13. ESPACES PRÉHILBERTIENS

§ 1 NOTION DE PRODUIT SCALAIRE SUR UN ℝ-ESPACE VECTORIEL

C13.1. DÉFINITION (PRODUIT SCALAIRE) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Une application

$$\langle\cdot,\cdot\rangle \left| \begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \langle x, y\rangle \end{array}\right.$$

est un produit scalaire sur E si elle est linéaire à gauche (LG), linéaire à droite (LD), symétrique (Sym), positive (Pos) et définie (Déf), i.e. si les propriétés suivantes sont vérifiées.

$$\begin{array}{ll}
\textbf{(LG)} & \forall (x_1,x_2,y)\in E^3,\quad \forall(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2,\quad \langle \lambda_1x_1+\lambda_2x_2\,,\,y\rangle = \lambda_1\langle x_1\,,\,y\rangle+\lambda_2\langle x_2\,,\,y\rangle \\
\textbf{(LD)} & \forall (x,y_1,y_2)\in E^3,\quad \forall(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2,\quad \langle x\,,\,\lambda_1y_1+\lambda_2y_2\rangle = \lambda_1\langle x\,,\,y_1\rangle+\lambda_2\langle x\,,\,y_2\rangle \\
\textbf{(Sym)} & \forall (x,y)\in E^2,\quad \langle x\,,\,y\rangle=\langle y\,,\,x\rangle \\
\textbf{(Pos)} & \forall x\in E,\quad \langle x\,,\,x\rangle\geqslant 0 \\
\textbf{(Déf)} & \forall x\in E,\quad \langle x\,,\,x\rangle=0\Longrightarrow x=0_E.
\end{array}$$

C13.2. REMARQUE Les propriétés (LG) et (Sym) impliquent la propriété (LD) dans la définition C13.1. Ainsi, pour vérifier qu'une application $\langle\cdot,\cdot\rangle : E\times E\longrightarrow\mathbb{R}$ est un produit scalaire sur E, il suffit de vérifier les propriétés (LG), (Sym), (Pos) et (Déf).

C13.3. DÉFINITION (ESPACE PRÉHILBERTIEN) Un espace préhilbertien est un couple $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.

C13.4. EXERCICE (CARRÉS SCALAIRES DE SOMMES) Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien.

(a) Soit $(x,y)\in E^2$. Démontrer

$$\langle x+y\,,\,x+y\rangle = \langle x\,,\,x\rangle+\langle y\,,\,y\rangle+2\langle x\,,\,y\rangle$$

en justifiant chaque étape du calcul à l'aide d'une propriété du produit scalaire.

(b) Soient $p\in\mathbb{N}_{\geq 2}$ et $(x_1,\dots,x_p)\in E^p$. Démontrer

$$\left\langle \sum_{i=1}^p x_i\,,\,\sum_{i=1}^p x_i\right\rangle = \sum_{i=1}^p\langle x_i\,,\,x_i\rangle + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant p}\langle x_i\,,\,x_j\rangle$$

en justifiant chaque étape du calcul à l'aide d'une propriété du produit scalaire.

Indication

(a) D'après (LG), $\langle x+y\,,\,x+y\rangle=\langle x\,,\,x+y\rangle+\langle y\,,\,x+y\rangle\dots$

(b) Il convient tout d'abord de changer le nom d'un des indices de sommes pour ne pas commettre d'impair.

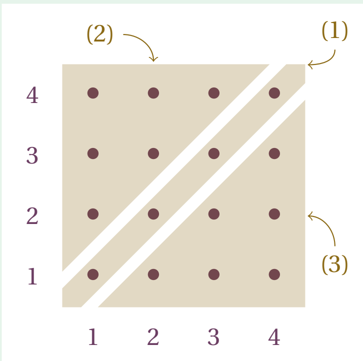
$$\left\langle \sum_{i=1}^p x_i\,,\,\sum_{i=1}^p x_i\right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^p x_i\,,\,\sum_{j=1}^p x_j\right\rangle \underset{\text{(LG)}}{=} \sum_{i=1}^p\left\langle x_i\,,\,\sum_{j=1}^p x_j\right\rangle=\dots$$

Le découpage en sommes finies suivant pourra être utile. Si $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ est une famille de nombres indexée par le « carré » $[\![1,p]\!]^2$ alors en décomposant ce carré suivant la diagonale (1), la partie au-dessus de cette diagonale (2), et la partie au-dessous de cette diagonale (3)

$$[\![1,p]\!]^2=\underbrace{\{(i,i)\,:\,i\in[\![1,p]\!]\}}_{(1)}\sqcup\underbrace{\{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2\,:\,i<j\}}_{(2)}\sqcup\underbrace{\{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2\,:\,i>j\}}_{(3)}$$

on décompose la somme $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant p}a_{i,j}$ comme suit

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant p}a_{i,j}=\underbrace{\sum_{i=1}^p a_{i,i}}_{(1)}+\underbrace{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant p}a_{i,j}}_{(2)}+\underbrace{\sum_{1\leqslant j<i\leqslant p}a_{i,j}}_{(3)}.$$



C13.5. EXERCICE (PRODUIT SCALAIRE CONTRE LE VECTEUR NUL) Soient $(E, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien et $x \in E$. Démontrer que $\langle x\,, 0_E\rangle = 0$ et $\langle 0_E\,, x\rangle = 0$.

Indication: $\langle x\,, 0_E\rangle = \langle x\,, 0_E + 0_E\rangle = \ldots$

§ 2 EXEMPLES FONDAMENTAUX DE PRODUITS SCALAIRES

C13.6. PRODUIT SCALAIRE CANONIQUE SUR $\mathbb{R}^n$ Soit $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. L'application

$$\langle\cdot\,,\cdot\rangle \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x = (x_1,\ldots,x_n)\,, y = (y_1,\ldots,y_n)) & \longmapsto & \langle x\,, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{array} \right.$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

(LG) Soient $x = (x_1,\ldots,x_n)$, $y = (y_1,\ldots,y_n)$, $z = (z_1,\ldots,z_n)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\langle \lambda.x + \mu.y\,, z\rangle = \left\langle \left(\lambda x_1 + \mu y_1, \ldots, \lambda x_n + \mu y_n\right), (z_1,\ldots,z_n) \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(\lambda x_i + \mu y_i) z_i}_{\lambda x_i z_i + \mu y_i z_i} = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \mu \sum_{i=1}^{n} x_i z_i = \lambda \langle x\,, z\rangle + \mu \langle y\,, z\rangle\,.$$

(Sym) Soient $x = (x_1,\ldots,x_n)$ et $y = (y_1,\ldots,y_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. D'après la commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$

$$\langle x\,, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \langle y\,, x\rangle\,.$$

(Pos) Soit $x = (x_1,\ldots,x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On a $\langle x\,, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant 0$ puisqu'un carré de nombre réel est toujours positif ou nul.

(Déf) Soit $x = (x_1,\ldots,x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que $\langle x\,, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$. Comme une somme de réels positifs ou nuls est nulle si et seulement si tous les termes de la somme sont nuls, nous en déduisons $x_1^2 = \ldots = x_n^2 = 0$. Par intégrité de $\mathbb{R}$, il vient $x_1 = \ldots = x_n = 0$ et donc $x = 0_{\mathbb{R}^n}$.

C13.7. PRODUIT SCALAIRE CANONIQUE SUR $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ Soit $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. L'application

$$\langle\cdot\,,\cdot\rangle \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \left(X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) & \longmapsto & \langle X\,, Y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{array} \right.$$

définit un produit scalaire sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Les arguments donnés en C13.6 s'appliquent *mutatis mutandis*.

C13.8. EXERCICE (PRODUIT SCALAIRE CANONIQUE SUR $\mathbb{R}[X]$) Démontrer que l'application

$$\langle\cdot\,,\cdot\rangle \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \left(P = \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k}_{\text{somme finie}}, Q = \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k}_{\text{somme finie}} \right) & \longmapsto & \langle P\,, Q\rangle := \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k \quad \text{(somme finie)} \end{array} \right.$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Indication: Vérifier les propriétés (LG), (Sym), (Pos) et (Déf) en adaptant les arguments donnés en C13.6.

C13.9. EXERCICE (PRODUIT SCALAIRE CANONIQUE SUR $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$) Soient deux entiers $p \geqslant 2$ et $n \geqslant 2$. L'application

$$\langle\cdot\,,\cdot\rangle \left| \begin{array}{cccc} \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ (A\,, B) & \longmapsto & \langle A\,, B\rangle := \mathrm{Tr}\left(A^\top \times B\right) & \text{(la matrice } A^\top \times B \text{ est de format } (n,n)) \end{array} \right.$$

définit un produit scalaire sur $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. Ce produit scalaire admet une expression fort utile, en termes des coefficients des matrices. Soient A et B des matrices de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. On calcule

$$\langle A\,, B\rangle := \mathrm{Tr}\left(A^\top \times B\right) = \sum_{i=1}^{n} \left[A^\top \times B\right]_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \left[A^\top\right]_{i,j} [B]_{j,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} [A]_{j,i} [B]_{j,i}\,.$$

Pour obtenir le produit scalaire de A et B, on multiplie donc les coefficients de même adresse de ces matrices entre eux (on obtient $p \times n$ nombres), puis on somme les $p \times n$ nombres ainsi obtenus.

(LG) Soient $(A,B,C) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})^3$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Par linéarité de la transposée et de la trace

$$(\star) \qquad \langle \lambda.A+\mu.B\,,\,C\rangle = \mathrm{Tr}\left((\lambda.A+\mu.B)^\top \times C\right) = \mathrm{Tr}\left((\lambda.A^\top+\mu.B^\top)\times C\right) = \mathrm{Tr}\left(\lambda.(A^\top \times C)+\mu.(B^\top \times C)\right) = \lambda.\underbrace{\mathrm{Tr}\left(A^\top \times C\right)}_{\langle A,C\rangle}+\mu.\underbrace{\mathrm{Tr}\left(B^\top \times C\right)}_{\langle B,C\rangle}.$$

(Sym) On rappelle que, pour tout $(M_1,M_2) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})^2$, $(M_1 \times M_2)^\top = M_2^\top \times M_1^\top$. Soient $(A,B) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})^2$. Grâce à l'observation que la trace d'une matrice carrée égale celle de sa transposée et à la propriété rappelée ci-dessus

$$\langle A\,,\,B\rangle = \mathrm{Tr}\left(A^\top \times B\right) = \mathrm{Tr}\left(\left(A^\top \times B\right)^\top\right) = \mathrm{Tr}\left(B^\top \times \left(A^\top\right)^\top\right) = \mathrm{Tr}\left(B^\top \times A\right) = \langle B\,,\,A\rangle\,.$$

(Pos) Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. D'après $(\star)$, $\langle A\,,\,A\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}[A]_{j,i}^2 \geqslant 0$ puisqu'un carré de nombre réel est toujours positif ou nul.

(Déf) Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. tel que $\langle A\,,\,A\rangle = 0$. D'après $(\star)$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}[A]_{j,i}^2 = 0$. Comme une somme de réels positifs ou nuls est nulle si et seulement si tous les termes de la somme sont nuls, nous en déduisons que, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $[A]_{j,i}^2 = 0$. Par intégrité de $\mathbb{R}$, il vient pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $[A]_{j,i} = 0$, i.e. $A = 0_{\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})}$.

C13.10. Exercice (Produit scalaire canonique sur $\ell^2(\mathbb{R})$)

(a) Soient deux suites $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n^2$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} v_n^2$ convergent. Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n v_n$ est absolument convergente.

(b) Démontrer que $\ell^2(\mathbb{R}) := \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n^2 \text{ converge}\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(c) Démontrer que l'application

$$\langle\cdot,\cdot\rangle \left| \begin{array}{ccc} \ell^2(\mathbb{R}) \times \ell^2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\,,\,v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}) & \longmapsto & \langle u\,,\,v\rangle := \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n \end{array}\right.$$

définit un produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{R})$.

