M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Programme des journées de révisions n°4 et 5 Espaces vectoriels et applications linéaires

David BLOTTIÈRE

Un espace vectoriel sur $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ est un ensemble muni d'une addition et d'une multiplication par un scalaire, ces opérations vérifiant certaines propriétés. Les ensembles $\mathbf{K}^n$, $\mathcal{F}(A, \mathbf{K})$, $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$, $\mathbf{K}[X]$, $\mathbf{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ sont munis de structures naturelles de $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Certains sous-ensembles remarquables d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, les sous-espaces vectoriels, sont eux-mêmes munis de structures de $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Les exemples de $\mathbf{K}$-espaces vectoriels sont donc fort nombreux et se rencontrent aussi bien en algèbre (e.g. espaces de polynômes) qu'en analyse (e.g. espaces de fonctions). Les applications entre $\mathbf{K}$-espaces vectoriels qui respectent les opérations sont appelées applications linéaires. On associe à une application linéaire deux sous-espaces vectoriels naturels : son noyau et son image. Le noyau (resp. l'image) d'une application linéaire permet de trancher sur son injectivité (resp. sa surjectivité). Si le thème peut revêtir un caractère quelque peu abstrait, un résultat établi en algèbre linéaire trouve des incarnations frappantes :

- en algèbre, e.g. caractérisation du fait que deux polynômes à coefficients complexes aient une racines communes dans $\mathbf{C}$, sans calculer explicitement leurs racines, via leur résultant ;
- en analyse, e.g. description en extension de l'ensemble solution d'une équation différentielle linéaire homogène, à partir de suffisamment de solutions linéairement indépendantes.

R4-5. 1. *Notations.* — Dans tout ce document, la lettre $\mathbf{K}$ désigne l'un des deux corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

R4-5. 2. *Travail sur le cours.* — Le document support est le polycopié de cours sur les espaces vectoriels et les applications linéaires [PDF].

Dans un premier temps, on reverra la notion d'application entre deux ensembles et les concepts fondamentaux qui y sont attachés :

- injectivité ;
- surjectivité ;
- bijectivité ;
- la notion d'image directe d'une partie de la source (i.e. de l'ensemble de départ) d'une application ;
- la notion d'image réciproque d'une partie du but (i.e. de l'ensemble d'arrivée) d'une application ;
- composition.

Ces notions ne sont pas spécifiques à l'algèbre linéaire. Elles jouent également un grand rôle en analyse (e.g. théorème de la bijection) et en probabilités (e.g. image d'une variable aléatoire par une application). Cependant, dans le cas des espaces vectoriels de dimension finie, nous disposons de caractérisations très agréables de la bijectivité par exemple (via le théorème du rang). Nous les reverrons plus tard.

Viendra ensuite le temps de débuter l'étude de la structure centrale en algèbre linéaire, celle d'espace vectoriel, en étudiant les axiomes qui la définissent et les premières conséquences qui en découlent. Pour comprendre l'intérêt de cette structure, on devra connaître les exemples d'espaces vectoriels « usuels » : $\mathbf{K}^n$, $\mathcal{F}(A, \mathbf{K})$, $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$, $\mathbf{K}[X]$, $\mathbf{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$. Ainsi un résultat établi dans la théorie générale des espaces vectoriels possède des applications dans les mondes de la géométrie, des fonctions, des suites numériques, des polynômes, des matrices et de bien d'autres encore.

La notion de sous-espace vectoriel sera la suivante au menu. On reverra sa définition et on sera en mesure d'énoncer et de démontrer sa caractérisation classique (Théorème 13). On étudiera alors plusieurs notions importantes attenantes.

- intersection de sous-espaces vectoriels ;
- somme de sous-espaces vectoriels ;
- sous-espace vectoriel engendré par une partie, en particulier par une partie finie ;
- somme directe de sous-espaces vectoriels ;
- supplémentaires d'un sous-espace vectoriel.

