? Préciser alors k et k' en fonction de λ_1 et λ_2.

- Supposons qu'il existe deux réels λ_1, λ_2 tels que :
  - (α) $\lambda_1 \neq \lambda_2$;
  - (β) $f - \lambda_1 \, \text{id}_E \in A_k$, pour un certain k réel;
  - (γ) $f - \lambda_2 \, \text{id}_E \in A_{k'}$, pour un certain k réel.

  D'après (β)

$$k(f - \lambda_1 \, \text{id}_E) = (f - \lambda_1 \, \text{id}_E)^2 = f^2 - 2\lambda_1 f + \lambda_1^2 \, \text{id}_E \, .$$

  et donc :

$$f^2 = (k + 2\lambda_1)f - \lambda_1(k + \lambda_1)Id_2.$$

  Or $f^2 = af - b \, \text{id}_E$ et (f, id_E) est une famille libre. Nous en déduisons :

$$k + 2\lambda_1 = a \quad \text{et} \quad \lambda_1(k + \lambda_1) = b. \tag{10}$$

  Grâce à (γ), nous obtenons de même :

$$k' + 2\lambda_2 = a \quad \text{et} \quad \lambda_2(k' + \lambda_2) = b. \tag{11}$$

  Des deux équations (10), puis des deux équations (11), nous déduisons :

$$\lambda_1^2 - \lambda_1 a + b = 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda_2^2 - \lambda_2 a + b = 0.$$

Ainsi λ_1 et λ_2 sont deux racines distinctes (cf. (α)) de $P := X^2 - aX + b$.
Dressons le bilan de cette étude. Si λ_1 et λ_2 vérifiant (α), (β), (γ) existent, alors P possède deux racines réelles distinctes, i.e. :

$$a^2 - 4b > 0.$$

- Supposons que $a^2 - 4b > 0$, i.e. que P possède deux racines réelles distinctes, que nous notons λ_1 et λ_2. La condition (α) est vérifiée. Vérifions la condition (β).

$$\begin{array}{rcll} (f - \lambda_1 \operatorname{id}_E)^2 & = & f^2 - 2\lambda_1 f + \lambda_1^2 \operatorname{id}_E & \\ & = & (a - 2\lambda_1) f + (\lambda_1^2 - b) \operatorname{id}_E & \qquad [f^2 = af - b \operatorname{id}_E] \end{array}$$

À ce stade, nous nous appuyons sur le début de notre étude, grâce auquel nous savons que si k existe, alors il est égal à $a - 2\lambda_1$. Pour conclure à (β), il nous reste à voir que :

$$\lambda_1^2 - b = -\lambda_1(a - 2\lambda_1)$$

ce qui découle du fait que λ_1 est racine de P. Ainsi, si on pose $k := a - 2\lambda_1$:

$$(f - \lambda_1 \operatorname{id}_E)^2 = k(f - \lambda_1 \operatorname{id}_E).$$

La condition (γ) se vérifie de même, et conduit à poser $k' := a - 2\lambda_2$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe des réels } \lambda_1, \lambda_2 \text{ vérifiant } (\alpha), (\beta), (\gamma) \text{ si et seulement si } a^2 - 4b > 0.}$$

De plus :

$$\boxed{\text{si de tels réels } \lambda_1, \lambda_2 \text{ existent alors } k := a - 2\lambda_1 = \lambda_2 - \lambda_1 \text{ et } k' := a - 2\lambda_2 = \lambda_1 - \lambda_2.}$$

Ici nous avons utilisé une relation coefficients/racines. En effet, puisque λ_1 et λ_2 sont les racines réelles de $X^2 - aX + b$ on a :

$$a = \lambda_1 + \lambda_2 \qquad \text{et} \qquad b = \lambda_1 \lambda_2.$$

(b) Montrer que dans ce cas, on a $u \circ v = v \circ u = 0$. Expliquer ce résultat, en considérant l'endomorphisme $u - v$.

