M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Programme des journées de révisions n°6 et 7
Espaces vectoriels de dimension finie

David BLOTTIÈRE

La théorie des espaces vectoriels de dimension finie présente certaines analogies avec celles des ensembles finis. Citons deux propriétés issues de chacune des théorie pour illustrer le propos. Si A et B sont deux ensembles finis de même cardinal tels que $A \subset B$, alors $A = B$. Le pendant de cette propriété en algèbre linéaire peut s'énoncer comme suit : si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie tel que $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$. La formule de Grassmann est un outil précieux pour étudier l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de dimension finie (e.g. l'intersection de deux hyperplans distincts d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ est de dimension $n-2$) et la formule du rang livre un critère d'isomorphie d'un grand intérêt : si E et F sont deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de même dimension finie, alors une application linéaire de E dans F est injective si et seulement si elle est surjective. Si l'on fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 1$, alors l'application

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n & \longrightarrow & E \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_1.e_1 + x_2.e_2 + \ldots + x_n.e_n \end{array} \right.$$

est un isomorphisme (cf. coordonnées d'un vecteur de E dans la base $\mathcal{B}$). Ainsi un problème posé dans E peut être transporté dans $\mathbf{K}^n$, avec parfois une traduction mettant en jeu un système linéaire.

R6-7. 1. *Notations.* — Dans tout ce document, la lettre $\mathbf{K}$ désigne l'un des deux corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

R6-7. 2. *Travail sur le cours.* — Le document support est le polycopié de cours sur les espaces vectoriels de dimension finie [PDF].

On commencera par étudier les familles (finies) remarquables dans un espace vectoriel : familles libres, familles liées, familles génératrices. On étudiera notamment une démonstration de la caractérisation des familles liées (Propriété 2 du document support) qui constitue un bon exercice, mêlant des concepts précédemment cités et la logique.

On sera alors en mesure d'introduire une définition centrale de ce chapitre : un espace vectoriel est dit *de dimension finie* s'il possède une famille génératrice finie.

Viendra alors le temps de revoir deux autres notions :
- celle de base d'un espace vectoriel ;
- celle de coordonnées d'un vecteur d'un espace vectoriel relativement à une base.

Ainsi, l'étude d'un espace vectoriel de dimension finie pourra être ramenée à l'étude d'un des espaces vectoriels $\mathbf{K}^n$, où $n \in \mathbf{N}^*$. Les systèmes linéaires joueront alors un grand rôle. Ils seront tous résolus en suivant l'algorithme du pivot de Gauß (aucune autre méthode n'est acceptée).

On reverra rapidement les bases, dites canoniques, de quelques espaces vectoriels usuels.

Étant donné un espace vectoriel de dimension finie (i.e. qui possède une famille génératrice finie), on dispose de deux résultats importants
- le théorème de la base incomplète ;
- le théorème de la base extraite ;

qui renferment chacun en leur sein un algorithme. Grâce au théorème de la base extraite, on est alors en mesure d'affirmer que tout espace vectoriel de dimension finie possède une base (ce qui ne parait pas aisé à établir sans).

De ces deux théorèmes, nous en déduisons deux conséquences importantes :
- tout espace vectoriel de dimension finie possède une base ;
- l'existence d'un supplémentaire pour un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel de dimension finie.

Après ce travail préparatoire, nous pouvons définir la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie. Il s'agit du cardinal commun d'une de ses bases (Théorème 9 du document support). Le fait que toutes les bases aient même cardinal est la pierre angulaire du chapitre. La Propriété 8 du document support doit être intensément travaillée (enoncé et, bien sûr, démonstration). L'interaction avec les systèmes linéaires culmine en ce point.

On saura caractériser les bases parmi les familles libres (resp. génératrices) d'un espace vectoriel et on commencera à dresser le formulaire sur la dimension des espaces vectoriels de dimension finie, avec le produit cartésien de deux espaces vectoriels de dimension finie.

On s'intéressera ensuite aux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie, en étudiant la Proposition 13 du document support (enoncé et, bien sûr, démonstration). En particulier, on verra qu'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est lui-même de dimension finie, ce qui n'est pas immédiat à démontrer.

On enrichira le formulaire sur la dimension des espaces vectoriels de dimension finie de la formule de Grassmann et on saura caractériser des sous-espaces supplémentaires d'un espace vectoriel de dimension finie (critère fort commode).

Après avoir défini et étudié le rang d'une famille finie de vecteurs, on se penchera sur l'apport de la théorie de la dimension pour l'analyse des applications linéaires. Il est absolument colossal !