Toutes les définitions seront sues et on connaîtra les énoncés et démonstrations de tous les résultats. Ces dernières ne revêtent pas de difficulté particulière et constituent un excellent entraînement. Comme un sous-espace vectoriel possède une structure naturelle d'espace vectoriel, notre collection d'exemples d'espaces vectoriels se trouve considérablement enrichie.

Les applications entre deux espaces vectoriels qui respectent les deux opérations $.$ et $+$ sont qualifiées de linéaires. On commencera par revoir la définition formelle d'une application linéaire, avant de travailler les notions suivantes.

- homothéties ;
- image directe d'un sous-espace vectoriel de la source d'une application linéaire (énoncé et démonstration) ;
- image réciproque d'un sous-espace vectoriel du but d'une application linéaire (énoncé et démonstration) ;
- noyau et image d'une application linéaire ;
- caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire via son noyau (énoncé et démonstration) ;

- caractérisation de la surjectivité d'une application linéaire via son image (énoncé et démonstration).

Si E et F sont des espaces vectoriel alors l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F est muni d'une structure naturelle d'espace vectoriel, que l'on reverra.

Dans le cas particulier où $E = F$, $\mathcal{L}(E, E)$ est simplement noté $\mathcal{L}(E)$ et il possède une structure d'algèbre, que l'on devra connaître.

Enfin l'ensemble des automorphismes d'un espace vectoriel E, noté $\mathrm{GL}(E)$, est un groupe pour la loi de composition. Il conviendra de savoir énoncé ce résultat avec précision et de savoir le redémontrer (Théorème 25). Il s'agit d'un très bon exercice mêlant bijectivité et linéarité.

La fin du chapitre est consacré à l'étude d'endomorphismes particuliers : les projecteurs et les symétries. Ces exemples importants d'applications linéaires joueront un grand rôle dans le programme de MP (ce seront nos premiers exemples d'applications diagonalisables) et il faudra faire l'effort de tout connaître sur ces thèmes (définitions, énoncés et démonstrations).

Ce travail sur le cours est fondamental.

R4-5. 3. *Vrai-Faux.* — Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Si la réponse est « Vrai », alors démontrer le résultat. Si la réponse est « Faux », argumenter au moyen un contre-exemple.

1. L'application
$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - 1 \end{array} \right.$$
est injective.
2. L'application
$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - 1 \end{array} \right.$$
est injective.
3. L'application
$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - 1 \end{array} \right.$$
est surjective.
4. L'application
$$h \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & [-1; +\infty[\\ x & \longmapsto & x^2 - 1 \end{array} \right.$$
est surjective.
5. Soit l'application f définie par
$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - 1 \end{array} \right. .$$
Alors $f([-2, 3]) = [f(-2), f(3)] = [3, 8]$.
6. Soit l'application f définie par
$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - 1 \end{array} \right. .$$
Alors $f^{-1}([15, 24]) = [-5, -4] \cup [4, 5]$.

7. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Soient e_1, e_2, f_1, f_2 des vecteurs de E. Si $\mathrm{Vect}_{\mathbf{K}}(e_1, e_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbf{K}}(f_1, f_2)$ alors $\{e_1, e_2\} = \{f_1, f_2\}$.
8. Les sous-espaces vectoriels $F = \mathrm{Vect}_{\mathbf{K}}((1,0,1),(0,1,0))$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbf{K}}((6,2,5),(5,1,4))$ de $\mathbf{K}^3$ sont en somme directe.