- Par relations coefficients/racines, nous avons :

$$u \circ v = (f - \lambda_1 \operatorname{id}_E)(f - \lambda_2 \operatorname{id}_E) = f^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) f + \lambda_1 \lambda_2 \operatorname{id}_E = f^2 - af + b \operatorname{id}_E = 0.$$

De même, nous établissons $v \circ u = 0$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{s'il existe des réels } \lambda_1, \lambda_2 \text{ vérifiant } (\alpha), (\beta), (\gamma), \text{ alors } u \circ v = v \circ u = 0.}$$

- Les endomorphisme u et v commutent (ce sont des polynômes de l'endomorphisme f). Donc

$$\begin{aligned}(u-v)^2 &= u^2 - 2u \circ v + v^2 \\ &= ku - 2u \circ v + k'v \\ &= -2u \circ v + (k+k')f - (k\lambda_1 + k'\lambda_2)\,\mathrm{id}_E\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}&k + k' = \lambda_2 - \lambda_1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ &k\lambda_1 + k'\lambda_2 = \lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1) + \lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2) = -(\lambda_2 - \lambda_1)^2.\end{aligned}$$

Il résulte de cette étude que :

$$(u-v)^2 = -2u \circ v + (\lambda_2 - \lambda_1)^2\,\mathrm{id}_E \tag{12}$$

Or $u - v = (\lambda_2 - \lambda_1)\,\mathrm{id}_E$ et donc $(u-v)^2 = (\lambda_2 - \lambda_1)^2\,\mathrm{id}_E$. En comparant cette dernière identité à (12), il vient $u \circ v = 0$.

(c) Calculer, pour p entier naturel, l'endomorphisme f^p en fonction de u et v.

- Des définitions de u et v il ressort : $f = u + \lambda_1\,\mathrm{id}_E$ et $f = v + \lambda_2\,\mathrm{id}_E$, d'où :

$$\lambda_2 f = \lambda_2 u + \lambda_1\lambda_2 Id_2 \qquad \text{et} \qquad \lambda_1 f = \lambda_1 v + \lambda_1\lambda_2\,\mathrm{id}_E\,.$$

En soustrayant membre à membre ces deux identités, il vient : $(\lambda_2 - \lambda_1)f = \lambda_2 u - \lambda_1 v$ puis, comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

$$f = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}u - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}v.$$

- Soit $p \geq 2$ un entier naturel. Nous avons déjà remarqué que u et v commutent. La formule du binôme de Newton s'applique donc.

$$f^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{\lambda_2^k\,(-\lambda_1)^{p-k}}{(\lambda_2 - \lambda_1)^p} u^k \circ v^{p-k}. \tag{13}$$

Puisque $u \circ v = 0$, d'après 3 b), nous avons, pour tout $p \in [\![1, p-1]\!]$:

$$u^k \circ v^{p-k} = 0.$$

L'identité (13) se réécrit donc :

$$f^p := \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)^p}\left(\lambda_2^p u^p + (-\lambda_1)^p v^p\right). \tag{14}$$

À l'aide d'un raisonnement par récurrence, on déduit de $u^2 = ku = (\lambda_2 - \lambda_1)u$ et $v^2 = k'v = (\lambda_1 - \lambda_2)v$ que :

$$u^p = (\lambda_2 - \lambda_1)^{p-1}u \qquad \text{et} \qquad v^p = (\lambda_1 - \lambda_2)^{p-1}v.$$

Ainsi (14) se réécrit :

$$\boxed{f^p = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\lambda_2^p u - \lambda_1^p v\right).}$$

Soulignons que la précédente formule vaut également pour $p = 0$ et $p = 1$.

(d) À quelle condition nécessaire et suffisante, l'endomorphisme f est-t-il inversible ? Quel est alors son inverse ?

Nous démontrons que f est inversible si et seulement si $b \neq 0$.

- Supposons f inversible. Montrons que $b \neq 0$ par l'absurde. Si $b = 0$, alors $f^2 - af = 0$ et donc $f(f - a\,\mathrm{id}_E) = 0$. En composant cette dernière identité par f^{-1} à gauche, il vient : $f - a\,\mathrm{id}_E = 0$. Donc (f, id_E) est liée, ce qui est contraire à une des hypothèses initiales.
- Supposons $b \neq 0$. Alors de $f^2 - af + bId_E = 0$, nous déduisons :

$$f\left(\frac{a}{b}\,\mathrm{id}_E - \frac{1}{b}f\right) = \left(\frac{a}{b}\,\mathrm{id}_E - \frac{1}{b}f\right)f = \mathrm{id}_E\,.$$

Nous en déduisons que f est inversible et que $f^{-1} = \frac{a}{b}\,\mathrm{id}_E - \frac{1}{b}f$.