On devra connaître absolument le théorème/la formule du rang (enoncé et, bien sûr, démonstration), ainsi que ses corollaires (critères d'isomorphie) dont la puissance est considérable.

Enfin, dans une dernière partie, on abordera les espaces d'applications linéaires, en ajoutant au formulaire sur la dimension des espaces vectoriels de dimension finie la dimension de $\mathcal{L}(E)\,F$, qui est de dimension finie, lorsque E et F sont des espaces vectoriels de dimension finie.

Les applications à la dualité (e.g. liens entre formes linéaires non nulles et hyperplans) constituent un joli champ d'applications de la théorie développée, que l'on prospectera avec intensité. On peut construire d'innombrables sujets sur ce thème.

Ce travail sur le cours est fondamental. Il convient de connaître toutes les définitions, ainsi que les énoncés et des démonstrations de chacun des résultats de ce chapitre.

R6-7. 3. *Vrai-Faux.* — Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Si la réponse est « Vrai », alors démontrer le résultat. Si la réponse est « Faux », argumenter au moyen un contre-exemple.

1. Soient u et v deux vecteurs de $\mathbf{R}^3$ tels que la famille (u, v) est liée. Alors il existe $k \in \mathbf{R}$ tel que $v = k.u$.
2. Les sous-espaces vectoriels
$$F = \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}\left((1,1,1),(0,1,0)\right) \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}\left((1,2,1),(1,0,1)\right)$$
de $\mathbf{R}^3$ sont égaux.
3. Soient u, v, w trois vecteurs de $\mathbf{R}^3$ tels que u et v ne sont pas colinéaires, u et w ne sont pas colinéaires et v et w ne sont pas colinéaires. Alors la famille (u, v, w) est libre.
4. Il existe une application linéaire injective de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^2$.
5. L'application linéaire
$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y+3z, 4x+5y+6z, 7x+8y+9z) \end{array} \right.$$
est injective.

R6-7. 4. *Détermination d'un supplémentaire d'un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.* — Soient $E_1 = \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}(v_1, v_2)$ et $E_2 = \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}(w_1, w_2)$ avec $v_1 = (1,-1,0,1)$, $v_2 = (0,2,1,0)$, $w_1 = (0,6,-1,4)$ et $w_2 = (3,3,1,5)$.

1. Déterminer une base de $E_1 \cap E_2$.
2. Donner une base de $E_1 + E_2$.
3. Définir un supplémentaire de $E_1 + E_2$ dans $\mathbf{R}^4$.

R6-7. 5. *Un critère pour qu'un endomorphisme soit une homothétie.* — Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel. Soit f un endomorphisme de E. On suppose que pour tout $u \in E$, la famille $(u, f(u))$ est liée. Démontrer que f est une homothétie, i.e. :

$$\exists\, \lambda \in \mathbf{R} \quad \forall u \in E \quad f(u) = \lambda u.$$

R6-7. 6. *Condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme soit factorisable à droite par un autre.* — Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer

$$\mathrm{Ker}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(g) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, h \in \mathcal{L}(E)\,,\ g = h \circ f.$$

R6-7. 7. *Endomorphismes qui ont un carré qui leur est proportionnel.* — Soit E un espace vectoriel réel non réduit à $\{0_E\}$. Soit k un réel donné. On note A_k l'ensemble des endomorphismes u de E tels que $u^2 = ku$.

