M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Programme des journées de révisions n°4 et 5
Espaces vectoriels et applications linéaires

David BLOTTIÈRE

Un espace vectoriel sur $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ est un ensemble muni d'une addition et d'une multiplication par un scalaire, ces opérations vérifiant certaines propriétés. Les ensembles $\mathbf{K}^n$, $\mathcal{F}(A, \mathbf{K})$, $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$, $\mathbf{K}[X]$, $\mathbf{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ sont munis de structures naturelles de $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Certains sous-ensembles remarquables d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, les sous-espaces vectoriels, sont eux-mêmes munis de structures de $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Les exemples de $\mathbf{K}$-espaces vectoriels sont donc fort nombreux et se rencontrent aussi bien en algèbre (e.g. espaces de polynômes) qu'en analyse (e.g. espaces de fonctions). Les applications entre $\mathbf{K}$-espaces vectoriels qui respectent les opérations sont appelées applications linéaires. On associe à une application linéaire deux sous-espaces vectoriels naturels : son noyau et son image. Le noyau (resp. l'image) d'une application linéaire permet de trancher sur son injectivité (resp. sa surjectivité). Si le thème peut revêtir un caractère quelque peu abstrait, un résultat établi en algèbre linéaire trouve des incarnations frappantes :

- en algèbre, e.g. caractérisation du fait que deux polynômes à coefficients complexes aient une racines communes dans $\mathbf{C}$, sans calculer explicitement leurs racines, via leur résultant ;
- en analyse, e.g. description en extension de l'ensemble solution d'une équation différentielle linéaire homogène, à partir de suffisamment de solutions linéairement indépendantes.

R4-5. 1. *Notations.* — Dans tout ce document, la lettre $\mathbf{K}$ désigne l'un des deux corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

R4-5. 2. *Travail sur le cours.* — Le document support est le polycopié de cours sur les espaces vectoriels et les applications linéaires [PDF].

Dans un premier temps, on reverra la notion d'application entre deux ensembles et les concepts fondamentaux qui y sont attachés :

- injectivité ;
- surjectivité ;
- bijectivité ;
- la notion d'image directe d'une partie de la source (i.e. de l'ensemble de départ) d'une application ;
- la notion d'image réciproque d'une partie du but (i.e. de l'ensemble d'arrivée) d'une application ;
- composition.

Ces notions ne sont pas spécifiques à l'algèbre linéaire. Elles jouent également un grand rôle en analyse (e.g. théorème de la bijection) et en probabilités (e.g. image d'une variable aléatoire par une application). Cependant, dans le cas des espaces vectoriels de dimension finie, nous disposons de caractérisations très agréables de la bijectivité par exemple (via le théorème du rang). Nous les reverrons plus tard.

Viendra ensuite le temps de débuter l'étude de la structure centrale en algèbre linéaire, celle d'espace vectoriel, en étudiant les axiomes qui la définissent et les premières conséquences qui en découlent. Pour comprendre l'intérêt de cette structure, on devra connaître les exemples d'espaces vectoriels « usuels » : $\mathbf{K}^n$, $\mathcal{F}(A, \mathbf{K})$, $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$, $\mathbf{K}[X]$, $\mathbf{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$. Ainsi un résultat établi dans la théorie générale des espaces vectoriels possède des applications dans les mondes de la géométrie, des fonctions, des suites numériques, des polynômes, des matrices et de bien d'autres encore.

La notion de sous-espace vectoriel sera la suivante au menu. On reverra sa définition et on sera en mesure d'énoncer et de démontrer sa caractérisation classique (Théorème 13). On étudiera alors plusieurs notions importantes attenantes.

- intersection de sous-espaces vectoriels ;
- somme de sous-espaces vectoriels ;
- sous-espace vectoriel engendré par une partie, en particulier par une partie finie ;
- somme directe de sous-espaces vectoriels ;
- supplémentaires d'un sous-espace vectoriel.

Toutes les définitions seront sues et on connaîtra les énoncés et démonstrations de tous les résultats. Ces dernières ne revêtent pas de difficulté particulière et constituent un excellent entraînement. Comme un sous-espace vectoriel possède une structure naturelle d'espace vectoriel, notre collection d'exemples d'espaces vectoriels se trouve considérablement enrichie.

Les applications entre deux espaces vectoriels qui respectent les deux opérations $.$ et $+$ sont qualifiées de linéaires. On commencera par revoir la définition formelle d'une application linéaire, avant de travailler les notions suivantes.

- homothéties ;
- image directe d'un sous-espace vectoriel de la source d'une application linéaire (énoncé et démonstration) ;
- image réciproque d'un sous-espace vectoriel du but d'une application linéaire (énoncé et démonstration) ;
- noyau et image d'une application linéaire ;
- caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire via son noyau (énoncé et démonstration) ;

- caractérisation de la surjectivité d'une application linéaire via son image (énoncé et démonstration).