Indication

(a) Démontrer que la série de terme général $|u_n v_n| \geqslant 0$ est dominée par une série convergente, en remarquant que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(|a|-|b|)^2 \geqslant 0$.
(b) Vérifier que les deux propriétés du critère pour être un sous-espace vectoriel sont vérifiées. Pour la stabilité par combinaison linéaire, utiliser (a).
(c) Vérifier les propriétés (LG), (Sym), (Pos) et (Déf) en adaptant les arguments donnés en C13.6.

C13.11. Exemple (Produit scalaire canonique sur $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$) Soient $a<b$ des nombres réels. L'application

$$\langle\cdot,\cdot\rangle \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R}) \times \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f,g) & \longmapsto & \langle f\,,\,g\rangle := \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$$

définit un produit scalaire sur $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

(LG) Soient $(f,g,h) \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})^3$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Par linéarité de l'intégrale

$$\langle \lambda.f+\mu.g\,,\,h\rangle = \int_a^b (\lambda f(t)+\mu g(t))h(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \lambda f(t)h(t)+\mu g(t)h(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\int_a^b f(t)h(t)\,\mathrm{d}t+\mu\int_a^b g(t)h(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\langle f\,,\,h\rangle+\mu\langle g\,,\,h\rangle\,.$$

(Sym) Soient $(f,g) \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})^2$ D'après la commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$

$$\langle f\,,\,g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)f(t)\,\mathrm{d}t = \langle g\,,\,f\rangle\,.$$

(Pos) Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Comme $f^2 \geqslant 0$ et $a<b$, la propriété de positivité de l'intégrale livre $\langle f\,,\,f\rangle = \displaystyle\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

(Déf) Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ telle que $\langle f\,,\,f\rangle = \displaystyle\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Comme la fonction f^2 est continue et de signe constant sur $[a,b]$, nous en déduisons que, pour tout $t \in [a,b]$, $f^2(t) = 0$. Par intégrité de $\mathbb{R}$, il vient, pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) = 0$, i.e. $f = 0_{\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})}$.

C13.12. Exemple (Un autre produit scalaire canonique sur $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$) Soient $a<b$ des nombres réels.

(a) Soient $h \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{h(t)}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}\,\mathrm{d}t$ (le domaine d'intégration est $]a,b[$) est absolument convergente.

(b) Démontrer que l'application

$$\langle \cdot,\cdot\rangle \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})\times\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f,g) & \longmapsto & \langle f,g\rangle := \displaystyle\int_a^b \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}\,\mathrm{d}t \end{array}\right. \quad \text{(le domaine d'intégration est }]a,b[)$$

définit un produit scalaire sur $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

Indication

(a) Justifier qu'il existe $M \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ tel que, pour tout $t \in]a,b[$, $|h(t)| \leqslant M$.
Démontrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{h(t)}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}$ est intégrable sur $]a,(a+b)/2]$ (resp. $[(a+b)/2,b[$) à l'aide du caractère borné de h sur $]a,b[$ et du critère de Riemann en un point réel.
(b) Vérifier les propriétés (LG), (Sym), (Pos) et (Déf) en adaptant les arguments donnés en C13.11. Pour (Déf), on veillera à bien démontrer qu'une fonction $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ telle que $\langle f,f\rangle = 0$ est nulle sur le segment $[a,b]$, bien que le domaine d'intégration soit son intérieur $]a,b[$.

C13.13. Exercice (Produit scalaire canonique sur $L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$)

(a) Soient deux fonctions $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que f^2 et g^2 sont intégrables sur $\mathbb{R}$. Démontrer que la fonction fg est intégrale sur $\mathbb{R}$

(b) Démontrer que $L^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) := \{f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f^2 \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(c) Démontrer que l'application

$$\langle \cdot,\cdot\rangle \left| \begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})\times L^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f,g) & \longmapsto & \langle f,g\rangle := \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$$

définit un produit scalaire sur $L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Indication

(a) Démontrer que la fonction $|fg| \geqslant 0$ est dominée par une fonction intégrale sur $\mathbb{R}$ en remarquant que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(|a|-|b|)^2 \geqslant 0$.
(b) Vérifier que les deux propriétés du critère pour être un sous-espace vectoriel sont vérifiées. Pour la stabilité par combinaison linéaire, utiliser (a).
(c) Vérifier les propriétés (LG), (Sym), (Pos) et (Déf) en adaptant les arguments donnés en C13.11.

C13.14. Exercice (Produit scalaire canonique sur $\mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$)

(a) Démontrer que $\mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R}) := \{f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f \text{ est } 2\pi\text{-périodique}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(b) Démontrer que l'application

$$\langle \cdot,\cdot\rangle \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})\times \mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f,g) & \longmapsto & \langle f,g\rangle := \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$$

définit un produit scalaire sur $\mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Indication

(a) Vérifier que les deux propriétés du critère pour être un sous-espace vectoriel sont vérifiées.
(b) Vérifier les propriétés (LG), (Sym), (Pos) et (Déf) en adaptant les arguments donnés en C13.11. Pour (Déf), on veillera à bien démontrer qu'une fonction $f \in \mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\langle f,f\rangle = 0$ est nulle sur $\mathbb{R}$.

§ 3 Théorèmes de Cauchy-Schwarz et de Minkowski

C13.15. Notation. Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien. Pour tout $x \in E$, on pose

$$||x|| := \sqrt{\langle x,x\rangle}.$$

Cette notation « norme » sera justifiée dans la prochaine partie.

C13.16. Lemme (Carré de la norme d'une somme) Soient $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien et $(x,y) \in E^2$.

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2\langle x,y\rangle$$

Démonstration

Il s'agit d'une simple réécriture de l'identité (a) de C13.4 à l'aide de la notation $||\cdot||$.

C13.17. Lemme (Homogénéité de la norme) Soient $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien, $x\in E$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$||\lambda.x|| = |\lambda|\ ||x||$$

Démonstration

D'après (LG), (LD) et la multiplicativité de la racine carrée

$$||\lambda.x|| = \sqrt{\langle\lambda.x,\lambda.x\rangle} = \sqrt{\lambda^2\,\langle x,x\rangle} = \sqrt{\lambda^2}\,\sqrt{\langle x,x\rangle} = |\lambda|\ \sqrt{\langle x,x\rangle} = |\lambda|\ ||x||\ .$$

C13.18. Théorème (Cauchy-Schwarz) Soient $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien et $(x,y)\in E^2$.

(a) **Inégalité de Cauchy-Schwarz.**

$$\left|\left\langle x,y\right\rangle\right| \leqslant ||x||\ \left|\left|y\right|\right|$$

(b) **Cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.**

$$\left|\left\langle x,y\right\rangle\right| = ||x||\ \left|\left|y\right|\right| \text{ si et seulement si la famille } (x,y) \text{ est liée.}$$

Démonstration

Si les vecteurs x et y sont tous les deux nuls, alors les assertions (a) et (b) sont claires.
Supposons désormais qu'au moins un des vecteurs x et y est non nul. D'après (Sym), les vecteurs x et y ont des rôles symétriques dans les assertions (a) et (b). Nous pouvons donc supposer que $y\neq 0_E$.

(a) On introduit l'application

$$f\ \left|\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & \left\langle x+ty,x+ty\right\rangle\ .\end{array}\right.$$

- Soit $t\in\mathbb{R}$. En développant le carré scalaire de la somme $x+ty$ (cf. C13.4), il vient

  $$f(t) = \left\langle x+ty,x+ty\right\rangle = \langle x,x\rangle + 2\left\langle x,ty\right\rangle + \left\langle ty,ty\right\rangle$$

  puis, en utilisant (LG) et (LD)

  $$f(t) = \langle x,x\rangle + 2\left\langle x,y\right\rangle t + \left\langle y,y\right\rangle t^2\ .$$

  L'application f est donc polynomiale en sa variable t.
- Comme $y\neq 0_E$, (Pos) et (Déf) impliquent $\left\langle y,y\right\rangle > 0$. L'application f est donc polynomiale de degré 2, avec un coefficient dominant positif.
- D'après (Pos), $f\geqslant 0$ et donc le discriminant $\Delta(f)$ de f vérifie $\Delta(f)\leqslant 0$. En effet, si $\Delta(f)>0$ alors f admet deux racines réelles distinctes $t_1<t_2$ et est strictement négative sur $]t_1,t_2[$, ce qui n'est pas.

Comme $\Delta(f) = 4\left\langle x,y\right\rangle^2 - 4\langle x,x\rangle\left\langle y,y\right\rangle$, $\Delta(f)\leqslant 0$ livre $\left\langle x,y\right\rangle^2 \leqslant \langle x,x\rangle\left\langle y,y\right\rangle$ puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$.

(b) $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $\left|\left\langle x,y\right\rangle\right| = ||x||\ \left|\left|y\right|\right|$. Alors $\Delta(f)=0$, où f est l'application polynomiale de degré 2 introduite en (a). Cette dernière possède donc une unique racine réelle t_0. Comme

$$0 = f(t_0) = \left\langle x+t_0y,x+t_0y\right\rangle$$

(Déf) livre $1.x+t_0y = 0_E$, d'où le caractère lié de la famille (x,y).

(b) $\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons la famille (x,y) liée. Alors il existe $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$ tel que

$$\text{(i)}\qquad \alpha.x+\beta.y = 0_E\ .$$

Le nombre α n'est pas nul (si $\alpha=0$ alors $\beta\neq 0$ et (i) livre $y=0_E$, ce qui n'est pas). De (i) nous déduisons que $x=\lambda.y$, où $\lambda := -\beta/\alpha$.
D'après (LG) et la multiplicativité de la valeur absolue

$$\text{(ii)}\qquad \left|\left\langle x,y\right\rangle\right| = \left|\left\langle \lambda.y,y\right\rangle\right| = \left|\lambda\left\langle y,y\right\rangle\right| = |\lambda|\ \left|\left\langle y,y\right\rangle\right| = |\lambda|\ \left|\left|y\right|\right|^2\ .$$

Par homogénéité de la norme (C13.17)

$$\text{(iii)}\qquad ||x||\ \left|\left|y\right|\right| = \left|\left|\lambda.y\right|\right|\ \left|\left|y\right|\right| = |\lambda|\ \left|\left|y\right|\right|^2\ .$$

De (ii) et (iii) on déduit $\left|\left\langle x,y\right\rangle\right| = ||x||\ \left|\left|y\right|\right|$.

C13.19. Exemples (Inégalité de Cauchy-Schwarz pour $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel) Soit un entier $n \geqslant 2$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ (cf. C13.6) livre, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

C13.20. Exemples (Inégalité de Cauchy-Schwarz pour $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel) Soit un entier $n \geqslant 2$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (cf. C13.9) livre, pour toutes matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

$$\left|\mathrm{Tr}\left(A^\top \times B\right)\right| \leqslant \sqrt{\mathrm{Tr}\left(A^\top \times A\right)} \sqrt{\mathrm{Tr}\left(B^\top \times B\right)}.$$

qui, lorsque A et B sont de plus symétriques s'écrit encore

$$|\mathrm{Tr}(AB)| \leqslant \sqrt{\mathrm{Tr}\left(A^2\right)} \sqrt{\mathrm{Tr}\left(B^2\right)}.$$

C13.21. Exemples (Inégalité de Cauchy-Schwarz pour $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel) Soient $a < b$ deux nombres réels. L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique sur $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ (cf. C13.11) livre, pour tout $(f,g) \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$

$$\left| \int_a^b f(t) g(t)\, \mathrm{d}t \right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f(t)^2\, \mathrm{d}t} \sqrt{\int_a^b g(t)^2\, \mathrm{d}t}.$$

C13.22. Exercice Soient n réels strictement positifs $x_1, \ldots, x_n$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Démontrer que $n^2 \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}$.

Indication : Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel à deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ bien choisis (cf. C13.19).

C13.23. Exercice Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ une fonction telle que $f > 0$ sur $[0,1]$ et $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t = 1$. Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{f(t)}\, \mathrm{d}t \geqslant 1$.

Indication : Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel à deux fonctions de $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ bien choisies (cf. C13.21).