Ainsi :

$$\boxed{f \text{ est inversible si et seulement si } b \neq 0, \text{ et si } f \text{ est inversible alors } f^{-1} = \frac{a}{b}\,\mathrm{id}_E - \frac{1}{b}f.}$$

4. Soit g un endomorphisme de E de rang 1.

(a) Montrer qu'il existe un réel k tel que $g \in A_k$. On montrera que si $\mathrm{Im}\,(g)$ n'est pas inclus dans $\mathrm{Ker}\,(g)$, alors $\mathrm{Im}\,(g)$ et $\mathrm{Ker}\,(g)$ sont des sous-espaces vectoriels de E supplémentaires.

<u>Cas où Im(g) est inclus dans Ker(g)</u>

Si Im(g) est inclus dans Ker(g), alors $g^2 = 0$ et donc $g \in A_k$, pour $k = 0$.

<u>Cas où Im(g) n'est pas inclus dans Ker(g)</u>

Nous supposons ici que Im(g) n'est pas inclus dans Ker(g). Par hypothèse, Im(g) est de dimension 1. Soit x_0 un vecteur de base de Im(g).

- Démonstration de Im(g) $\cap$ Ker(g) $= \{0\}$ $-$ ***inutile pour l'objectif, ici***
  Soit $x \in$ Im(g)$\cap$Ker(g). Alors il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $x = \lambda x_0$. Démontrons que $\lambda = 0$, par l'absurde. Si $\lambda \neq 0$, alors comme $x \in$ Ker(g) et comme Ker(g) est un sous-espace vectoriel de E, $x_0 = \frac{1}{\lambda}x \in$ Ker(g). Par minimalité d'un sous-espace vectoriel engendré, Im(g) $=$ Vect(x_0) $\subset$ Ker(g), ce qui contredit l'hypothèse additionnelle. Donc $\lambda = 0$ et $x = 0$.
- Étude de $g(x)$ pour $x \in$ Im(g) $-$ ***décisif pour l'objectif, ici***
  . Le vecteur $g(x_0)$ est dans l'image de g, dont (x_0) est une base. Il existe donc un

scalaire k tel que $g(x_0) = kx_0$.

. Soit $x \in \mathrm{Im}(g)$. Alors il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $x = \lambda x_0$. Nous calculons :

$$g(x) = \lambda g(x_0) = \lambda k x_0 = kx.$$

. Si $k = 0$, alors $g(x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{Im}(g)$ et donc $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(g)$, ce qui est contraire à l'hypothèse additionnelle. Donc $k \neq 0$.

Nous avons démontré :

$$\boxed{\text{il existe } k \in \mathbf{R}^* \text{ tel que pour tout } x \in \mathrm{Im}(g),\ g(x) = kx.}$$

- Démonstration de $E = \mathrm{Ker}(g) + \mathrm{Im}(g)$ − ***inutile pour l'objectif, ici***

L'inclusion $\mathrm{Ker}(g) + \mathrm{Im}(g) \subset E$ est claire. Démontrons l'autre. Soit $x \in E$. On cherche $x_1 \in \mathrm{Ker}(g)$ et $x_2 \in \mathrm{Im}(g)$ tels que

$$x = x_1 + x_2. \tag{15}$$

Pour cela, nous raisonnons par analyse-synthèse.

. ***Analyse***

Supposons qu'une telle décomposition de x existe. En appliquant g à chaque membre de (15), il vient

$$g(x) = g(x_2) = kx_2.$$

k étant non nul, il vient :

$$x_2 = \frac{1}{k} g(x) = g\left(\frac{1}{k}x\right) \qquad \text{et} \qquad x_1 = x - x_2 = x - g\left(\frac{1}{k}x\right).$$

. ***Synthèse***

Soient x_1 et x_2 comme en fin d'analyse. Il est clair que $x_2 \in \mathrm{Im}(u)$ et que $x_1 + x_2 = x$. Calculons $g(x_1)$.

$$g(x_1) = g(x - x_2) = g(x) - g(x_2) = g(x) - kx_2 = g(x) - k\frac{1}{k}g(x) = 0.$$

Le vecteur x_1 est donc dans $\mathrm{Ker}(g)$.