Si E et F sont des espaces vectoriel alors l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F est muni d'une structure naturelle d'espace vectoriel, que l'on reverra.

Dans le cas particulier où $E = F$, $\mathcal{L}(E, E)$ est simplement noté $\mathcal{L}(E)$ et il possède une structure d'algèbre, que l'on devra connaître.

Enfin l'ensemble des automorphismes d'un espace vectoriel E, noté $\mathrm{GL}(E)$, est un groupe pour la loi de composition. Il conviendra de savoir énoncé ce résultat avec précision et de savoir le redémontrer (Théorème 25). Il s'agit d'un très bon exercice mêlant bijectivité et linéarité.

La fin du chapitre est consacré à l'étude d'endomorphismes particuliers : les projecteurs et les symétries. Ces exemples importants d'applications linéaires joueront un grand rôle dans le programme de MP (ce seront nos premiers exemples d'applications diagonalisables) et il faudra faire l'effort de tout connaître sur ces thèmes (définitions, énoncés et démonstrations).

Ce travail sur le cours est fondamental.

R4-5. 3. *Vrai-Faux.* — Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Si la réponse est « Vrai », alors démontrer le résultat. Si la réponse est « Faux », argumenter au moyen un contre-exemple.

1. L'application
$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - 1 \end{array} \right.$$
est injective.

   Faux. Elle n'est pas injective car $f(-1) = 0 = f(1)$.

2. L'application
$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - 1 \end{array} \right.$$
est injective.

   Vraie. Soient $x \in \mathbf{R}_+$ et $y \in \mathbf{R}_+$ tels que $f(x) = f(y)$. Alors $x^2 = y^2$ puis, comme x et y sont positifs, $x = y$.

3. L'application
$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - 1 \end{array} \right.$$
est surjective.

   Faux. Le nombre -2 qui appartient au but de f ne possède aucun antécédent par f. Si tel était le cas, il existerait $x \in \mathbf{R}$ tel que $x^2 - 1 = -2$ et alors x^2 serait strictement négatif ce qui n'est pas.

4. L'application

$$h \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & [-1;+\infty[\\ x & \longmapsto & x^2-1 \end{array} \right.$$

est surjective.

Vrai. Soit $y \in [-1,+\infty[$. Alors $x := \sqrt{y+1}$ est un nombre réel bien défini et $h(x) = y$.

Remarque. Les quatre questions précédentes mettent en lumière un fait essentiel. L'ensemble de départ (source) et l'ensemble d'arrivée (but) d'une application sont cruciaux. On les précisera toujours et on se refusera à écrire « l'application $f(x) = x^2 - 1$ »qui est vide de sens.

5. Soit l'application f définie par

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2-1 \end{array} \right. .$$

Alors $f([-2,3]) = [f(-2), f(3)] = [3,8]$.

Faux. En effet, $0 \in [-2,3]$ mais $f(0) = -1 \notin [3,8]$.

Remarque. Le théorème de la bijection ne peut pas être appliqué ici car l'application f n'est pas monotone sur $[-2,3]$. On peut démontrer, en raisonnant par double inclusion, que $f([-2,3]) = [-1,8]$.

6. Soit l'application f définie par

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2-1 \end{array} \right. .$$

Alors $f^{-1}([15,24]) = [-5,-4] \cup [4,5]$.

Vrai. Démontrons l'assertion par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in f^{-1}([15,24])$. Alors $15 \leqslant f(x) = x^2 - 1 \leqslant 24$ et donc $16 \leq x^2 \leq 25$. Par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbf{R}_+$, il vient $4 \leqslant |x| \leqslant 5$.
— Si $x \geqslant 0$, alors $4 \leqslant x \leqslant 5$ et donc $x \in [4,5] \subset [-5,-4] \cup [4,5]$.
— Si $x < 0$, alors $4 \leqslant -x \leqslant 5$ et donc $-5 \leqslant x \leqslant -4$. On en déduit $x \in [-5,-4] \subset [-5,-4] \cup [4,5]$.
Dans tous les cas $x \in [-5,-4] \cup [4,5]$.
$\boxed{\supset}$ Soit $x \in [-5,-4] \cup [4,5]$.
— Si $x \in [-5,-4]$ alors par décroissance de la fonction carrée sur $\mathbf{R}_-$, $16 \leqslant x^2 \leqslant 25$ et donc $15 \leqslant f(x) = x^2 - 1 \leqslant 24$. Ainsi $x \in f^{-1}([15,24])$.
— Si $x \in [4,5]$ alors par croissance de la fonction carrée sur $\mathbf{R}_+$, $16 \leqslant x^2 \leqslant 25$ et donc $15 \leqslant f(x) = x^2 - 1 \leqslant 24$. Ainsi $x \in f^{-1}([15,24])$.
Dans tous les cas $x \in f^{-1}([15,24])$.

7. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Soient e_1, e_2, f_1, f_2 des vecteurs de E. Si $\mathrm{Vect}_{\mathbf{K}}(e_1,e_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbf{K}}(f_1,f_2)$ alors $\{e_1,e_2\} = \{f_1,f_2\}$.

Faux. Un contre-exemple est donné par $E = \mathbf{R}^2$, $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$, $f_1 = (1,1)$, $f_2 = (1,-1)$. On vérifie $\mathrm{Vect}_{\mathbf{K}}(e_1, e_2) = \mathbf{R}^2 = \mathrm{Vect}_{\mathbf{K}}(f_1, f_2)$, mais bien sûr $\{e_1, e_2\} \neq \{f_1, f_2\}$.

8. Les sous-espaces vectoriels $F = \mathrm{Vect}_{\mathbf{K}}((1,0,1),(0,1,0))$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbf{K}}((6,2,5),(5,1,4))$ de $\mathbf{K}^3$ sont en somme directe.

Faux. On observe

$$(1,1,1) = (1,0,1) + (0,1,0) \in F \qquad \text{et} \qquad (1,1,1) = (6,2,5) - (5,1,4) \in G$$

et donc $F \cap G \neq \{(0,0,0)\}$.

Nous aurions pu aussi raisonner à l'aide des dimensions. Les vecteurs $(1,0,1),(0,1,0)$ étant linéairement indépendants, $\dim(F) = 2$. Les vecteurs $(6,2,5),(5,1,4)$ étant linéairement indépendants, $\dim(G) = 2$. Si F et G étaient en somme directe, alors $F \oplus G$ serait un sous-espace vectoriel de dimension 4 (Grassmann) de $\mathbf{K}^3$, qui est de dimension 3. Impossible.

R4-5. 4. *CNS pour que l'union de deux sous-espaces vectoriels soit un sous-espace vectoriel.* — Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Démontrer l'équivalence suivante.

$$F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \iff (F \subset G \text{ ou } G \subset F)$$

On pourra visionner un corrigé vidéo en cliquant sur le lien suivant [YouTube] (12 minutes).

R4-5. 5. *Une famille génératrice de l'image d'une application linéaire.* — Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ et des vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ de E tels que $E = \mathrm{Vect}_{\mathbf{K}}(e_1, \ldots, e_n)$, i.e. on suppose que E est de dimension finie. Démontrer

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}_{\mathbf{K}}(f(e_1), \ldots, f(e_n)) \ .$$

On raisonne par double inclusion.
$\boxed{\subset}$ Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Comme $E = \mathrm{Vect}_{\mathbf{K}}(e_1, \ldots, e_n)$, il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k . e_k$. D'après la linéarité de f

$$y = f(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k . f(e_k) \in \mathrm{Vect}_{\mathbf{K}}(f(e_1), \ldots, f(e_n)) \ .$$

$\boxed{\supset}$ Il est clair que les vecteurs $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ appartiennent à $\mathrm{Im}(f)$. D'après le cours, nous savons que $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F. Par minimalité d'un sous-espace vectoriel engendré (Propriété 15 du document support), il vient $\mathrm{Vect}_{\mathbf{K}}(f(e_1), \ldots, f(e_n)) \subset \mathrm{Im}(f)$.

Remarque. Ce résultat est fort commode pour déterminer l'ensemble image d'une application linéaire : à l'aide d'une famille génératrice de sa source, on obtient une famille génératrice de son ensemble image.

R4-5. 6. *Intersection de deux sous-espaces vectoriels de* $\mathbf{R}^4$. — On considère les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$, $E_1 = \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}(v_1, v_2)$ et $E_2 = \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}(w_1, w_2)$ avec $v_1 = (1,2,3,4)$, $v_2 = (2,-1,4,-1)$, $w_1 = (0,7,-1,17)$ et $w_2 = (-2,9,3,11)$. Démontrer $E_1 \cap E_2 = \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}((-1,8,1,14))$.

On raisonne par double inclusion.
$\boxed{\subset}$ Soit $u \in E_1 \cap E_2$. Comme $u \in E_1$, il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R}^2$ tel que

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = (\lambda_1 + 2\lambda_2, 2\lambda_1 - \lambda_2, 3\lambda_1 + 4\lambda_2, 4\lambda_1 - \lambda_2).$$

Comme $u \in E_2$, il existe $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbf{R}^2$ tel que :

$$u = \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 = (-2\mu_2, 7\mu_1 + 9\mu_2, -\mu_1 + 3\mu_2, 17\mu_1 + 11\mu_2).$$

D'où

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = -2\mu_2 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = 7\mu_1 + 9\mu_2 \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 = -\mu_1 + 3\mu_2 \\ 4\lambda_1 - \lambda_2 = 17\mu_1 + 11\mu_2 \end{cases}$$