C13.24. Exercice Soient $a < b$ deux nombres réels et $E := \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Soit $C := \left\{ f \in E \,:\, \forall x \in [a,b], \quad f(x) > 0 \right\}$ et

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \left(\displaystyle\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t \right) \left(\displaystyle\int_a^b \frac{1}{f(t)}\, \mathrm{d}t \right) \end{array} \right.$$

(a) Démontrer que $\varphi(C)$ est minorée.
(b) Déterminer la borne inférieure $m := \inf_{f \in C} \varphi(f)$ et démontrer qu'elle est atteinte.
(c) Déterminer toutes les fonctions $f \in C$ telles que $\varphi(f) = m$.

Indication : **(a)** Observer le signe des images des éléments de C par φ ou, pour améliorer le minorant ainsi obtenu, appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel à deux fonctions de $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ bien choisies (cf. C13.21).
(b) Si l'on note m le minorant de φ obtenu en (a) grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, déterminer une fonction « simple » $f_0 \in C$ telle que $\varphi(f_0) = m$. On peut « deviner » une telle fonction f_0 ou en trouver une en raisonnant par analyse et synthèse (cf. cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz) et ainsi répondre à (c) en même temps.
(c) Raisonner par analyse et synthèse, en prenant appui sur le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

C13.25. COROLLAIRE (THÉORÈME DE MINKOWSKI) Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien et $(x, y) \in E^2$.

(a) **Inégalité de Minkowski**

$$||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y||$$

(b) **Cas d'égalité dans l'inégalité de Minkowski**

$$||x+y|| = ||x|| + ||y|| \iff \left\{ \begin{array}{ll} \exists \lambda \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}, & x = \lambda.y \\ \text{ou} & \\ \exists \lambda \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}, & y = \lambda.x\,. \end{array} \right.$$

Démonstration

(a) D'après C13.16 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\text{(i)} \qquad ||x+y||^2 = \langle x+y, x+y \rangle = ||x||^2 + ||y||^2 + 2\langle x, y\rangle \leqslant ||x||^2 + ||y||^2 + 2\,||x||\,||y|| = (||x|| + ||y||)^2\,.$$

Par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$, on en déduit $||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y||$.

(b) $\boxed{\Longrightarrow}$ Si les vecteurs x et y sont tous les deux nuls, alors l'implication directe dans (b) est claire. Supposons désormais qu'au moins un des vecteurs x et y est non nul. Les vecteurs x et y ont des rôles symétriques. Nous pouvons donc supposer que $y \neq 0_E$.

Supposons que $||x+y|| = ||x|| + ||y||$. Les termes extrémaux dans (i) sont donc égaux. On en déduit que l'inégalité dans (i) est une égalité et par suite

$$\text{(ii)} \qquad \langle x, y\rangle = ||x||\,||y||\,.$$

D'après le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz (C13.18), la famille (x, y) est liée. Il existe donc $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$ tel que

$$\text{(iii)} \qquad \alpha.x + \beta.y = 0_E\,.$$

Le nombre α n'est pas nul (si $\alpha = 0$ alors $\beta \neq 0$ et (iii) livre $y = 0_E$, ce qui n'est pas). De (iii) nous déduisons que $x = \lambda.y$, où $\lambda := -\alpha/\beta$. D'après (LG) et l'homogénéité de la norme (C13.17)

$$\langle x, y\rangle = \langle \lambda.y, y\rangle = \lambda\,\langle y, y\rangle = \lambda\,||y||^2 \qquad \text{et} \qquad ||x||\,||y|| = ||\lambda.y||\,||y|| = |\lambda|\,||y||^2\,.$$

De ces calculs et de (ii), nous déduisons

$$\text{(iv)} \qquad \lambda\,||y||^2 = |\lambda|\,||y||^2\,.$$

Comme $y \neq 0_E$, (Déf) livre $||y||^2 = \langle y, y\rangle > 0$. Ainsi (iv) implique $\lambda = |\lambda| \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$.

(b) $\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ tel que $x = \lambda.y$. D'après l'homogénéité de la norme (C13.17) et $\lambda \geqslant 0$

$$||x+y|| = ||\lambda.y + y|| = ||(\lambda+1).y|| = |\lambda+1|\,||y|| = (\lambda+1)\,||y||$$

et

$$||x|| + ||y|| = ||\lambda.y|| + ||y|| = |\lambda|.||y|| + ||y|| = \lambda.||y|| + ||y|| = (\lambda+1)\,||y||$$

d'où $||x+y|| = ||x|| + ||y||$.

S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ tel que $y = \lambda.x$ on établit $||x+y|| = ||x|| + ||y||$ de même.

§ 4 NORME ASSOCIÉE À UN PRODUIT SCALAIRE

C13.26. THÉORÈME (NORME ASSOCIÉE À UN PRODUIT SCALAIRE) Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien. L'application

$$||\cdot|| \left| \begin{array}{lcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_{\geqslant 0} \\ x & \longmapsto & ||x|| := \sqrt{\langle x, x\rangle} \end{array} \right.$$

et une norme sur E.

Démonstration

L'homogénéité et l'inégalité triangulaire ont déjà été établies (cf. C13.17 et inégalité de Minkowski C13.25). Quant à la séparation, elle résulte de l'axiome (Déf) d'un produit scalaire.

C13.27. Exercice (Rappels sur les propriétés d'une norme) Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé. Soit $(x, y) \in E^2$.
(a) Démontrer que $||x - y|| = ||y - x||$.
(b) Démontrer que $\big|\,||x|| - ||y||\,\big| \leqslant ||x - y|| \leqslant ||x|| + ||y||$.

Indication

(a) Homogénéité d'une norme.
(b) Pour établir l'inégalité $\big|\,||x|| - ||y||\,\big| \leqslant ||x - y||$ remarquer que $||x|| = ||x - y + y||$ et $||y|| = ||y - x + x||$. Pour démontrer $||x - y|| \leqslant ||x|| + ||y||$ observer que $||x - y|| = ||x + (-y)||$.

C13.28. Proposition (Identité de polarisation) Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien et $||\cdot||$ la norme sur E associée. Soit $(x, y) \in E^2$.

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left(||x + y||^2 - ||x - y||^2\right)$$

C13.29. Un intérêt de l'identité de polarisation On conserve les notations de C13.28. D'après l'identité de polarisation, la seule connaissance de la norme $||\cdot||$ permet de retrouver le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

C13.30. Proposition (Identité du parallélogramme) Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien et $||\cdot||$ la norme sur E associée. Soit $(x, y) \in E^2$.

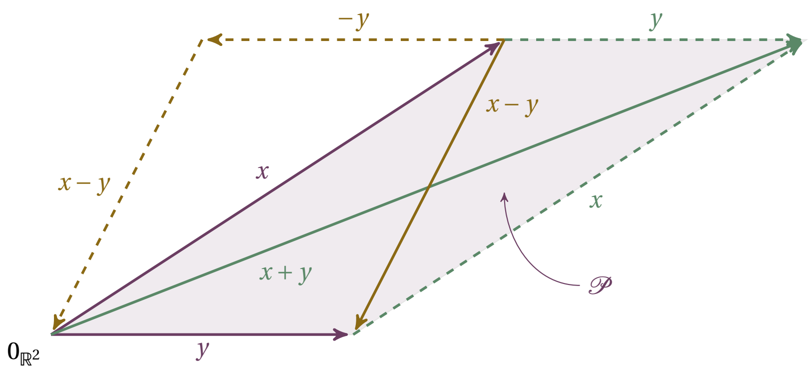
$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2\left(||x||^2 + ||y||^2\right)$$

C13.31. Interprétation géométrique de l'identité du parallélogramme

Soient deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^2$, muni de son produit scalaire usuel, que nous représentons en l'origine $0_{\mathbb{R}^2}$. Formons le parallélogramme $\mathscr{P}$ supporté par ces deux vecteurs.

Le nombre $2\left(||x||^2 + ||y||^2\right)$ égale la somme des carrés des longueurs de tous les côtés du parallélogramme $\mathscr{P}$.

Le nombre $||x + y||^2 + ||x - y||^2$ est la somme des carrés des longueurs des deux diagonales de $\mathscr{P}$.



D'après C13.30, dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs de tous les côtés égale la somme des carrés des longueurs des deux diagonales.

C13.32. Exercice Soit $(E, ||\cdot||)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. On suppose l'identité du parallélogramme vérifiée

$$\forall (x, y) \in E^2, \qquad ||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2\left(||x||^2 + ||y||^2\right)$$

et on souhaite démontrer qu'alors la norme $(E, ||\cdot||)$ est la norme associée à un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur E. D'après C13.28, si un tel produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ existe alors il est donné par

$$\langle\cdot,\cdot\rangle \left| \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \dfrac{1}{4}\left(||x + y||^2 - ||x - y||^2\right) \end{array} \right. .$$

Il s'agit de démontrer que cette application définit bien un produit scalaire sur E.
(a) Démontrer que, pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ et $\langle x, x \rangle = ||x||^2$.
(b) Démontrer que, pour tout $(x_1, x_2, y) \in E^3$, $\langle x_1 + x_2, y \rangle - \langle x_1, y \rangle - \langle x_2, y \rangle = 0$.
(c) Démontrer que, pour tout $(x, y) \in E^2$, pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $\langle r.x, y \rangle = r\,\langle x, y \rangle$.
(d) En déduire que, pour tout $(x, y) \in E^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\langle \lambda.x, y \rangle = \lambda\,\langle x, y \rangle$.
(e) Conclure.

Indication

(b) Appliquer deux fois l'identité du parallélogramme : une fois à $x \leftarrow x_1 + y$ et $y \leftarrow x_2 + y$ et une autre fois à $x \leftarrow x_1 - y$ et $y \leftarrow x_2 - y$.
(c) Commencer par démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\langle n.x\,,\,y \rangle = n \langle x\,,\,y \rangle$.
Considérer alors $n \in \mathbb{Z}_{<0}$ et, en remarquant que $(-n) \in \mathbb{N}$, établir que $\langle n.x\,,\,y \rangle = n \langle x\,,\,y \rangle$.
Si enfin $r = \frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, en observant que $qr \in \mathbb{Z}$, démontrer $\langle r.x\,,\,y \rangle = r \langle x\,,\,y \rangle$.
(d) Fixer $(x, y) \in E^2$ et justifier que les deux applications $\lambda \longmapsto \langle \lambda.x\,,\,y \rangle$, $\lambda \longmapsto \lambda \langle x\,,\,y \rangle$ sont continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Utiliser ensuite un argument de densité.
(e) Il s'agit de démontrer que l'application $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ définie dans l'énoncé vérifie les propriétés (LG), (Sym), (Pos), (Déf) et que, pour tout $x \in E$, $||\,x\,|| = \sqrt{\langle x\,,\,x \rangle}$ ...

§ 5 ORTHOGONALITÉ D'UNE FAMILLE DE VECTEURS

Dans cette partie, $(E, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ désigne un espace préhilbertien et $||\cdot||$ la norme associée au produit scalaire $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$.

C13.33. DÉFINITION (VECTEURS ORTHOGONAUX) Soit $(x, y) \in E^2$. On dit que x et y sont orthogonaux si $\langle x\,,\,y \rangle = 0$.

C13.34. NOTATION ⊥ POUR DES VECTEURS Soit $(x, y) \in E^2$. La notation $x \perp y$ signifie que les vecteurs x et y sont orthogonaux.

C13.35. DÉFINITION (FAMILLES ORTHOGONALES, FAMILLES ORTHONORMALES) Soit I un ensemble non vide, soit $(x_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille de vecteurs de E.

(a) La famille $(x_i)_{i\in I}$ est orthogonale si

$$\forall (i, j) \in I^2, \qquad i \neq j \Longrightarrow \langle x_i\,,\,x_j \rangle = 0\,.$$

(b) La famille $(x_i)_{i\in I}$ est orthonormale si elle est orthogonale et si de plus pour tout $i \in I$, $||\,x_i\,|| = 1$, i.e. si

$$\forall (i, j) \in I^2, \qquad \langle x_i\,,\,x_j \rangle = \delta_{i,j}\,.$$

C13.36. EXEMPLE Soit $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. Considérons le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ (cf. C13.6). La base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est une famille orthonormale.