Donc :

$$\boxed{E = \mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Im}(g).}$$

Soit $x \in E$. Puisque $g(x) \in \mathrm{Im}(g)$: $g(g(x)) = kg(x)$. Donc :

$$\boxed{g^2 = kg \text{ et } g \in A_k.}$$

Observons que nous n'avons pas utilisé $E = \mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Im}(g)$, pour établir la précédente identité (...).

(b) On suppose que E est de dimension finie. Soit M la matrice associée à g dans une base de E. Montrer que $k = \text{Tr}(M)$.

Cas où $k \neq 0$

Notons n la dimension de E. Nous considérons la base (x_0) de E précédemment considérée et rappelons que $g(x_0) = kx_0$ (par définition même de k). Par le théorème du rang (ou par ce qui précède), $\dim(\text{Ker}(g)) = n-1$. Soit $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ une base de E. Comme $E = \text{Ker}(g) \oplus \text{Im}(g)$, la famille $\mathcal{B} := (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ est une base de E, adaptée à la décomposition $E = \text{Ker}(g) \oplus \text{Im}(g)$. Bien sûr, $g(x_i) = 0$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$. Nous en déduisons :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \text{Diag}(k, 0, \ldots, 0).$$

Donc $\text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g)) = k$. La trace étant un invariant de similitude, nous obtenons :

$$\boxed{\text{Si } k \neq 0, \text{ alors pour toute base } \mathcal{C} \text{ de } E, \ \text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{C}}(g)) = \text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g)) = k.}$$

Cas où $k = 0$

Par le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(g)) = n - 1$. Soit $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ une base de $\text{Ker}(g)$ que l'on complète en une base $\mathcal{B} = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ de E. On écrit

$$g(x_n) = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_{n-1} x_{n-1} + \lambda_n x_n$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n \in \mathbf{R}$. Alors

$$0 = g(g(x_n)) = \lambda_n g(x_n).$$

Comme $g(x_n) \neq 0$ (sinon $x_n \in \text{Ker}(g)$ et la famille $\mathcal{B}$ n'est pas libre), il vient $\lambda_n = 0$. On en déduit que tous les coefficients diagonaux de la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$ sont nuls et donc que $\text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g)) = 0$. La trace étant un invariant de similitude, nous obtenons :

$$\boxed{\text{Si } k = 0, \text{ alors pour toute base } \mathcal{C} \text{ de } E, \ \text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{C}}(g)) = \text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g)) = 0.}$$

5. On prend pour E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$, à valeurs réelles. Soit F une fonction non nulle donnée appartenant à E, et u l'application qui à toute fonction G appartenant à E fait correspondre la fonction H définie par :

$$\forall x \in [0, 1], \qquad H(x) = \int_0^1 F(x)\, t\, G(t)\, \mathrm{d}t$$

(a) Montrer que u est un endomorphisme de E.

- Soit $G \in E$. La fonction $u(G)$ est définie par :

$$\forall\, x \in [0, 1] \qquad u(G)(x) = \int_0^1 F(x) t G(t)\ \mathrm{d}t = \left(\int_0^1 t G(t)\ \mathrm{d}t \right) F(x).$$

Si on pose
$$\lambda_G := \int_0^1 tG(t)\ \mathrm{d}t$$
qui est un scalaire indépendant de x, on a donc :
$$\forall x \in [0,1] \qquad u(G)(x) = \lambda_G F(x).$$
Comme pour tout $x \in \mathbf{R}$, $u(G)(x) = \lambda_G F(x)$ et que les applications $u(G)$ et $\lambda_G F$ ont mêmes ensembles de départ ($[0,1]$) et d'arrivée ($\mathbf{R}$) :
$$\boxed{u(G) = \lambda_G F, \text{ où } \lambda_G \text{ est le scalaire } \int_0^1 tG(t)\ \mathrm{d}t.}$$
La fonction F étant continue sur $[0,1]$, il en est donc de même de $u(G)$. Ainsi :
$$\boxed{\text{si } G \in E \text{ alors } u(G) \in E.}$$