On applique les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_2 - 3L_1$, $L_4 \leftarrow L_2 - 4L_1$:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = -2\mu_2 \\ -5\lambda_2 = 7\mu_1 + 13\mu_2 \\ -2\lambda_2 = -\mu_1 + 9\mu_2 \\ -9\lambda_2 = 17\mu_1 + 19\mu_2 \end{cases}$$

puis les opérations élémentaires : $L_2 \leftarrow L_2 + 7L_3$, $L_4 \leftarrow L_2 + 17L_3$:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = -2\mu_2 \\ -19\lambda_2 = 76\mu_2 \\ -2\lambda_2 = -\mu_1 + 9\mu_2 \\ -43\lambda_2 = +172\mu_2 \end{cases}$$

Les lignes L_2 et L_4 livrent toutes deux $\lambda_2 = -4\mu_2$. Grâce à L_3, nous en déduisons $\mu_1 = \mu_2$. Ainsi :

$$u = \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 = \mu_1 (w_1 + w_2) = \mu_1(-2, 16, 2, 28)\ .$$

Donc $u \in \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}((-2,16,2,28)) = \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}((-1,8,1,14))$. Nous avons donc établi

$$E_1 \cap E_2 \subset \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}((-1,8,1,14))\ .$$

$\boxed{\supset}$ D'après ce qui précède :

$$(-1,8,1,14) = \frac{1}{2}(-2,16,2,28) = \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2 \in E_2\ .$$

En reprenant le système étudié auparavant, spécialisé à $\mu_1 = \mu_2 = \dfrac{1}{2}$, nous trouvons $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = -2$. Ainsi :

$$(-1, 8, 1, 14) = 3\, v_1 - 2\, v_2 \in E_1 \ .$$

Donc $(-1, 8, 1, 14) \in E_1 \cap E_2$. Par minimalité d'un sous-espace vectoriel engendré,

$$\mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}\left((-1, 8, 1, 14)\right) \subset E_1 \cap E_2.$$

R4-5. 7. *Sous-espaces vectoriels supplémentaires.* —

1. Soient

$$F := \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x + y + z = 0\right\} \subset \mathbf{R}^3 \qquad \text{et} \qquad G := \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}\left((1, 1, 1)\right) \subset \mathbf{R}^3 \ .$$

(a) Justifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$.

Clairement $(0, 0, 0) \in F$. Soient (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) des vecteurs de F et soient λ_1 et λ_2 deux réels. Alors

$$\lambda_1.(x_1, y_1, z_1) + \lambda_2.(x_2, y_2, z_2) = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)$$

et puisque $x_1 + y_1 + z_1 = 0$ et $x_2 + y_2 + z_2 = 0$,

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 = \lambda_1(x_1 + y_1 + z_1) + \lambda_2(x_2 + y_2 + z_2) = 0 \ .$$

Ainsi $\lambda_1.(x_1, y_1, z_1) + \lambda_2.(x_2, y_2, z_2) \in F$.
Comme F est non vide et stable par combinaison linéaire, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.
Quant à G, il s'agit du sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $(1, 1, 1)$.

(b) Démontrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.

Nous devons démontrer que pour tout vecteur de $\mathbf{R}^3$ s'écrit d'une unique manière comme somme d'un élément de F et d'un élément de G. Pour cela, nous raisonnons par analyse et synthèse.

Soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.

• Analyse. Supposons qu'il existe $(x_1, y_1, z_1) \in F$ et $u \in G$ tels que $(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + u$. Comme $u \in G$, il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $u = (\lambda, \lambda, \lambda)$. Il vient alors

$$(x_1, y_1, z_1) = (x - \lambda, y - \lambda, z - \lambda) \ .$$

Comme $x_1, y_1, z_1) \in F$

$$0 = x_1 + y_1 + z_1 = x - \lambda + y - \lambda, + z - \lambda$$

puis $\lambda = \dfrac{x+y+z}{3}$. Nous en déduisons

$$(x_1, y_1, z_1) = \left(\frac{2x-y-z}{3}, \frac{-x+2y-z}{3}, \frac{-x-y+2z}{3}\right) \qquad \text{et} \qquad u = \frac{x+y+z}{3}.(1,1,1) .$$

À l'issue de cette analyse, nous observons que nous obtenons un unique candidat pour (x_1, y_1, z_1) et u. Ainsi, si la décomposition cherchée existe, elle est unique. L'unicité est donc établie.

• Synthèse. Vérifions si les candidats obtenus en fin d'analyse conviennent.

— Comme

$$\frac{2x-y-z}{3} + \frac{-x+2y-z}{3} + \frac{-x-y+2z}{3} = 0$$

le vecteur $\left(\dfrac{2x-y-z}{3}, \dfrac{-x+2y-z}{3}, \dfrac{-x-y+2z}{3}\right)$ appartient à F.