C13.37. EXEMPLE Considérons le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}[X]$ (cf. C13.8). La base canonique $\left(X^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ est une famille orthonormale.

C13.38. EXEMPLE Soient deux entiers $p \geqslant 2$ et $n \geqslant 2$. Considérons le produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ (cf. C13.9). La base canonique $\left(E_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ est une famille orthonormale.

C13.39. EXERCICE Considérons le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathscr{C}^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel (C13.11)

$$\langle\cdot\,,\cdot\rangle \left| \begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f, g) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\,. \end{array}\right.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous définissons l'application c_n par

$$c_n \left| \begin{array}{ccc} [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(nx)\,. \end{array}\right.$$

Démontrer que la famille $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale.

Indication

Soient deux entiers naturels n et m tels que $n \neq m$. Il s'agit de démontrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(nt)\cos(mt)\,\mathrm{d}t = 0$. Linéariser le produit de cosinus.

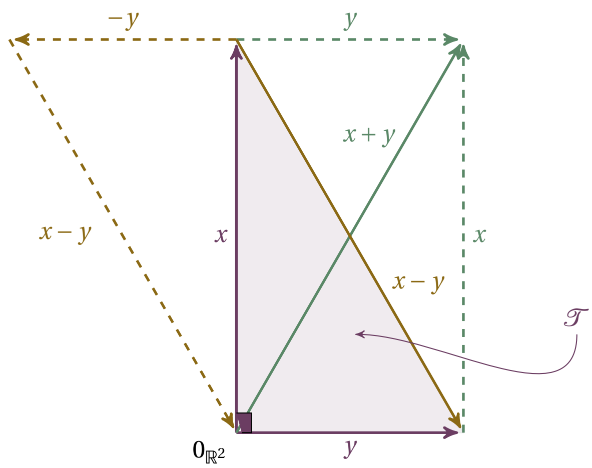
C13.40. Proposotion (Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre) Soient I un ensemble non vide et $(x_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille orthogonale telle que, pour tout $i \in I$, $x_i \neq 0_E$. La famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre.

C13.41. Théorème de Pythagore Soient $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ une famille orthogonale.

$$\left|\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right|\right|^2 = \sum_{k=1}^{n} ||x_k||^2 .$$

C13.42. Interprétation géométrique du théorème de Pythagore pour deux vecteurs

Soient deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^2$, muni de son produit scalaire usuel, que nous représentons en l'origine $0_{\mathbb{R}^2}$. Nous supposons x et y orthogonaux et nous formons le triangle rectangle $\mathscr{T}$ supporté par ces deux vecteurs.



Le théorème de Pythagore C13.41 livre

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 .$$

D'après l'identité de polarisation C13.28 et l'orthogonalité de x et y, $||x+y||^2 = ||x-y||^2$. Des deux dernières identités, nous déduisons

$$(\star) \qquad ||x-y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 .$$

Le nombre $||x-y||^2$ égale le carré de la longueur de l'hypoténuse de $\mathscr{T}$. L'identité $(\star)$ est donc le théorème de Pythagore rencontré dans les petites classes.

§ 6 Orthogonalité de sous-espaces vectoriels

Dans cette partie, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ désigne un espace préhilbertien.

C13.43. Définition (Sous-espaces orthogonaux)

1. Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont dit orthogonaux si tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de G, i.e. si
$$\forall (x,y) \in F \times G, \quad \langle x, y \rangle = 0 .$$
2. Des sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, \dots, F_n$ de E sont deux-à-deux orthogonaux si :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \qquad i \neq j \Longrightarrow F_i \text{ et } F_j \text{ sont orthogonaux}$$

C13.44. Notation $\perp$ pour sous-espaces vectoriels Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. La notation $F \perp G$ signifie que les sous-espaces vectoriels F et G de E sont orthogonaux.

C13.45. Des sous-espaces vectoriels deux-à-deux orthogonaux sont en somme directe Soient $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ et $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E deux-à-deux orthogonaux. La somme $\sum_{k=1}^{n} F_k$ est directe et on la note donc $\bigoplus_{k=1}^{n} F_k$.

C13.46. Remarque Soient $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ et $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E deux-à-deux orthogonaux. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, F_i est orthogonal à la somme directe $\bigoplus_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ j\neq i}} F_j$.

C13.47. Exercice Soit un entier $n \geqslant 2$. On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique (cf. C13.9) et on pose

$$\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) := \left\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \ : \ A^\top = A\right\} \quad \text{et} \quad \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) := \left\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \ : \ A^\top = -A\right\}.$$

Démontrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriel orthogonaux.

Indication

Écrire $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ comme des noyaux d'endomorphismes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour établir que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Pour démontrer $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \perp \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, fixer $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ et prouver que $\langle A, B\rangle = 0$.

C13.48. Exercice

(a) Démontrer que l'application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \longmapsto & \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

(b) Soit i et j des entiers naturels. Démontrer que $X^{2i} \perp X^{2j+1}$.

(c) En déduire que les sous-espaces vectoriels $\mathscr{P} := \mathrm{Vect}\left(\left(X^{2i}\right)_{i\in\mathbb{N}}\right)$ et $\mathscr{I} := \mathrm{Vect}\left(\left(X^{2j+1}\right)_{j\in\mathbb{N}}\right)$ de $\mathbb{R}[X]$ sont orthogonaux.

Indication

(a) On démontre que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ vérifie (LG), (Sym) et (Pos) en adaptant les arguments donnés en C13.11.
Pour établir la propriété (Déf), on considère $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\langle P, P\rangle = 0$ et on démontre que P est le polynôme nul (et non la fonction nulle sur $[-1, 1]$). Que d'un polynôme possédant une infinité de racines?
(b) Prouver $\langle X^{2i}, X^{2j+1}\rangle = 0$.
(c) Soit $P \in \mathscr{P}$ et $Q \in \mathscr{I}$. Il s'agit de prouver $\langle P, Q\rangle = 0$. Pour cela, écrire P comme une combinaison linéaire d'un nombre fini des vecteurs de la famille $\left(X^{2i}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ et Q comme une combinaison linéaire d'un nombre fini des vecteurs de la famille $\left(X^{2j+1}\right)_{j\in\mathbb{N}}$, utiliser (LG) et (LD)...

§ 7 Projecteur orthogonal

Dans cette partie, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ désigne un espace préhilbertien et $||\cdot||$ la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

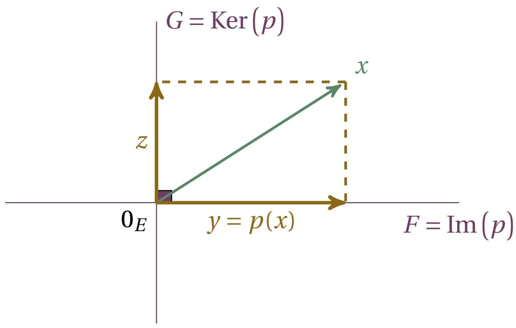
C13.49. Définition (Projecteur orthogonal) Soit p un projecteur de E ($p \in \mathscr{L}(E)$ et $p \circ p = p$). On dit que p est un projecteur orthogonal si $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont des sous-espaces vectoriels de E orthogonaux.

C13.50. Exemple

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
Si $F \perp G$ alors la projection p de E sur F parallèlement à G

$$p \left| \begin{array}{ccc} E = F \oplus G & \longrightarrow & E \\ x = \underbrace{y}_{\in F} + \underbrace{z}_{\in G} & \longmapsto & p(x) := y \end{array} \right.$$

est un projecteur orthogonal. En effet, nous savons que p est un projecteur de E dont le noyau est G et l'image F. Par hypothèse $\mathrm{Ker}(p) \perp \mathrm{Im}(p)$.



C13.51. Exercice Soit p un projecteur de E. Démontrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si, pour tout $x \in E$, $||p(x)|| \leqslant ||x||$.

Indication

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposer que p est un projecteur orthogonal et considérer un vecteur x de E.
Démontrer que $||p(x)|| \leqslant ||x||$ ou plutôt $||p(x)||^2 \leqslant ||x||^2$ en décomposant x dans la somme directe orthogonale $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}\, p$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposer que pour tout $x \in E$, $||p(x)|| \leqslant ||x||$. Considérer $y \in \mathrm{Ker}(p)$ et $z \in \mathrm{Im}\, p$. Il s'agit de démontrer $\langle y, z\rangle = 0$. On peut pour cela s'inspirer de la démonstration du théorème de Cauchy-Schwarz donnée en C13.18, en considérant les nombres $||y + \lambda.z||^2$, où λ est un paramètre réel...

§ 8 Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Dans cette partie, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ désigne un espace préhilbertien.

C13.52. Définition (Orthogonal d'un sous-espace vectoriel) Soit F un sous-espace vectoriel de E. L'orthogonal $F^\perp$ de F est l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de F, i.e. :

$$F^\perp := \left\{ x \in E \;:\; \forall y \in F,\, \left\langle x, y \right\rangle = 0 \right\}.$$

C13.53. Exemple $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$.

C13.54. Exercice Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F \subset G$. Démontrer que $G^\perp \subset F^\perp$.

Indication — Soit $x \in G^\perp$. Démontrer que $x \in F^\perp$, i.e. que, pour tout $y \in F$, $\left\langle x, y \right\rangle = 0$.

C13.55. Exercice Soient un entier $n \geqslant 2$ et $x_1, x_2, \ldots, x_n, x$ des vecteurs de E. Démontrer :

$$x \in \mathrm{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n)^\perp \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall k \in [\![1, n]\!], \quad x \perp x_k$$

Indication — $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposer que $x \in \mathrm{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n)^\perp$, i.e. que x est orthogonal à tous les vecteurs de $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et justifier que x est orthogonal à chacun des vecteurs $x_1, \ldots, x_n$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposer que x est orthogonal à chacun des vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ et démontrer qu'il appartient à $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n)^\perp$, i.e. que x est orthogonal à chacun des vecteurs de $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Pour cela considérer un vecteur $y \in \mathrm{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et démontrer $\left\langle x, y \right\rangle = 0$.

C13.56. Exercice On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire canonique (cf. C13.6). On pose

$$F := \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;:\; \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 0 \end{array} \right. \right\}.$$

(a) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en donner une base.
(b) Déterminer l'orthogonal $F^\perp$ de F.

Indication — **(a)** Résoudre le système linéaire dont F est l'ensemble solution, en appliquant l'algorithme du pivot de Gauß, pour obtenir une famille génératrice de F.
(b) D'après C13.55, un vecteur $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ appartient à $F^\perp$ si et seulement s'il est orthogonal à chacun des vecteurs de la base de F déterminée en (a). On est alors conduit à résoudre un nouveau système linéaire, toujours en appliquant l'algorithme du pivot de Gauß, pour déterminer $F^\perp$.

C13.57. Proposition (Structure de l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel Si F un sous-espace vectoriel de E alors $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

C13.58. Exercice On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique (cf. C13.9). On note F l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont nuls

$$F := \left\{ A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \;:\; \forall\, i \in [\![1, n]\!],\ [A]_{i,i} = 0 \right\}.$$

(a) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et en donner une base.
(b) Déterminer une base de $F^\perp$.

Indication — On rappelle que la base canonique $\left(E_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une famille orthonormée (C13.38). Toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ se décompose dans la base canonique en

$$(\star) \qquad A = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} [A]_{i,j} . E_{i,j} .$$

(a) En utilisant $(\star)$, déterminer une famille génératrice de F.
(b) D'après C13.55, une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ appartient à $F^\perp$ si et seulement si elle est orthogonale à chacun des vecteurs de la base de F déterminée en (a). Utiliser de nouveau $(\star)$ pour déterminer $F^\perp$.

C13.59. Proposition (Orthogonal de l'orthogonal) Si F est un sous-espace vectoriel de E alors $F \subset \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$.

C13.60. Attention L'inclusion réciproque dans C13.59 n'est pas nécessairement vraie, d'après les deux exercices ci-dessous. Cependant, lorsque F est **de dimension finie** $F \subset \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$. Nous le démontrerons plus tard (cf. C13.89).