- Soit $G_1, G_2 \in E$ et soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$. Les applications $u(\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2)$ et $\lambda_1 u(G_1) + \lambda_2 u(G_2)$ ont même ensemble de départ ($[0,1]$), et même ensemble d'arrivée ($\mathbf{R}$). Soit $x \in [0,1]$.
$$\begin{aligned} u(\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2)(x) &= \int_0^1 F(x)t\left(\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2\right)(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 F(x)t\left(\lambda_1 G_1(t) + \lambda_2 G_2(t)\right)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \lambda_1 F(x)tG_1(t) + \lambda_2 F(x)tG_2(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \lambda_1 \int_0^1 F(x)tG_1(t)\ \mathrm{d}t + \lambda_2 \int_0^1 F(x)tG_2(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \lambda_1 u(G_1)(x) + \lambda_2 u(G_2)(x) \\ &= (\lambda_1 u(G_1) + \lambda_2 u(G_2))(x) \end{aligned}$$
Ainsi :
$$\boxed{u(\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2) = \lambda_1 u(G_1) + \lambda_2 u(G_2).}$$

(b) Montrer que u est de rang 1. Quel est l'espace image de u ?

- Soit $H \in \mathrm{Im}(u)$. Alors il existe $G \in E$ tel que $H = u(G)$. D'après l'étude faite au début de 5 a), $H = u(G) = \lambda_G F$, où λ_G est le scalaire définie par $\lambda_G := \int_0^1 tG(t)\ \mathrm{d}t$.

Donc $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Vect}(F)$.

- La fonction $G\colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}, t \longmapsto 2$ appartient à E. Alors :

$$\lambda_G = \int_0^1 2t \, \mathrm{d}t = \left[t^2\right]_0^1 = 1$$

nous obtenons $u(G) = F$. Ainsi $F \in \mathrm{Im}(u)$. Par minimalité d'un sous-espace vectoriel engendré, $\mathrm{Vect}(F) \subset \mathrm{Im}(u)$.

- Des deux points précédents, on déduit $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(F)$. Comme $F \neq 0$, nous en déduisons que (F) est une base de $\mathrm{Im}(u)$ et donc que $\mathrm{Im}(u)$ est de dimension 1. Donc :

$$\boxed{\mathrm{rang}(u) = 1.}$$

(c) Montrer qu'il existe un réel k tel que $u^2 = ku$, et donner une expression de k au moyen d'une intégrale.

L'existence d'un réel k tel que $u^2 = ku$ découle des questions 4 a) et 5 b). En reprenant l'étude faire en 4 a), et en choisissant $x_0 = F$ (ce qui est possible car (F) est une base $\mathrm{Im}(u)$), nous observons que k est le scalaire tel que :

$$u(F) = kF.$$

Avec la notation introduite en 5 b), nous avons :

$$\boxed{k = \lambda_F = \int_0^1 tF(t) \, \mathrm{d}t.}$$

(d) Calculer k lorsque pour tout $x \in [0,1]$, $F(x) = \mathrm{Arcsin}(x)$.

Il s'agit ici de calculer $\displaystyle\int_0^1 t\,\mathrm{Arcsin}(t) \, \mathrm{d}t$. Nous allons procéder par intégrations par parties, mais Arcsin n'étant pas dérivable en 1, il faut prendre quelques précautions. Soit $A \in]0,1[$.