— Clairement $\dfrac{x+y+z}{3}.(1,1,1) \in G$.

— On calcule

$$\left(\frac{2x-y-z}{3}, \frac{-x+2y-z}{3}, \frac{-x-y+2z}{3}\right) + \frac{x+y+z}{3}.(1,1,1) = (x,y,z) .$$

• Conclusion. Il existe un unique vecteur de F, $\left(\dfrac{2x-y-z}{3}, \dfrac{-x+2y-z}{3}, \dfrac{-x-y+2z}{3}\right)$ et un unique vecteur de G, $\dfrac{x+y+z}{3}.(1,1,1)$ dont la somme vaut (x,y,z).

2. On désigne par E le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions définies sur $[0\ ;\ 1]$ à valeurs dans $\mathbf{R}$, qui sont continues sur $[0\ ;\ 1]$. Soient :

$$F := \left\{ f \in E \ :\ \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \right\} \subset E \qquad \text{et} \qquad G = \left\{ \left| \begin{array}{ccc} [0;1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & a \end{array} \right. \ :\ a \in \mathbf{R} \right\} \subset E .$$

L'ensemble G est donc l'ensemble des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$, qui sont constantes.

(a) Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

Nous introduisons l'application

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x . \end{array} \right.$$

D'après la linéarité de l'intégrale, pour tout $(f,g) \in E^2$ et pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$

$$\varphi(\lambda.f + \mu.g) = \int_0^1 \lambda f(x) + \mu g(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g) .$$

L'application φ est donc linéaire. D'après le cours, son noyau

$$\operatorname{Ker}(\varphi) := \{f \in E \ : \ \varphi(f) = 0\} = F$$

est un sous-espace vectoriel de E.

On observe que

$$G = \left\{ \left| \begin{array}{ccc} [0;1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & a \end{array} \right. \ : \ a \in \mathbf{R} \right\} = \operatorname{Vect}_{\mathbf{R}} \left(\left| \begin{array}{ccc} [0;1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array} \right. \right) .$$

Donc G est un sous-espace vectoriel de E, comme sous-espace vectoriel engendré par un vecteur de E.

(b) Démontrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Nous devons démontrer que pour tout vecteur de E s'écrit d'une unique manière comme somme d'un élément de F et d'un élément de G. Pour cela, nous raisonnons par analyse et synthèse.

Soit $f \in E$.

• Analyse. Supposons qu'il existe $g \in F$ et $h \in G$ tels que $f = g + h$. Comme $h \in G$, il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que

$$h \ \left| \begin{array}{ccc} [0;1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & a \ . \end{array} \right.$$

D'après la linéarité de l'intégrale et $g \in F$

$$\int_0^1 f(x) \ \mathrm{d}x = \int_0^1 g(x) + h(x) \ \mathrm{d}x = \int_0^1 g(x) \ \mathrm{d}x + \int_0^1 h(x) \ \mathrm{d}x = a \ .$$

Ainsi

$$h \ \left| \begin{array}{ccc} [0;1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f \end{array} \right.$$

et

$$g \ \left| \begin{array}{ccc} [0;1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - \displaystyle\int_0^1 f \ . \end{array} \right.$$

À l'issue de cette analyse, nous observons que nous obtenons un unique candidat pour g et h. Ainsi, si la décomposition cherchée existe, elle est unique. L'unicité est donc établie.

• Synthèse. Vérifions si les candidats obtenus en fin d'analyse conviennent.
Comme

$$\int_0^1 f(x) - \int_0^1 f \ \mathrm{d}x = \int_0^1 f(x) \ \mathrm{d}x - \int_0^1 \int_0^1 f \ \mathrm{d}x = \int_0^1 f - \int_0^1 f = 0$$

la fonction

$$g \left| \begin{array}{ccc} [0;1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - \displaystyle\int_0^1 f \end{array} \right. .$$

appartient à G.
La fonction

$$h \left| \begin{array}{ccc} [0;1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f \end{array} \right.$$

est constante, donc appartient à G.
Enfin, on a clairement $g + h = f$.
• Conclusion. Il existe un unique vecteur de F,

$$g \left| \begin{array}{ccc} [0;1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - \displaystyle\int_0^1 f \end{array} \right.$$

et un unique vecteur de G,

$$h \left| \begin{array}{ccc} [0;1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f \end{array} \right.$$

dont la somme vaut f.