1. Soit $u \in A_k$.
   (a) L'endomorphisme u peut-il être inversible ? Qu'est-ce que u dans ce cas ?
   (b) Déterminer $u(x)$, pour $x \in \mathrm{Im}\,(u)$.
   (c) Démontrer que, si $k \neq 0$, alors $\mathrm{Im}\,(u)$ et $\mathrm{Ker}\,(u)$ sont des sous-espaces vectoriels de E supplémentaires. Que dire de $\mathrm{Im}\,(u)$ et $\mathrm{Ker}\,(u)$, si $k = 0$?
   (d) On suppose que E est de dimension finie. Lorsque $k \neq 0$, comment doit-on choisir une base de E pour que la matrice associée à u dans cette base soit diagonale ? Quelle sera alors cette matrice ? Si $k = 0$, peut-on trouver une base de E telle que la matrice associée à u dans cette base soit diagonale ?
2. Soient u et v des endomorphismes de E appartenant à A_k. On suppose dans les questions (a), (b) et (c) de cette partie que $k \neq 0$.
   (a) Montrer que $u \circ v + v \circ u = 0$ implique $u \circ v = v \circ u = 0$.
   (b) À quelle condition nécessaire et suffisante $u + v$ appartient-il à A_k ? Montrer que dans ce cas, $\mathrm{Im}\,(u+v) = \mathrm{Im}\,(u) + \mathrm{Im}\,(v)$ et $\mathrm{Ker}\,(u+v) = \mathrm{Ker}\,(u) \cap \mathrm{Ker}\,(v)$.
   (c) Montrer que si $u \circ v = v \circ u$, $u \circ v$ appartient à un ensemble $A_{k'}$, et que dans ce cas :
   $$\mathrm{Im}\,(u \circ v) = \mathrm{Im}\,(u) \cap \mathrm{Im}\,(v) \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}\,(u \circ v) = \mathrm{Ker}\,(u) + \mathrm{Ker}\,(v)\ .$$
   (d) On suppose enfin que u et v appartiennent à A_0, avec $u \neq 0$ et que $\dim(E) = 2$. Soit e_1 un vecteur de E tel que $u(e_1) = e_2 \neq 0$. Montrer que (e_1, e_2) forme une base de E et déterminer la matrice de u dans cette base. En déduire que dans ce cas $u \circ v + v \circ u = 0$ implique encore $u \circ v = v \circ u = 0$.
3. Soit f un endomorphisme de E satisfaisant à la condition $f^2 - af + bid_E = 0$, où a et b sont des réels donnés. On suppose f et id_E linéairement indépendants.
   (a) À quelle condition nécessaire et suffisante doivent satisfaire a et b pour qu'il existe deux constantes réelles distinctes λ_1 et λ_2, telles que les endomorphismes $u = f - \lambda_1 id_E$ et $v = f - \lambda_2 id_E$ appartiennent à des ensembles A_k et $A_{k'}$? Préciser alors k et k' en fonction de λ_1 et λ_2.
   (b) Montrer que dans ce cas, on a $u \circ v = v \circ u = 0$. Expliquer ce résultat, en considérant l'endomorphisme $u - v$.

(c) Calculer, pour p entier naturel, l'endomorphisme f^p en fonction de u et v.

(d) À quelle condition nécessaire et suffisante, l'endomorphisme f est-t-il inversible ? Quel est alors son inverse ?

4. Soit g un endomorphisme de E de rang 1.

   (a) Montrer qu'il existe un réel k tel que $g \in A_k$. On montrera que si $\mathrm{Im}\,(g)$ n'est pas inclus dans $\mathrm{Ker}\,(g)$, alors $\mathrm{Im}\,(g)$ et $\mathrm{Ker}\,(g)$ sont des sous-espaces vectoriels de E supplémentaires.

   (b) On suppose que E est de dimension finie. Soit M la matrice associée à g dans une base de E. Montrer que $k = \mathrm{Tr}(M)$.

5. On prend pour E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$, à valeurs réelles. Soit F une fonction non nulle donnée appartenant à E, et u l'application qui à toute fonction G appartenant à E fait correspondre la fonction H définie par :

$$\forall x \in [0,1], \qquad H(x) = \int_0^1 F(x)\, t\, G(t)\, \mathrm{d}t$$

   (a) Montrer que u est un endomorphisme de E.

   (b) Montrer que u est de rang 1. Quel est l'espace image de u ?

   (c) Montrer qu'il existe un réel k tel que $u^2 = ku$, et donner une expression de k au moyen d'une intégrale.

   (d) Calculer k lorsque pour tout $x \in [0, 1]$, $F(x) = \mathrm{Arcsin}(x)$.

   (e) Calculer k lorsque pour tout $x \in [0, 1]$, $F(x) = \exp(\sqrt{x})$.

6. Soit $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles, admettant des dérivées à tous les ordres sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et u l'application de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$ qui, à toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}$ fait correspondre la fonction g définie par :

$$\forall x \in]0, +\infty[\,, \qquad g(x) = x\, f'(x)$$

   (a) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{C}$.

   (b) On se donne le réel k. Montrer qu'il existe un plus grand (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel E de $\mathcal{C}$ tel que :
   - E est stable par u ;
   - la restriction de u à E, que l'on notera v, est un endomorphisme de E satisfaisant la condition $v^2 = kv$.

   Donner la dimension et une base $\mathcal{B}$ de E en distinguant le cas $k = 0$ et le cas $k \neq 0$.

   (c) Déterminer dans chacun de ces deux cas la matrice associée à v dans la base $\mathcal{B}$. Quel est le rang de v ?