$$\begin{aligned}
\int_0^A t\,\mathrm{Arcsin}(t)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^2}{2}\mathrm{Arcsin}(t)\right]_0^A - \int_0^A \frac{t^2}{2}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \qquad [\mathrm{IPP}] \\
&= \frac{A^2}{2}\mathrm{Arcsin}(A) + \frac{1}{2}\left(\int_0^A \frac{1-t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t - \int_0^A \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{A^2}{2}\mathrm{Arcsin}(A) + \frac{1}{2}\int_0^A \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\mathrm{Arcsin}(A)
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}\int_0^A \sqrt{1-t^2}\ \mathrm{d}t &= \int_{\mathrm{Arccos}(A)}^{\pi/2} \sin^2(x)\ \mathrm{d}x \qquad [\text{changement de variable } t=\cos(x)]\\ &= \int_{\mathrm{Arccos}(A)}^{\pi/2} \frac{1-\cos(2x)}{2}\ \mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin(2x)\right]_{\mathrm{Arccos}(A)}^{\pi/2}\\ &= \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\mathrm{Arccos}(A)+\frac{1}{4}\sin(2\mathrm{Arccos}(A)).\end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$\int_0^A t\,\mathrm{Arcsin}(t)\ \mathrm{d}t = \frac{A^2}{2}\mathrm{Arcsin}(A)+\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\mathrm{Arccos}(A)+\frac{1}{8}\sin(2\mathrm{Arccos}(A))-\frac{1}{2}\mathrm{Arcsin}(A).$$

En faisant tendre A vers 1, il vient :

$$\boxed{k=\int_0^1 t\mathrm{Arcsin}(t)\ \mathrm{d}t=\frac{\pi}{8}.}$$

(e) Calculer k lorsque pour tout $x\in[0,1]$, $F(x)=\exp(\sqrt{x})$.

Il s'agit ici de calculer $\displaystyle\int_0^1 t\ e^{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$. Nous souhaitons effectuer le changement de variable $x=\sqrt{t}$. Or la fonction racine carrée n'étant pas dérivable en 0, il convient de « s'écarter un peu de 0 ». Soit $\varepsilon\in]0,1[$.

$$\int_\varepsilon^1 t\ e^{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t = \int_{\sqrt{\epsilon}}^1 2x^3e^x\ \mathrm{d}x \qquad \left[\text{changement de variable } x=\sqrt{t}\right]$$

En faisant tendre ε vers 0 dans la précédente inégalité, il vient :

$$\int_0^1 t\ e^{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t = \int_0^1 2x^3e^x\ \mathrm{d}x.$$

L'intégrale du membre de droite se calcule par intégrations par parties successives (par exemple), et vaut $12-4e$. Donc :

$$\boxed{k=\int_0^1 t\ e^{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t=12-4e.}$$

6. Soit $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles, admettant des dérivées à tous les ordres

sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et u l'application de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$ qui, à toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}$ fait correspondre la fonction g définie par :

$$\forall x \in]0,+\infty[\,, \qquad g(x) = x\, f'(x)$$

(a) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{C}$.

- Soit $f \in \mathcal{C}$. Alors f' est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$. La fonction $]0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}, x \longmapsto x$ est également de classe $\mathcal{C}^\infty$. Un produit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ étant $\mathcal{C}^\infty$, la fonction $u(f)\colon]0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R} \ : \ x \longmapsto x\, f'(x)$ est également $\mathcal{C}^\infty$. Ainsi :

$$\boxed{\text{si } f \in \mathcal{C} \text{ alors } u(f) \in \mathcal{C}.}$$

- Soit $f_1, f_2 \in \mathcal{C}$ et soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$. Les fonctions $u(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)$ et $\lambda_1 u(f_1) + \lambda_2 u(f_2)$ ont même ensemble de départ ($]0,+\infty[$) et même ensemble d'arrivée ($\mathbf{R}$). Soit $x \in]0,+\infty[$.

$$\begin{array}{rcll} u(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) & = & x\,(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)'(x) & \\ & = & x(\lambda_1 f_1' + \lambda_2 f_2')(x) & \text{[linéarité de la dérivation]} \\ & = & x(\lambda_1 f_1'(x) + \lambda_2 f_2'(x)) & \\ & = & \lambda_1 x f_1'(x) + \lambda_2 x f_2'(x) & \\ & = & \lambda_1 u(f_1)(x) + \lambda_2 u(f_2)(x) & \\ & = & (\lambda_1 u(f_1) + \lambda_2 u(f_2))(x) & \end{array}$$

Ainsi :

$$\boxed{u(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 u(f_1) + \lambda_2 u(f_2).}$$

(b) On se donne le réel k. Montrer qu'il existe un plus grand (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel E de $\mathcal{C}$ tel que :
- E est stable par u ;
- la restriction de u à E, que l'on notera v, est un endomorphisme de E satisfaisant la condition $v^2 = kv$.