R4-5. 8. *Étude d'une projection de $\mathbf{R}^3$.* — Nous définissons :

$$P = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ z = x - y\} \quad \text{et} \quad D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x = -y = z\} .$$

1. Démontrer que P et D sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbf{R}^3$.

• Vérifions que P est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

$$P = \{(x,y,x-y) \ : \ x,y \in \mathbf{R}\} = \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}(u_1, u_2)$$

où $u_1 := (1,0,1)$ et $u_2 = (0,1,-1)$. L'ensemble P est donc le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs u_1 et u_2.
• Vérifions que D est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

$$D = \{(-y,y,-y) \ : \ y \in \mathbf{R}\} = \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}(u_3)$$

où $u_3 := (-1,1,-1)$. L'ensemble D est donc le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur u_3.
• Soit $v = (x,y,z) \in \mathbf{R}^3$. Nous démontrons que v s'écrit d'une unique manière comme somme d'un vecteur de P et d'un vecteur de D, en raisonnant par analyse-synthèse.
— Analyse
Soient $v_1 \in P$ et $v_2 \in D$ tels que $v = v_1 + v_2$. Comme $v_1 \in P$ et $v_2 \in D$, il existe des

réels x_1, y_1, y_2 tels que :

$$v_1 = (x_1, y_1, x_1 - y_1) \quad \text{et} \quad v_2 = (-y_2, y_2, -y_2) \ .$$

Nous en déduisons :

$$(x, y, z) = (x_1 - y_2, y_1 + y_2, x_1 - y_1 - y_2)$$

puis :

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & - & y_2 & = & x \\ & & y_1 & + & y_2 & = & y \\ x_1 & - & y_1 & - & y_2 & = & z \ . \end{array} \right.$$

On résout ce système d'inconnues x_1, y_1, y_2 en appliquant l'algorithme du pivot de Gauss.

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & - & y_2 & = & x \\ & & y_1 & + & y_2 & = & y \\ & - & y_1 & & 0 & = & z - x \end{array} \right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \ .$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & y_2 & & & = & x \\ & & y_2 & + & y_1 & = & y \\ & & & & y_1 & = & x - z \end{array} \right.$$

Nous en déduisons que ce système possède une unique solution :

$$x_1 = y + z \qquad ; \qquad y_1 = x - z \qquad ; \qquad y_2 = -x + y + z \ .$$

Ainsi, si v_1 et v_2 existent, alors :

$$v_1 = (y + z, x - z, -x + y + 2z) \quad \text{et} \quad v_2 = (x - y - z, -x + y + z, x - y - z) \ .$$

Il y a donc unicité de v_1 et v_2. Donc si la décomposition existe, elle est unique.

— Synthèse
Vérifions si v_1 et v_2, obtenus en fin d'analyse, conviennent.

. $v_1 = (y + z, x - z, -x + y + 2z) \in P$ car :

$$-x + y + 2z = y + z - (x - z) \ .$$

. $v_2 = (x - y - z, -x + y + z, x - y - z) \in D$ car :

$$x - y - z = -(-x + y + z) = x - y - z$$

. Calculons enfin $v_1 + v_2$.

$$\begin{array}{rcl} v_1 + v_2 & = & (y + z, x - z, -x + y + 2z) + (x - y - z, -x + y + z, x - y - z) \\ & = & (x, y, z) \\ & = & v \ . \end{array}$$

— Conclusion
Il existe un unique

$$v_1 = (y+z, x-z, -x+y+2z) \in P$$

et un unique

$$v_2 = (x-y-z, -x+y+z, x-y-z) \in D$$

tels que $v = (x, y, z) = v_1 + v_2$.

Remarque. Nous aurions pu aussi démontrer $P \oplus D = \mathbf{R}^3$ en démontrant $P \cap D = \{0_{\mathbf{R}^3}\}$ et $\dim(P) + \dim(D) = \dim(\mathbf{R}^3)$. Notre choix de stratégie est motivée la question suivante, qui est aisée à résoudre avec notre approche.

2. Soit p la projection de $\mathbf{R}^3$ sur P, parallèlement à D. Calculer $p(x, y, z)$, pour tout $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.

L'application p est définie par :

$$p \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ v = v_1 + v_2, \text{ où } v_1 \in P \text{ et } v_2 \in D & \longmapsto & v_1 \end{array} \right.$$

et donc, d'après la question 1 :

$$p \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (y+z, x-z, -x+y+2z) \end{array} \right. .$$

R4-5. 9. *Étude d'un endomorphisme d'espace fonctionnel.* — Soit E le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, qui sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. On considère l'application T définie par :

$$T \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & T(f) \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & f'(t) + \dfrac{t\, f(t)}{1+t^2} \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

1. Démontrer que l'application T est bien définie.

Il s'agit de démontrer que pour tout $f \in E$, $T(f) \in E$. Soit $f \in E$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$, i.e. indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$, la fonction f' est également de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$. La fonction

$$a \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{t\, f(t)}{1+t^2} \end{array} \right.$$

est une fonction rationnelle définie sur $\mathbf{R}$, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$. Par théorème d'opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, la fonction :

$$T(f) = f' + a \times f$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$, i.e. $T(f) \in E$.