C13.61. Exercice Soient $a < b$ deux nombres réels. On munit $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique (cf. C13.11). Soit F l'ensemble des fonctions polynomiales sur $[0,1]$, i.e.

$$F := \operatorname{Vect}\left(\left(f_n \;\middle|\; \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right).$$

Déterminer $F^{\perp}$ puis comparer $F = \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$.

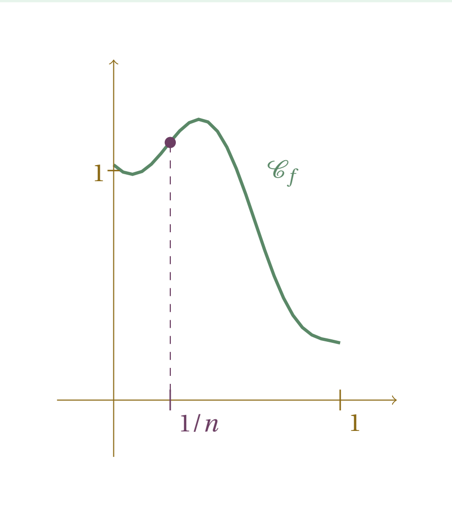
Indication : Considérer une fonction $g \in F^{\perp}$, i.e. une fonction orthogonale à toutes les fonctions polynomiales sur $[0,1]$. Grâce au théorème d'approximation polynomiale de Weierstraß, en déduire que g est orthogonale à toutes les fonctions de $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

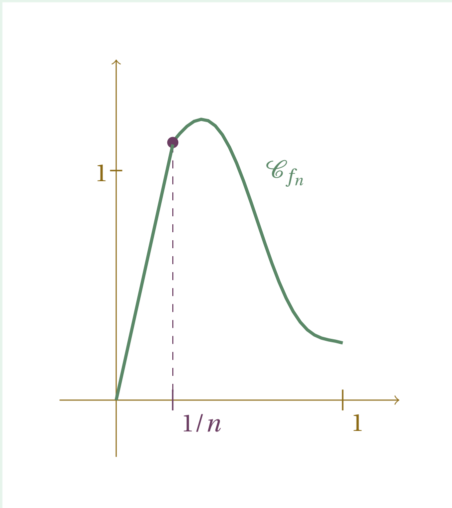
C13.62. Exercice On munit $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique (cf. C13.11).

(a) Démontrer que $F = \left\{f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \;:\; f(0) = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

(b) Déterminer $F^{\perp}$ puis comparer $F = \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$.

Indication : **(a)** Critère pour qu'une partie de $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ soit un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.
(b) Considérer une fonction $g \in F^{\perp}$, i.e. une fonction orthogonale à toutes les fonctions de F. Démontrer que g est orthogonale à une fonction f quelconque de $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, en considérant, pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$, la fonction $f_n \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que f_n coïncide avec f sur $[1/n, 1]$, $f_n(0) = 0$ et f_n est affine sur $[0, 1/n]$.





C13.63. Exercice Soient F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.

(a) Démontrer que $F_1^{\perp} \cap F_2^{\perp} = (F_1 + F_2)^{\perp}$.

(b) Démontrer que $F_1^{\perp} + F_2^{\perp} \subset (F_1 \cap F_2)^{\perp}$.

Indication : **(a)** $\boxed{\subset}$ Soit $x \in F_1^{\perp} \cap F_2^{\perp}$. Démontrer que x est orthogonal à tout vecteur de $F_1 + F_2$, i.e. pour tout $(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$, $\langle x\,,\, x_1 + x_2 \rangle = 0$.
(a) $\boxed{\subset}$ Soit $x \in (F_1 + F_2)^{\perp}$. Démontrer que x est orthogonal à tout vecteur de F_1 et à tout vecteur de F_2, i.e. pour tout $(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$, $\langle x\,,\, x_1 \rangle = 0$ et $\langle x\,,\, x_2 \rangle = 0$.
(b) Soit $x \in F_1^{\perp} + F_2^{\perp}$. Ainsi, il existe $(x_1, x_2) \in F_1^{\perp} \perp F_2^{\perp}$ tel que $x = x_1 + x_2$. Démontrer que x est orthogonal à tout vecteur de $F_1 \cap F_2$, i.e. pour tout $y \in F_1 \cap F_2$, $\left\langle x_1 + x_2\,,\, y \right\rangle = 0$.

C13.64. Exercice On munit $E := \mathscr{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$, muni de son produit scalaire canonique (cf. C13.11). On pose

$$F_1 = \left\{f \in E \;:\; \forall x \in [-1,0],\ f(x) = 0\right\} \qquad \text{et} \qquad F_2 = \left\{f \in E \;:\; \forall x \in [0,1],\ f(x) = 0\right\}.$$

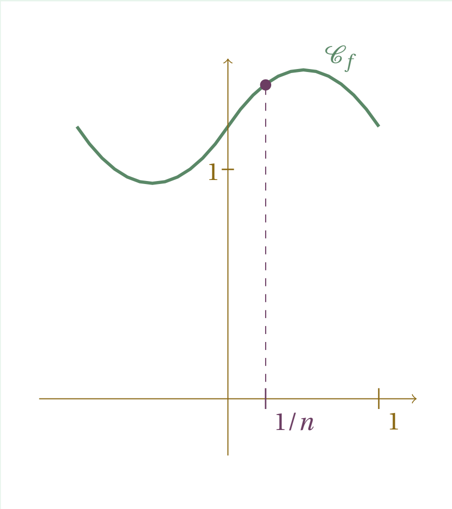
(a) Démontrer : $F_1^{\perp} = F_2$.

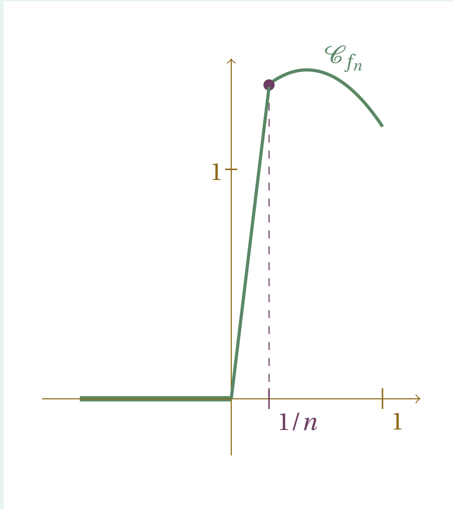
(b) Démontrer : $F_2^{\perp} = F_1$.

(c) Justifier : $F_1^{\perp} + F_2^{\perp} \neq (F_1 \cap F_2)^{\perp}$.

Indication

(a) $\boxed{\supset}$ Soit $f \in F_2$. Démontrer que la fonction f est orthogonale à toute fonction de F_1, i.e. pour tout $g \in F_1$, $\langle f, g \rangle = 0$.
(a) $\boxed{\subset}$ Considérer une fonction $f \in F_1^\perp$, i.e. une fonction orthogonale à toutes les fonctions de F_1. Démontrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = 0$, en considérant, pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$, la fonction $f_n : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que f_n est nulle sur $[-1,0]$, f_n coïncide avec f sur $[1/n, 1]$, et f_n est affine sur $[0, 1/n]$.





(b) Analogue à (a).

(c) Calculer $F_1 \cap F_2$ et en déduire $(F_1 \cap F_2)^\perp$. Justifier que la restriction de la fonction carrée sur $[-1,1]$ appartient à $F_1 + F_2$. On pourrait plus généralement établir que $F_1 + F_2 = \{f \in E : f(0) = 0\}$.

§ 9 Espaces euclidiens et bases orthonormales d'un tel

C13.65. Définition (Espace euclidien) Un espace préhilbertien **de dimension finie** est appelé espace euclidien.

C13.66. Définition (Base orthogonale, base orthonormale) Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

1. On dit que $\mathscr{B}$ est une base orthogonale si la famile $\mathscr{B}$ est orthogonale, i.e. si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \qquad i \neq j \Longrightarrow \langle e_i, e_j \rangle = 0\,.$$

2. On dit que $\mathscr{B}$ est une base orthonormale si la famile $\mathscr{B}$ est orthonormale, i.e. si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \qquad \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}\,.$$

C13.67. Exercice Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. Que dire d'une famille orthonormale $(x_1, \dots, x_n)$ formée de n vecteurs de E ?

Indication

Cf. C13.40.

C13.68. Définition (Vecteur normalisé d'un vecteur non nul) Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et $||\cdot||$ la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Le vecteur normalisé d'un vecteur x non nul de E est

$$\frac{1}{||x||}.x\,.$$

Il est colinéaire à x, de même sens et de norme 1.

C13.69. Théorème (Existence d'une base orthonormale d'un espace euclidien) Tout espace euclidien possède une base orthonormale.

Le théorème C13.69 se déduit de la proposition suivante, qui fournit un mode de construction explicite d'une base orthonormale d'un espace euclidien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ à partir d'une base quelconque de E.

C13.70. Proposition (Algorithme d'orthonormalisation de Schmidt) Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. On construit une famille $\left(\varepsilon'_1,\dots,\varepsilon'_n\right)$ de vecteurs de E de proche en proche comme suit.

- ε'_1 est le vecteur normalisé de $\varepsilon_1 := e_1$.
- Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$

$$\varepsilon'_{i+1} \text{ est le vecteur normalisé de } \varepsilon_{i+1} := e_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} \left\langle e_{i+1}, \varepsilon'_k \right\rangle \varepsilon'_k .$$

Alors :

(a) la famille $(\varepsilon'_1,\dots,\varepsilon'_n)$ est bien définie et forme une base orthonormale de E ;
(b) pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\varepsilon'_i \in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_i)$;
(c) pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ la i-ième coordonnée de ε'_i dans la base $(e_1,\dots,e_n)$ est un nombre réel strictement positif.

Démonstration

Pierre angulaire. Commençons par démontrer que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$

$$\mathscr{P}(i) \left| \begin{array}{ll} (\alpha_i) & \forall\, j \in [\![1,i]\!],\ \varepsilon'_j \text{ existe} \\ (\beta_i) & \forall\, j \in [\![1,i]\!],\ \varepsilon'_j \in \mathrm{Vect}\left(e_1,\dots,e_j\right) \\ (\gamma_i) & \left(\varepsilon'_1,\dots,\varepsilon'_i\right) \text{ est une famille orthonormée.} \end{array}\right.$$

en raisonnant par récurrence finie.

— *Initialisation à $i=1$.*
(α_1) Comme $(e_1,\dots,e_n)$ est libre, le vecteur e_1 est non nul donc $\varepsilon'_1 := \dfrac{1}{\|e_1\|}.e_1$ est bien défini.
(β_1,γ_1) Il est clair que $\varepsilon'_1 \in \mathrm{Vect}(e_1)$ et que $\|\varepsilon'_1\| = 1$

— *Hérédité.* Soit $i \in [\![1,n-1]\!]$ tel que $\mathscr{P}(i)$ est vraie, i.e. tel que (α_i), (β_i) et (γ_i) sont vraies.
(α_{i+1}) D'après (α_i), les vecteurs $\varepsilon'_1,\dots,\varepsilon'_i$ et donc le vecteur $\varepsilon_{i+1} := e_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} \left\langle e_{i+1}, \varepsilon'_k \right\rangle \varepsilon'_k$ est bien défini. Si ε_{i+1} était nul, (β_i) impliquerait

$$e_{i+1} = \sum_{k=1}^{i} \underbrace{\left\langle e_{i+1}, \varepsilon'_k \right\rangle \varepsilon'_k}_{\in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k) \subset \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_i)} \in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_i)$$

et la famille $(e_1,\dots,e_n)$ serait liée, ce qui n'est pas. Comme $\varepsilon_{i+1} \neq 0_E$, le vecteur $\varepsilon'_{i+1} := \dfrac{1}{\|\varepsilon_{i+1}\|}.\varepsilon_{i+1}$ est bien défini.
(β_{i+1}) Toujours d'après (β_i)

$$\varepsilon_{i+1} := \underbrace{e_{i+1}}_{\in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{i+1})} - \sum_{k=1}^{i} \underbrace{\left\langle e_{i+1}, \varepsilon'_k \right\rangle \varepsilon'_k}_{\in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k) \subset \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{i+1})} \in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{i+1}) .$$

Le vecteur $\varepsilon'_{i+1} := \dfrac{1}{\|\varepsilon_{i+1}\|}.\varepsilon_{i+1}$ appartient donc également à $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{i+1})$.
(γ_{i+1}) Soit $j \in [\![1,i]\!]$. Démontrons que $\left\langle \varepsilon'_{i+1}, \varepsilon'_j \right\rangle = 0$ ou, de manière équivalente, $\left\langle \varepsilon_{i+1}, \varepsilon'_j \right\rangle = 0$. D'après (γ_i)

$$\left\langle \varepsilon_{i+1}, \varepsilon'_j \right\rangle = \left\langle e_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} \left\langle e_{i+1}, \varepsilon'_k \right\rangle \varepsilon'_k, \varepsilon'_j \right\rangle \underset{(\mathrm{LG})}{=} \left\langle e_{i+1}, \varepsilon'_j \right\rangle - \underbrace{\sum_{k=1}^{i} \left\langle e_{i+1}, \varepsilon'_k \right\rangle \underbrace{\left\langle \varepsilon'_k, \varepsilon'_j \right\rangle}_{=\delta_{k,j}}}_{=\left\langle e_{i+1}, \varepsilon'_j \right\rangle} = 0 .$$

Enfin, le vecteur $\varepsilon'_{i+1} := \dfrac{1}{\|\varepsilon_{i+1}\|}.\varepsilon_{i+1}$ est de norme 1.