Donner la dimension et une base $\mathcal{B}$ de E en distinguant le cas $k = 0$ et le cas $k \neq 0$.

Soit $k \in \mathbf{R}$.
- . Considérons

$$\boxed{\begin{array}{rcl} E & := & \{f \in \mathcal{C}, u^2(f) = ku(f)\} \\ & = & \mathrm{Ker}(u^2 - ku) \\ & = & \{f \in \mathcal{C} \ : \ \forall\, x \in]0,+\infty[\quad x f'(x) + x^2 f''(x) = kx f'(x)\} \\ & = & \left\{ f \in \mathcal{C} \ : \ \forall\, x \in]0,+\infty[\quad f''(x) = \dfrac{k-1}{x} f'(x) \right\}. \end{array}}$$

  . Comme E est le noyau de l'endomorphisme $u^2 - ku$ de $\mathcal{C}$, E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$.

. Soit $f \in E$. Vérifions que $u(f) \in E$.

$$u^2(u(f)) - ku(u(f)) = u(u^2(f)) - u(ku(f)) = u(u^2(f) - kf) = u(0) = 0.$$

Donc $u \in \mathrm{Ker}(u^2 - ku) = E$. Ainsi E est stable par u.

. Par construction même, E est le plus grand sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$ satisfaisant les deux conditions demandées.

- Soit $f \in \mathcal{C}$.

$$\begin{aligned} f \in E \quad &\iff \quad \forall\, x > 0 \qquad f''(x) = \frac{k-1}{x} f'(x) \\ &\iff \quad \forall\, x > 0 \qquad (f')'(x) = \frac{k-1}{x} f'(x) \\ &\iff \quad \exists A_1 \in \mathbf{R} \quad \forall\, x > 0 \qquad f'(x) = A_1 x^{k-1} \qquad \text{[cf. cours sur les EDL1]} \\ &\iff \quad \exists (A_1, A_2) \in \mathbf{R}^2 \quad \forall\, x > 0 \qquad f(x) = \left| \begin{array}{ll} A_1 \ln(x) + A_2 & \text{si } k = 0 \\ \dfrac{A_1}{k} x^k + A_2 & \text{si } k \neq 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Cas où $k = 0$

On pose $f_1 := \ln$ et $f_2 \colon]0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}, x \longmapsto 1$. D'après ce qui précède, $E = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$. Il est par ailleurs clair que la famille (f_1, f_2) est libre. Donc (f_1, f_2) est une base de E et $\dim(E) = 2$.

Cas où $k \neq 0$

On pose $g_1 \colon]0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}, x \longmapsto x^k$. D'après ce qui précède, $E = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{k} g_1, f_2\right) = \mathrm{Vect}(g_1, f_2)$. Il est par ailleurs clair que la famille (g_1, f_2) est libre. Donc (g_1, f_2) est une base de E et $\dim(E) = 2$.

(c) Déterminer dans chacun de ces deux cas la matrice associée à v dans la base $\mathcal{B}$. Quel est le rang de v ?

Soit $k \in \mathbf{R}$. On pose $v := u_{|E}^{|E}$ (endomorphisme de E induit par u).

Cas où $k = 0$

- Soit $x > 0$.

$$u(f_1)(x) = x \times \frac{1}{x} = 1 = f_2(x).$$

Donc $u(f_1) = f_2 = 0.f_1 + 1.f_2$.

- Soit $x > 0$. $u(f_2)(x) = 0 = 0.f_1 + 0.f_2$.
- La matrice de v dans la base (f_1, f_2) est donc :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est de rang 1. Donc $\text{rang}(v) = 1$.

<u>Cas où $k \neq 0$</u>

- Soit $x > 0$.

$$u(g_1)(x) = x \times kx^{k-1} = kx^k.$$

  Donc $u(g_1) = kg_1 = k.g_1 + 0.f_2$.
- Soit $x > 0$. $u(f_2)(x) = 0 = 0.g_1 + 0.f_2$.
- La matrice de v dans la base (g_1, f_2) est donc :

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  qui est de rang 1. Donc $\text{rang}(v) = 1$.