R4-5. 4. *CNS pour que l'union de deux sous-espaces vectoriels soit un sous-espace vectoriel.* — Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Démontrer l'équivalence suivante.

$$F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \quad \Longleftrightarrow \quad (F \subset G \text{ ou } G \subset F)$$

R4-5. 5. *Une famille génératrice de l'image d'une application linéaire.* — Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ et des vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ de E tels que $E = \mathrm{Vect}_{\mathbf{K}}(e_1, \ldots, e_n)$, i.e. on suppose que E est de dimension finie. Démontrer

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}_{\mathbf{K}}(f(e_1), \ldots, f(e_n)) \ .$$

R4-5. 6. *Intersection de deux sous-espaces vectoriels de* $\mathbf{R}^4$. — On considère les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$, $E_1 = \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}(v_1, v_2)$ et $E_2 = \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}(w_1, w_2)$ avec $v_1 = (1,2,3,4)$, $v_2 = (2,-1,4,-1)$, $w_1 = (0,7,-1,17)$ et $w_2 = (-2,9,3,11)$. Démontrer $E_1 \cap E_2 = \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}((-1,8,1,14))$.

R4-5. 7. *Sous-espaces vectoriels supplémentaires.* —

1. Soient

$$F := \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x+y+z=0\right\} \subset \mathbf{R}^3 \qquad \text{et} \qquad G := \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}((1,1,1)) \subset \mathbf{R}^3 \ .$$

   (a) Justifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$.

   (b) Démontrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.

2. On désigne par E le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions définies sur $[0\ ;\ 1]$ à valeurs dans $\mathbf{R}$, qui sont continues sur $[0\ ;\ 1]$. Soient :

$$F := \left\{f \in E \ : \ \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0\right\} \subset E \qquad \text{et} \qquad G = \left\{ \left| \begin{array}{ccc} [0;1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & a \end{array} \right. \ : \ a \in \mathbf{R} \right\} \subset E \ .$$

   L'ensemble G est donc l'ensemble des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$, qui sont constantes.

   (a) Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

   (b) Démontrer que F et G sont supplémentaires dans E.

R4-5. 8. *Étude d'une projection de* $\mathbf{R}^3$. — Nous définissons :

$$P = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ z = x - y\} \quad \text{et} \quad D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x = -y = z\} \ .$$

1. Démontrer que P et D sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbf{R}^3$.
2. Soit p la projection de $\mathbf{R}^3$ sur P, parallèlement à D. Calculer $p(x,y,z)$, pour tout $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$.

R4-5. 9. *Étude d'un endomorphisme d'espace fonctionnel.* — Soit E le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, qui sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. On considère l'application T définie par :

$$T \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & T(f) \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & f'(t) + \dfrac{t\,f(t)}{1+t^2} \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

1. Démontrer que l'application T est bien définie.
2. Démontrer que l'application T est linéaire.
3. Déterminer le noyau de T. Qu'en déduire ?
4. Démontrer que l'application T est surjective.

R4-5. 10. *Lemme des cinq.* — On considère le diagramme

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & E_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"] & E_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "h_3"] & E_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "h_4"] & E_5 \arrow[d, "h_5"] \\ F_1 \arrow[r, "g_1"] & F_2 \arrow[r, "g_2"] & F_3 \arrow[r, "g_3"] & F_4 \arrow[r, "g_4"] & F_5 \end{tikzcd}$$

formé de $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et d'applications linéaires. On suppose que le diagramme est commutatif, i.e.

$$h_2 \circ f_1 = g_1 \circ h_1 \quad ; \quad h_3 \circ f_2 = g_2 \circ h_2 \quad ; \quad h_4 \circ f_3 = g_3 \circ h_3 \quad ; \quad h_5 \circ f_4 = g_4 \circ h_4$$

et que les deux lignes sont exactes, i.e.

$$\mathrm{Ker}(f_2) = \mathrm{Im}(f_1) \quad ; \quad \mathrm{Ker}(f_3) = \mathrm{Im}(f_2) \quad ; \quad \mathrm{Ker}(f_4) = \mathrm{Im}(f_3)$$

$$\mathrm{Ker}(g_2) = \mathrm{Im}(g_1) \quad ; \quad \mathrm{Ker}(g_3) = \mathrm{Im}(g_2) \quad ; \quad \mathrm{Ker}(g_4) = \mathrm{Im}(g_3).$$

On suppose enfin que les applications linéaires h_1, h_2, h_4, h_5 sont des isomorphismes. Démontrer que h_3 est un isomorphisme.