(a) D'après ce qui précède, la famille $(\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_n)$ est bien définie et forme une famille orthonormale de E. Comme elle est libre (orthogonale, formée de vecteurs non nuls) et comme elle contient $n = \dim(E) < \infty$ vecteurs, $(\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_n)$ est une base orthonormale de E.
(b) Cette assertion correspond à (β_n) qui est déjà établie.
(c) Comme $\varepsilon'_1 := \frac{1}{||e_1||}.e_1$, la première coordonnée de ε'_1 dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est $\frac{1}{||e_1||} > 0$.
Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$. D'après (b),

$$\varepsilon_{i+1} := e_{i+1} - \underbrace{\sum_{k=1}^{i} \underbrace{\langle e_{i+1}, \varepsilon'_k \rangle \varepsilon'_k}_{\in \mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_k) \subset \mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_i)}}_{\in \mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_i)}.$$

La $(i+1)$-ième composante de ε_{i+1} dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est donc 1. Par suite, la $(i+1)$-ième composante de $\varepsilon'_{i+1} := \frac{1}{||\varepsilon_i||}.\varepsilon_i$ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est $\frac{1}{||\varepsilon_i||} > 0$.

C13.71. Calcul pratique d'une base orthonormée d'un espace euclidien Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, muni d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$.
Le calcul de la base orthonormée $(\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_n)$ de E donnée par l'algorithme de Schmidt C13.70 nécessite de normer les vecteurs $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ à chaque étape, d'où de multiples extractions de racines carrées qui peuvent alourdir les calculs.
Il est souvent préférable de d'abord calculer tous les vecteurs $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, sans les normer à chaque étape, afin d'obtenir la base orthogonale $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de E. En normant chacun des vecteurs $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ en toute fin de calcul, on obtiendra la base orthonormée $(\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_n)$ de E désirée.
En analysant l'algorithme de Schmidt C13.70, il vient $\boxed{\varepsilon_1 = e_1}$ et pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$

$$\varepsilon_{i+1} := e_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} \langle e_{i+1}, \varepsilon'_k \rangle \varepsilon'_k = e_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} \left\langle e_{i+1}, \frac{1}{||\varepsilon_k||}.\varepsilon_k \right\rangle \frac{1}{||\varepsilon_k||} \varepsilon_k \underset{(LD)}{=} e_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} \langle e_{i+1}, \varepsilon_k \rangle \frac{1}{||\varepsilon_k||^2} \varepsilon_k$$

d'où $\boxed{\varepsilon_{i+1} = e_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} \frac{\langle e_{i+1}, \varepsilon_k \rangle}{\langle \varepsilon_k, \varepsilon_k \rangle}.\varepsilon_k}$ ce qui permet un calcul des vecteurs $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ de proche en proche, sans extraction de racine carrée.

C13.72. Exercice On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire usuel (cf. C13.6). On pose $u := (1,1,1,1)^\perp$.
(a) Déterminer une base $\mathscr{B}$ de $F := \mathrm{Vect}(u)^\perp$.
(b) Appliquer l'algorithme d'orthonormalisation de Schmidt à la base $\mathscr{B}$ de F déterminer en (a) pour obtenir une base orthonormée de $F^\perp$.

Indications

(a) D'après C13.55, un vecteur (x, y, z, t) de $\mathbb{R}^4$ appartient à F si et seulement si $(x, y, z, t) \perp u$. Résoudre alors l'équation linéaire qui apparaît pour déterminer une famille génératrice de F.
(b) Appliquer l'algorithme d'orthonormalisation de Schmidt C13.70 à la base $\mathscr{B}$ de F ou sa variante plus commode à mettre en œuvre C13.71.

C13.73. Exercice Soit $\mathscr{B}_0 = (e_1, \ldots, e_n)$ une base d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ et soit $\mathscr{B} := (\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_n)$ la base orthonormale de E obtenue en lui appliquant l'algorithme d'orthonormalisation de Schmidt. Que dire de la matrice de passage de la base $\mathscr{B}_0$ à la base $\mathscr{B}$?

Indications

Interpréter les propriétés (b) et (c) de C13.70 en termes de certains des coefficients de la matrice $P_{\mathscr{B}_0 \to \mathscr{B}}$.

C13.74. Exercice Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \longmapsto & \langle P, Q \rangle := \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k). \end{array} \right.$$

(a) Vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
(b) Déterminer une une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$, pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ introduit en début d'énoncé (en spécialisant n à 2).

Indications

(a) Vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ satisfait les propriétés (LD), (Sym), (Pos) et (Déf). Pour établir (Déf), on sera amené à réfléchir à la question suivante. Que dire d'un polynôme de degré inférieur ou égal à n possédant $(n+1)$ racines deux-à-deux distinctes ?
(b) Appliquer l'algorithme d'orthonormalisation de Schmidt C13.70 à la base canonique $\left(1, X, X^2\right)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ ou sa variante plus commode à mettre en œuvre C13.71. Il est aussi possible de déterminer une une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ en s'appuyant uniquement sur des polynômes interpolateurs de Lagrange » bien choisis ».

C13.75. Exercice On définit l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ par

$$\langle\cdot,\cdot\rangle \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})\times\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f,g) & \longmapsto & \langle f, g\rangle := \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t\,. \end{array}\right.$$

(a) Vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
(b) Soient les applications f_0, f_1, f_2 définie par

$$f_0 \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array}\right. \qquad f_1 \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}\right. \qquad f_2 \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x)\,. \end{array}\right.$$

Déterminer une base orthonormale de $F := \mathrm{Vect}\left(f_0, f_1, f_2\right)$.

Indications

(a) Vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ satisfait les propriétés (LD), (Sym), (Pos) et (Déf), en adaptant les arguments donnés en C13.11.
(b) Vérifier que (f_0, f_1, f_2) forme une base de F, puis lui appliquer l'algorithme d'orthonormalisation de Schmidt C13.70 ou sa variante plus commode à mettre en œuvre C13.71.

C13.76. Proposition (Coordonnées d'un vecteur dans une BON) Soient $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale d'un espace euclidien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ et $x \in E$. Alors

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle . e_i \quad \text{i.e.} \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} \langle x, e_1\rangle \\ \vdots \\ \langle x, e_n\rangle \end{pmatrix}.$$

Démonstration

Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$, de sorte que

$$\text{(i)} \quad x = \sum_{k=1}^n x_k . e_k\,.$$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

$$\text{(ii)} \quad \langle x, e_i\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n x_k . e_k, e_i \right\rangle \underset{\text{(LG)}}{=} \sum_{k=1}^n x_k \underbrace{\langle e_k, e_i\rangle}_{=\delta_{k,i}} = x_i\,.$$

De (i) et (ii) on déduit $x = \sum_{i=1}^n x_i . e_i = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle . e_i$.

C13.77. Proposition (Expression du produit scalaire et de la norme via les coordonnées dans une BON) Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien, $||\cdot||$ la norme associée au produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E et $(x, y) \in E^2$. Notons $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ les coordonnées respectives de x et y dans la base orthonormale $\mathscr{B}$. Alors

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i\, y_i \qquad \text{et} \qquad ||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\,.$$

Démonstration

On démontre la première formule, la seconde en étant une spécialisation.

Comme $x = \sum_{i=1}^{n} x_i . e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{n} y_j . e_j$ (bien noter le changement du nom de l'indice)

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i . e_i \, , \, \sum_{j=1}^{n} y_j . e_j \right\rangle \underset{\text{(LG),(LD)}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i \underbrace{\sum_{j=1}^{n} y_j \underbrace{\langle e_i , e_j \rangle}_{=\delta_{i,j}}}_{y_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i \, .$$

C13.78. EXERCICE Soient $(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ un espace euclidien, $|| \cdot ||$ la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot , \cdot \rangle$, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E et $(x, y) \in E^2$. Démontrer

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle \qquad \text{et} \qquad || x || = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2} \, .$$

Indication Cf. C13.76 et C13.77.

C13.79. PROPOSITION (EXPRESSION MATRICIELLE DU PRODUIT SCALAIRE IA LES COORDONNÉES DANS UNE BON)
Soient $(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ un espace euclidien, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E et $(x, y) \in E^2$. Notons $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y)$ les matrices des coordonnées x et y dans la base $\mathscr{B}$. Alors

$$\langle x, y \rangle = X^\top \, Y \, .$$

Démonstration

Notons $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. On calcule alors $X^\top \, Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ qui égale $\langle x, y \rangle$ d'après C13.77.

C13.80. EXERCICE Soient $(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ un espace euclidien, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E et $u \in \mathscr{L}(E)$. Exprimer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ de u dans la base $\mathscr{B}$ et la trace $\mathrm{Tr}(u)$ de u à l'aide des produits scalaires $\langle e_j , u(e_i) \rangle$, où $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

Indication

La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est la matrice de format $n \times n$ dont, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la j-ème colonne est la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u(e_j))$ des coordonnées du vecteur $u(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u(e_1)) & & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u(e_n)) \end{array} \\ \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} * & \ldots & * \\ \vdots & & \vdots \\ * & \ldots & * \end{pmatrix} & \begin{array}{c} / e_1 \\ \vdots \\ / e_n \end{array} \end{array} \end{array}$$

Cf. C13.76.

C13.81. THÉORÈME (DE REPRÉSENTABILITÉ DE RIESZ) Soient $(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $\varphi \in E^* := \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$. Alors

$$\exists ! \, a \in E, \quad \forall x \in E, \quad \varphi(x) = \langle a, x \rangle \, .$$

C13.82. EXERCICE Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer qu'il existe $n+1$ réels $a_0, \ldots, a_n$ tels que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$\int_0^1 P(t) \, dt = \sum_{k=0}^{n} a_k P(k) \, .$$

Indication

Considérer de nouveau le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\mathbb{R}_n[X]$ introduit en C13.74, vérifier que l'application

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 P(t)\, dt \end{array} \right.$$

est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$, puis cf. C13.81.

§ 10 Projection sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

Dans toute cette partie, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ désigne un espace préhilbertien et on note $||\cdot||$ la norme associée au produit scalaire. On ne suppose plus E de dimension finie (i.e. E n'est pas nécessairement euclidien). En revanche on imposera parfois une hypothèse de finitude sur la dimension de sous-espaces vectoriels considérés.

C13.83. Proposition-Définition (Projeté orthogonal d'un vecteur sur un sous-espace de dimension finie)

Soient F un sous-espace vectoriel **de dimension finie** de E et $x \in E$.