2. Démontrer que l'application T est linéaire.

Soient $(f_1, f_2) \in E^2$ et soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R}^2$. Comme la dérivation est linéaire :

$$\begin{aligned} T(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) &= (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)' + a(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) \\ &= \lambda_1 f_1' + \lambda_2 f_2' + \lambda_1 a f_1 + \lambda_2 a f_2 \\ &= \lambda_1 (f_1' + a f_1) + \lambda_2 (f_2' + a f_2) \\ &= \lambda_1 T(f_1) + \lambda_2 T(f_2) \ . \end{aligned}$$

3. Déterminer le noyau de T. Qu'en déduire ?

- Le noyau de T est par définition l'ensemble solution de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 :
$$(\mathcal{EH}) \qquad y' + \frac{t}{1+t^2}\, y = 0$$
d'inconnue $y \in E$. Comme une primitive de la fonction $a \colon t \longmapsto \dfrac{t}{1+t^2}$ sur $\mathbf{R}$ est :
$$A \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right) = \ln\left(\sqrt{1+t^2}\right) \end{array} \right.$$
le cours sur les équations différentielles [PDF] nous livre :
$$\mathrm{Ker}\,(T) = Sol_{(\mathcal{EH})} = \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}} \left(\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & e^{-\ln\left(\sqrt{1+t^2}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right. \right) .$$
- Comme $\mathrm{Ker}\,(T) \neq \{0_E\}$, l'application T n'est pas injective.

Remarque. Si la formulation de la question met en jeu des termes d'algèbre linéaire, il s'avère en fait que l'énoncé porte sur les équations différentielles linéaires. Il en sera de même pour la question suivante.

4. Démontrer que l'application T est surjective.

Soit $g \in E$. Nous cherchons une fonction $f \in E$ telle que $T(f) = g$, i.e. telle que :
$$\forall\, t \in \mathbf{R}, \quad f'(t) + \frac{t\, f(t)}{1+t^2} = g(t) \ .$$

- Nous sommes ainsi conduit à chercher une solution particulière de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 :
$$(\mathcal{E}) \qquad y' + \frac{t}{1+t^2}\, y = g(t)$$

d'inconnue $y \in E$. Grâce à la résolution de $(\mathcal{EH})$ effectuée en Q3 et à méthode de la variation de la constante (cf. cours sur les équations différentielles [PDF]), nous construisons la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \displaystyle\int_0^t \sqrt{1+u^2}\, g(u)\ \mathrm{d}u \end{array} \right.$$

que nous savons être de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et vérifier :

$$\forall\, t \in \mathbf{R}, \qquad f'(t) + \frac{t\, f(t)}{1+t^2} = g(t)\ .$$

- Pour conclure à la surjectivité de T, il reste à vérifier que la fonction f précédemment introduite est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.
  — Les fonctions $u \longmapsto \sqrt{1+u^2}$ et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$. Par théorème d'opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, la fonction

  $$u \longmapsto \sqrt{1+u^2}\, g(u)$$

  est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.
  — La fonction

  $$t \longmapsto \int_0^t \sqrt{1+u^2}\, g(u)\ \mathrm{d}u$$

  qui est l'unique primitive de la fonction $u \longmapsto \sqrt{1+u^2}\, g(u)$ sur $\mathbf{R}$ qui s'annule en 0 est donc également de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.
  — Alors, de nouveau par théorème d'opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, la fonction

  $$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \displaystyle\int_0^t \sqrt{1+u^2}\, g(u)\ \mathrm{d}u \end{array} \right.$$

  est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.

R4-5. 10. *Lemme des cinq.* — On considère le diagramme

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & E_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"] & E_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "h_3"] & E_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "h_4"] & E_5 \arrow[d, "h_5"] \\ F_1 \arrow[r, "g_1"] & F_2 \arrow[r, "g_2"] & F_3 \arrow[r, "g_3"] & F_4 \arrow[r, "g_4"] & F_5 \end{tikzcd}$$

formé de $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et d'applications linéaires. On suppose que le diagramme est commutatif, i.e.

$$h_2 \circ f_1 = g_1 \circ h_1 \quad ; \quad h_3 \circ f_2 = g_2 \circ h_2 \quad ; \quad h_4 \circ f_3 = g_3 \circ h_3 \quad ; \quad h_5 \circ f_4 = g_4 \circ h_4$$

et que les deux lignes sont exactes, i.e.

$$\mathrm{Ker}(f_2) = \mathrm{Im}(f_1) \quad ; \quad \mathrm{Ker}(f_3) = \mathrm{Im}(f_2) \quad ; \quad \mathrm{Ker}(f_4) = \mathrm{Im}(f_3)$$

$$\mathrm{Ker}(g_2) = \mathrm{Im}(g_1) \quad ; \quad \mathrm{Ker}(g_3) = \mathrm{Im}(g_2) \quad ; \quad \mathrm{Ker}(g_4) = \mathrm{Im}(g_3).$$

On suppose enfin que les applications linéaires h_1, h_2, h_4, h_5 sont des isomorphismes. Démontrer que h_3 est un isomorphisme.