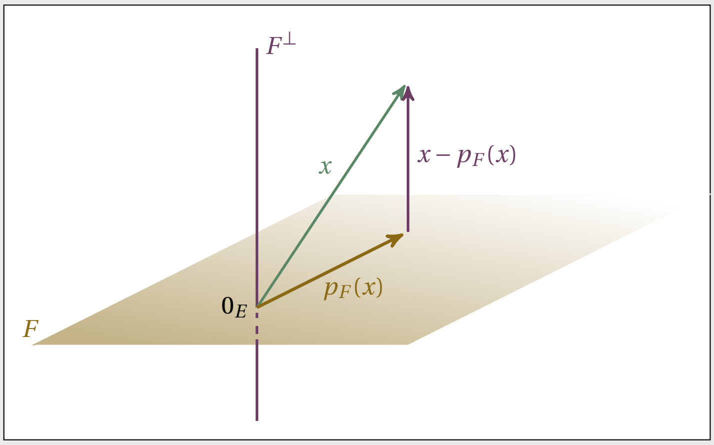
(a) Il existe un unique vecteur y de E tel que

$$y \in F \quad \text{et} \quad x - y \in F^{\perp}.$$

Ce vecteur y est noté $p_F(x)$ et est appelé **projeté orthogonal de x sur F.**

(b) Si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base orthonormale de F

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle\, e_i$$



C13.84. Théorème (Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie) Soit F un sous-espace vectoriel **de dimension finie** de E.

(a) L'application :

$$p_F \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & p_F(x) \text{ qui est l'unique vecteur } y \in F \text{ tel que } x - y \in F^{\perp} \end{array} \right.$$

est un projecteur orthogonal, appelé projection orthogonale de E sur F.

(b) $\operatorname{Ker}(p_F) = F^{\perp}$ et $\operatorname{Im}(p_F) = \operatorname{Ker}(p_F - \mathrm{id}_E) = F$.

(c) Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de F, alors

$$p_F \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle\, e_i\,. \end{array} \right.$$

C13.85. Exercice Soit $E = \mathscr{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$. On définit l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \left| \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f, g) & \longmapsto & \langle f, g \rangle := \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(t) g(t)}{\sqrt{1 - t^2}}\, \mathrm{d}t\,. \end{array} \right.$$

(a) Démontrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien définie.

(b) Démontrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini un produit scalaire sur E.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer qu'il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$. Le polynôme T_n est appelé n-ième polynôme de Tchebychev.

(d) Démontrer que la famille $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale.

(e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $F_n := \operatorname{Vect}(T_0, \ldots, T_n)$. Déterminer la projection orthogonale d'une fonction $f \in E$ sur F_n.

Indication

(a) Soit $(f,g) \in E^2$. Il s'agit de démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ converge. Déterminer le domaine I d'intégration, justifier la régularité de l'intégrande $t \longmapsto \dfrac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ sur I, puis prouver l'intégrabilité de celle-ci au voisinage de chacune des singularités éventuelles.
(b) Démontrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ vérifie les propriétés (LD), (Sym), (Pos) et (Déf) en adaptant les arguments donnés en C13.11. Pour (Déf), on prendra bien soin de démontrer qu'une fonction $f \in E$ vérifiant $\langle f, f \rangle = 0$ est non seulement nulle sur $]-1,1[$ mais encore sur $[-1,1]$.
(c) Existence Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\cos(n\theta) = \mathrm{Re}\left(e^{in\theta}\right) = \mathrm{Re}\left(\left(e^{i\theta}\right)^n\right) = \mathrm{Re}\left((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n\right) = \ldots$$

(c) Unicité Considérer deux polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $P(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ et $Q(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$. Que dire de $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(P-Q)$?
(d) Soient deux entiers naturels n et m distincts. Il s'agit de démontrer que $\langle T_n, T_m \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{T_n(t)T_m(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = 0$. Un changement de variable en lien avec la définition des polynômes de Tchebychev pourra aider.
(e) Déduire de (d) une base orthonormée de F_n, puis cf. C13.83.

C13.86. Corollaire (Somme directe d'un sous-espace de dimension finie et de son orthogonal) Soit F un sous-espace vectoriel **de dimension finie** de E. Alors $E = F \oplus F^\perp$.

C13.87. Attention **Si F n'est pas de dimension finie, $F^\perp$ n'est pas nécessairement un supplémentaire de F dans E.**
Dans l'exercice C13.61 , nous avions considéré $a < b$ deux nombres réels, $E = \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique (cf. C13.11) et F l'ensemble des fonctions polynomiales sur $[0,1]$, i.e.

$$F := \mathrm{Vect}\left(\left(f_n \left| \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}\right.\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$$

pour établir $F^\perp = \{0_E\}$. L'identité $E = F \oplus F^\perp$ livrerait donc $E = F$, i.e. que toute fonction continue sur $[-1,1]$ est polynomiale, ce qui n'est pas.

C13.88. Exercice On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire usuel (C13.6). On pose $F := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x - 2y + 3z = 0\right\}$ et p_F la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur F.
(a) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, en donner une base et préciser sa dimension.
(b) Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Calculer $p_F(u)$ en fonction de x, y et z.
(c) Donner la matrice de p_F dans la base canonique $\mathscr{B}_0 = (e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1))$ de $\mathbb{R}^3$.

Indication

(a) Résoudre l'équation linéaire dont F est l'ensemble solution pour en déterminer une famille génératrice.
(b) Première méthode Appliquer l'algorithme d'orthonormalisation de Schmidt C13.70 à la base de F obtenue en (a) ou sa variante plus commode à mettre en œuvre C13.71. Calculer ensuite $p_F(u)$ grâce à la formule du projeté orthogonal C13.83(b).
(b) Deuxième méthode Calculer $\dim(F^\perp)$ à l'aide de C13.86 et déterminer une base de $F^\perp$. En raisonnant par analyse et synthèse, déterminer un vecteur $u_1 = (x_1, y_1, z_1) \in F$ et un vecteur $u_2 \in F^\perp$ tels que $u = u_1 + u_2$, en fonction de x, y et z. Par définition de $p_F(u)$, $p_F(u) = u_1$.
(c) De (b) déduire $p_F(e_1)$, $p_F(e_2)$ et $p_F(e_3)$ …

C13.89. Corollaire (Orthogonal de l'orthogonal pour un sous-espace de dimension finie) Soit F un sous-espace vectoriel **de dimension finie** de E. Alors $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.

C13.90. Attention **Si F n'est pas de dimension finie, F peut être strictement inclus dans $\left(F^\perp\right)^\perp$.** Cf. C13.60, C13.61 et C13.62.

C13.91. Exercice (Complément à l'exercice C13.63) Soient F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Dans C13.63, nous avons établi
(a) $F_1^\perp \cap F_2^\perp = (F_1 + F_2)^\perp$
(b) $F_1^\perp + F_2^\perp \subset (F_1 \cap F_2)^\perp$.

Dans l'exercice C13.64, nous avons vu que l'inclusion réciproque de (b) n'est pas nécessairement vraie.
Démontrer que, **dans le cas où E est de dimension finie**, alors $F_1^{\perp} + F_2^{\perp} = (F_1 \cap F_2)^{\perp}$.

Indication — Appliquer (a) en spécialisant F_1 et F_2 à d'autres sous-espaces vectoriels de E, puis C13.89.

§ 11 Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel

Dans le début de cette partie, nous fixons un espace vectoriel normé $(E, ||\cdot||)$.

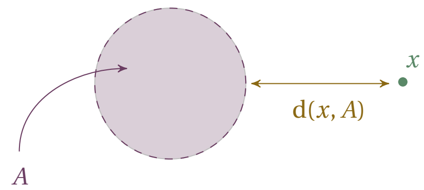
C13.92. Définition (Distance d'un vecteur à une partie non vide d'un espace vectoriel normé) Soient A une partie non vide de E et $x \in E$. On définit la distance de x à A par

$$\mathrm{d}(x, A) := \inf_{a \in A} ||x - a|| \,.$$

C13.93. Exemple
Si A est une partie non vide de E et $x \in E$, alors la distance de x à A n'est pas nécessairement atteinte, i.e. il peut n'exister aucun $a_0 \in A$ tel que

$$||x - a_0|| = \mathrm{d}(x, A)\,.$$

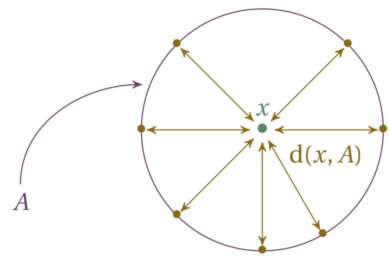
C'est par exemple le cas lorsque A est une boule ouverte B et x est un point en dehors de l'adhérence $\overline{B}$ de B.



C13.94. Exemple
Si A est une partie non vide de E et $x \in E$, alors la distance de x à A peut être atteinte en une infinité de points i.e. l'ensemble

$$\{a_0 \in A \,:\, ||x - a_0|| = \mathrm{d}(x, A)\}$$

peut être infini. C'est par exemple le cas, lorsque A est une sphère de rayon strictement positif et x le centre de la sphère.



C13.95. Exercice Si A est une partie non vide de E l'application

$$\mathrm{d}(\cdot, A) \left| \begin{array}{ccc} (E, ||\cdot||) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ x & \longmapsto & \mathrm{d}(x, A) := \inf_{a \in A} ||x - a|| \end{array} \right.$$

est 1-lipschitzienne.

Indication — Soient $(x, y) \in E^2$ et $a \in A$. Comme $||x - a|| \leqslant \big|\big|x - y\big|\big| + \big|\big|y - a\big|\big|$, il vient $\mathrm{d}(x, A) \leqslant \big|\big|x - y\big|\big| + \big|\big|y - a\big|\big|$ puis

$$\underbrace{\mathrm{d}(x, A) - \big|\big|x - y\big|\big|}_{\text{indépendant de } a \in A} \leqslant \big|\big|y - a\big|\big| \ldots$$

Dans la suite de cette partie, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ désigne à présent un espace préhilbertien et on note $||\cdot||$ la norme associée au produit scalaire.

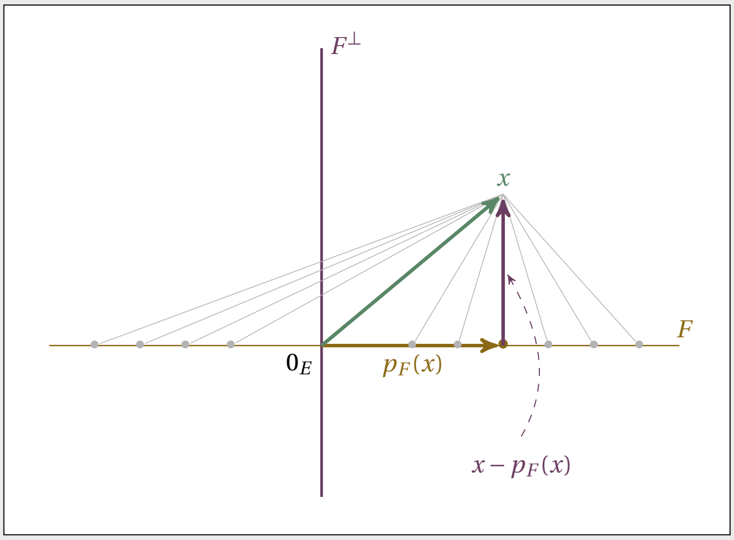
C13.96. PROPOSITION (DISTANCE D'UN VECTEUR À UN SOUS-ESPACE VECTORIEL DE DIMENSION FINIE)

Soient F un sous-espace vectoriel **de dimension finie** de E et $x \in E$. On note $p_F : E \longrightarrow E$ la projection orthogonale de E sur F.

(a) $\mathrm{d}(x, F) = \left|\left| x - p_F(x) \right|\right|$

(b) $\forall y \in F, \quad y \neq p_F(x) \Longrightarrow \left|\left| x - y \right|\right| > \mathrm{d}(x, F)$

(c) $||x||^2 = \left|\left| p_F(x) \right|\right|^2 + \mathrm{d}(x, F)^2$



C13.97. EXERCICE On définit l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t\,. \end{array} \right.$$

(a) Démontrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien définie.
(b) Démontrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
(c) Calculer $\left\langle X^p, X^q \right\rangle$, pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.
(d) Déterminer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} e^{-t} \left(t^2 - (at + b)\right)^2 \mathrm{d}t$.

Indication

(a) Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$. Il s'agit de démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$ converge. Justifier la régularité de l'intégrande $t \longmapsto P(t)\, Q(t)\, e^{-t}$ sur $[0, +\infty[$, puis prouver l'intégrabilité de celle-ci au voisinage de $+\infty$.
(b) Démontrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ vérifie les propriétés (LD), (Sym), (Pos) et (Déf) en adaptant les arguments donnés en C13.11. Pour (Déf), on prendra bien soin de démontrer qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $\langle P, P \rangle = 0$ est le polynôme nul et non la fonction nulle sur $[0, +\infty[$.
(c) Poser, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n := \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$. Calculer I_0 et déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n. Conjecturer la valeur de I_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et la démontrer.
(d) Observer

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} e^{-t} \left(t^2 - (at + b)\right)^2 \mathrm{d}t = \inf_{P \in \mathbb{R}_1[X]} \int_0^{+\infty} e^{-t} \left(t^2 - P(t)\right)^2 \mathrm{d}t = \inf_{P \in \mathbb{R}_1[X]} \left|\left| X^2 - P \right|\right|^2.$$

Il s'agit alors essentiellement de calculer le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$, d'après C13.96. On pourra commencer par déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_1[X]$ …

§ 12 INÉGALITÉ DE BESSEL ET SUITES TOTALES

Dans cette partie, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ désigne à présent un espace préhilbertien et on note $||\cdot||$ la norme associée au produit scalaire.

C13.98. THÉORÈME (INÉGALITÉ DE BESSEL)

(a) Soit F un sous-espace vectoriel **de dimension finie** de E. Pour tout $x \in E$, $\left|\left| p_F(x) \right|\right| \leqslant ||x||$.

(b) Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille orthonormale de vecteurs de E. Pour tout $x \in E$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x \rangle^2 \leqslant ||x||^2$.

C13.99. EXERCICE Soient $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormale de vecteurs de E et $x \in E$. Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} \langle x, e_n\rangle^2$ est convergente.

Indication — Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\langle x, e_n\rangle^2 \geqslant 0$, la série $\sum_{n\geqslant 0} \langle x, e_n\rangle^2$ converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. Appliquer l'inégalité de Bessel.

C13.100. DÉFINITION (SUITES TOTALES) Une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est dite totale si le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}\left((e_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est dense dans E.

C13.101. FORMULATION SÉQUENTIELLE DE LA NOTION DE SUITE TOTALE De la caractérisation séquentielle de l'adhérence, nous déduisons qu'une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est totale si et seulement si pour tout $x \in E$, il existe une suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Vect}\left((e_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}}$ (chaque x_p est combinaison linéaire d'un nombre fini des vecteurs $e_0, e_1, \ldots, e_n, \ldots$) telle que $x_p \xrightarrow[p\to+\infty]{||\cdot||} x$, où $||\cdot||$ est la norme associée au produit scalaire.

C13.102. EXERCICE Soient $a < b$ deux réels et $E := \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel (C13.11) et de la norme $||\cdot||$ associée.

(a) Démontrer que la famille

$$\left(f_n \;\middle|\; \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^n \end{array} \right)_{n\in\mathbb{N}}$$

est totale dans E.

(b) Construire une famille totale et orthonormale pour l'espace préhilbertien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Il n'est pas attendu de formules explicites ici.

Indication — **(a)** Le sous-espace $\mathrm{Vect}\left((f_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est le sous-espace vectoriel de E formé par les fonctions polynomiales de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Commencer par justifier que pour tout $f \in E$, $||f|| \leqslant \sqrt{b-a}\, ||f||_{\infty,[a,b]}$.
(b) Cf. Algorithme de Schmidt C13.70.

C13.103. THÉORÈME D'APPROXIMATION DANS UN ESPACE PRÉHIBERTIEN Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite **orthonormale et totale**. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $p_n : E \longrightarrow E$ la projection orthogonale de E sur $\mathrm{Vect}(e_0, \ldots, e_n)$. Pour tout $x \in E$

$$p_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{||\cdot||} x$$

où $||\cdot||$ est la norme associée au produit scalaire, i.e. la série $\sum_{n\geqslant 0} \langle x, e_n\rangle . e_n$ converge dans $(E, ||\cdot||)$ et $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n\rangle . e_n$.

§ 13 UNE SÉLECTION D'EXERCICES

C13.104. EXERCICE (CCINP)

1. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans un espace muni d'un produit scalaire réel.
2. Dans quel cas a-t-on égalité?

C13.105. EXERCICE (CCINP) Soit E un espace euclidien. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

1. Démontrer que $E = F \oplus F^{\perp}$.
2. Démontrer que $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

C13.106. EXERCICE (CCINP) Soit E un espace euclidien. Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E.

1. Démontrer que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
2. Démontrer que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

C13.107. **Exercice (CCINP)** Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que :
$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$
définit un produit scalaire sur E.
2. Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par les fonctions :
$$f : x \longmapsto \cos(x) \qquad \text{et} \qquad g : x \longmapsto \cos(2x)$$
Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2(x)$.

C13.108. **Exercice (CCINP)** Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ engendré par les cinq fonctions :
$$f_1 : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad f_2 : x \longmapsto \cos(x), \qquad f_3 : x \longmapsto \sin(x), \qquad f_4 : x \longmapsto \cos(2x), \qquad f_5 : x \longmapsto \sin(2x)\,.$$
Soit $F = \mathrm{Vect}\big(f_1, f_2, f_3\big)$.

1. Démonter que :
$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$$
définit un produit scalaire sur E.
2. Vérifier que $\langle f_4, f_5\rangle = 0$ et que $||\,f_4\,|| = ||\,f_5\,|| = 1$.
3. Dans cette question, on admet que $\mathscr{B} := (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ est une base orthonormée de E. Déterminer $F^{\perp}$.

C13.109. **Exercice (CCINP)** On définit l'application :
$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (A, B) & \longmapsto & \mathrm{Tr}\big(A^{\top} B\big)\,. \end{array} \right.$$
On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On note :
$$F := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

1. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $F^{\perp}$.
3. Déterminer la projection orthogonale de $J := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $F^{\perp}$.

C13.110. **Exercice (CCINP)** Soit E un espace préhilbertien. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose :
$$\langle A, A'\rangle := aa' + bb' + cc' + dd'$$

1. Démontrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures.

C13.111. **Exercice (CCINP)** Soit E un espace euclidien.

1. Démontrer que si $\varphi \in E^*$, il existe un unique $a \in E$ tel que :
$$\forall x \in E, \quad \varphi(x) = \langle a, x\rangle\,.$$
2. Soit $x_0 \in E$ tel que $||\,x_0\,|| = 1$. On note $\mathrm{Vect}(x_0)$ la droite engendrée par x_0.
   (a) Donner la définition de la projection orthogonale p sur $\mathrm{Vect}(x_0)$.
   (b) Pour tout $x \in E$, il existe un unique $\lambda_x \in \mathbb{R}$ tel que $p(x) = \lambda_x\, x_0$. On définit l'application $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ par :
   $$\forall x \in E, \quad g(x) = \lambda_x\,.$$
   Démontrer que g est une forme linéaire sur E et déterminer l'élément $b \in E$ tel que :
   $$\forall x \in E, \quad g(x) = \langle b, x\rangle\,.$$

C13.112. Exercice Munissons $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire usuel et notons F le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $u = (0,3,1,-1)$ et $v = (1,2,-1,1)$.

1. Déterminer une base orthonormale de F et une base orthonormale de $F^\perp$.
2. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur F parallèlement à $F^\perp$ dans la base canonique.

C13.113. Exercice Munissons $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire usuel et notons F le sous-espace vectoriel d'équations :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & - & y & + & z & - & t & = & 0 \end{array}\right. .$$

1. Déterminer une base orthonormale de F et une base orthonormale de $F^\perp$.
2. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur F parallèlement à $F^\perp$ dans la base canonique.

C13.114. Exercice Munissons $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel et notons F le sous-espace vectoriel d'équations :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. .$$

1. Déterminer une base orthonormale de F et une base orthonormale de $F^\perp$.
2. Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à F dans la base canonique.

C13.115. Exercice Munissons $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\langle \cdot , \cdot \rangle$ défini par :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad \langle P , Q \rangle := \int_0^1 t\, P(t)\, Q(t)\ \mathrm{d}t .$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.
2. Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer la projection orthogonale de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.

C13.116. Exercice Soit $(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n. Soient $a \in E \setminus \{0\}$, $D := \mathrm{Vect}(a)$ et $H := D^\perp$. Exprimer, pour tout $x \in E$, $\mathrm{d}(x,H)$ et $\mathrm{d}(x,D)$ en fonction de $||x||$ et $\langle x , a \rangle$.

C13.117. Exercice Soit $(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien. Soient $(x,y) \in E^2$.

1. Développer :
$$\Big|\Big| \, ||y||^2 x - \langle x , y \rangle \, y \Big|\Big|^2 .$$
2. Retrouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

C13.118. Exercice Soit $(E, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un espace préhilbertien. Soit $\mathscr{B} := (e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires de E telle que :

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle\ e_k .$$

Démontrer que $\mathscr{B}$ est une base orthonormale de E.

C13.119. Exercice Soit $(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Démontrer que :

$$\forall (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \exists x \in E, \quad \forall i \in [\![1,n]\!], \quad \langle x , e_i \rangle = a_i .$$

C13.120. Exercice Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont la matrice dans la base canonique est $\left(x_i\, \overline{x_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Déterminer l'image et le noyau de f.

C13.121. Exercice Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, posons :

$$\langle M , N \rangle = \mathrm{Tr}\left(M^\top N\right) .$$

1. Démontrer que $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Notons $||\cdot||$ la norme associée.
2. Démontrer que l'ensemble des matrices symétriques et l'ensemble des matrices antisymétriques sont en somme directe orthogonale.

C13.122. EXERCICE Matrice de Gram Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien. Étant donnés un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et n vecteurs $x_1, \dots, x_n$, notons :

$$G(x_1, \dots, x_n) := \left(\langle x_i , x_j \rangle\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) .$$

1. Démontrer que $\det G(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ si et seulement si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension n. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de F. Démontrer que pour tout $x \in E$:

$$\mathrm{d}(x, F) = \sqrt{\frac{\det G(e_1, \dots, e_n, x)}{\det G(e_1, \dots, e_n)}} .$$

C13.123. EXERCICE (CCINP) Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien. Soit H un sous-espace vectoriel de E.

1. Soit $v \in E$ tel que $||\, v \,|| = 1$. Démontrer que l'application

$$\Phi \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \langle v , x \rangle \, v \end{array} \right.$$

   est la projection orthogonale de E sur $\mathrm{Vect}(v)$, puis que :

$$\forall x \in E, \quad ||\, \Phi(x) \,|| \leqslant ||\, x \,|| .$$

2. Soit p_H le projecteur orthogonal de E sur H. Démontrer que :

$$\forall x \in E, \quad \left|\left| \, p_H(x) \, \right|\right| \leqslant ||\, x \,|| .$$

3. Soit p un projecteur de E tel que pour tout $x \in E$, $\left|\left| \, p(x) \, \right|\right| \leqslant ||\, x \,||$. En considérant un vecteur x orthogonal à $\mathrm{Ker}\left(p\right)$, vérifier que x et $x - p(x)$ sont orthogonaux. En déduire que p un projecteur orthogonal.

C13.124. EXERCICE (CCINP) On considère le produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad \langle P , Q \rangle := \int_0^1 P(x)\, Q(x) \, \mathrm{d}x .$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $L_n = (X^n (1 - X)^n)^{(n)}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que L_n est de degré n et de coefficient dominant $\dfrac{(-1)^n (2n)!}{n!}$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(1) = P(0) = 0$. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Démontrer que :

$$\langle P' , Q \rangle = - \langle P , Q' \rangle .$$

3. Démontrer que L_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. En déduire que $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.