- Démontrons que l'application linéaire h_3 est injective.
  Soit $x_3 \in \mathrm{Ker}\,(h_3)$.
  — Promenade à droite de la flèche h_3 du diagramme.
  Alors
  $$h_3(x_3) = 0_{F_3} \tag{1}$$
  et, comme g_3 est linéaire, $g_3 \circ h_3(x_3) = 0_{F_4}$.
  Comme $g_3 \circ h_3 = h_4 \circ f_3$, $h_4 \circ f_3(x_3) = 0_{F_4}$.
  L'application h_4 est injective, donc $f_3(x_3) = 0_{E_4}$, i.e. $x_3 \in \mathrm{Ker}\,(f_3)$.
  — Promenade à gauche de la flèche h_3 du diagramme.
  Comme $\mathrm{Ker}\,(f_3) = \mathrm{Im}\,(f_2)$, il existe $x_2 \in E_2$ tel que
  $$x_3 = f_2(x_2). \tag{2}$$
  D'après (1), $0_{F_3} = h_3(x_3) = h_3 \circ f_2(x_2)$.
  Puisque $h_3 \circ f_2 = g_2 \circ h_2$, $g_2(h_2(x_2)) = 0_{F_3}$, i.e. $h_2(x_2) \in \mathrm{Ker}\,(g_2)$.
  Comme $\mathrm{Ker}\,(g_2) = \mathrm{Im}\,(g_1)$, il existe $y_1 \in F_1$ tel que $h_2(x_2) = g_1(y_1)$.
  L'application h_1 est surjective, donc il existe $x_1 \in E_1$ tel que $y_1 = h_1(x_1)$. Ainsi :
  $$h_2(x_2) = g_1(y_1) = g_1(h_1(x_1)) \ .$$
  Comme $g_1 \circ h_1 = h_2 \circ f_1$, il vient :
  $$h_2(x_2) = h_2(f_1(x_1)) \ .$$
  Or l'application h_2 est injective. Donc $x_2 = f_1(x_1)$ et, grâce à (2) :
  $$x_3 = f_2(x_2) = f_2(f_1(x_1)) \ .$$
  Comme $\mathrm{Im}\,(f_1) \subset \mathrm{Ker}\,(f_2)$, $x_3 = 0_{E_3}$.
- Démontrons que l'application linéaire h_3 est surjective.
  Soit $y_3 \in F_3$.
  — Promenade à droite de la flèche h_3 du diagramme.
  L'application h_4 est surjective et $g_3(y_3) \in F_4$, donc il existe $x_4 \in E_4$ tel que
  $$g_3(y_3) = h_4(x_4). \tag{3}$$
  Comme $\mathrm{Im}\,(g_3) \subset \mathrm{Ker}\,(g_4)$, $0_{F_5} = g_4(g_3(x_3)) = g_4(h_4(x_4))$.
  Or $g_4 \circ h_4 = h_5 \circ f_4$. Donc $h_5(f_4(x_4)) = 0_{F_5}$.
  Comme l'application h_5 est injective, $f_4(x_4) = 0_{E_5}$, i.e. $x_4 \in \mathrm{Ker}\,(f_4)$.
  Puisque $\mathrm{Ker}\,(f_4) = \mathrm{Im}\,(f_3)$, il existe $x_3 \in E_3$ tel que $f_3(x_3) = x_4$.
  Grâce à (3), $g_3(y_3) = h_4(f_3(x_3))$.
  Comme $h_4 \circ f_3 = g_3 \circ h_3$:
  $$g_3(y_3) = g_3(h_3(x_3)).$$
  Donc $y_3 - h_3(x_3) \in \mathrm{Ker}\,(g_3)$.

— Promenade à gauche de la flèche h_3 du diagramme.
Comme $\mathrm{Ker}\,(g_3) = \mathrm{Im}\,(g_2)$, il existe $y_2 \in F_2$ tel que $y_3 - h_3(x_3) = g_2(y_2)$.
Comme l'application h_2 est surjective, il existe $x_2 \in E_3$ tel que $y_2 = h_2(x_2)$ et donc :

$$y_3 - h_3(x_3) = g_2(h_2(x_2)).$$

Comme $g_2 \circ h_2 = h_3 \circ f_3$:

$$y_3 - h_3(x_3) = h_3(f_3(x_2))$$

et ainsi :

$$y_3 = h_3\left(f_3(x_2) + x_3\right) \in \mathrm{Im}\,(h_3)$$