M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Programme de la journée de révisions n°9 Développements limités

David BLOTTIÈRE

On s'intéresse au comportement local d'une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, i.e. à son comportement autour d'un point fixé a de I. Quand la fonction est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, il existe parmi les fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n une fonction qui approxime au mieux la fonction f. Précisément, il existe un unique $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tels que :

$$\frac{f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k}{(x-a)^n} \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

ce que l'on écrit aussi $f(x) \underset{x \to a}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$ et que l'on nomme « développement limité de f en a à l'ordre n ». Cette notion met en jeu une technique calculatoire particulière qu'il convient de bien maîtriser, en plus de la table des développements limités usuels. Les applications de cette théorie sont nombreuses : études de limites éventuelles, études de continuité et de dérivabilité, recherches d'asymptotes, recherches d'équivalents... Un énoncé de nature global, fondamental, apparait aussi ici : la formule de Taylor avec reste intégral, qui nous permet par exemple d'établir $e = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$.

R9. 1. *Une illustration graphique des développements limités.* — Ci-dessous, on a représenté en rouge une portion du graphe de la fonction :

$$x \longmapsto \ln(1+x)$$

et en doré des portions des courbes représentatives des polynômes de Taylor de cette fonction en $x = 0$ pour les ordres 1,2,3.

Ordre 1

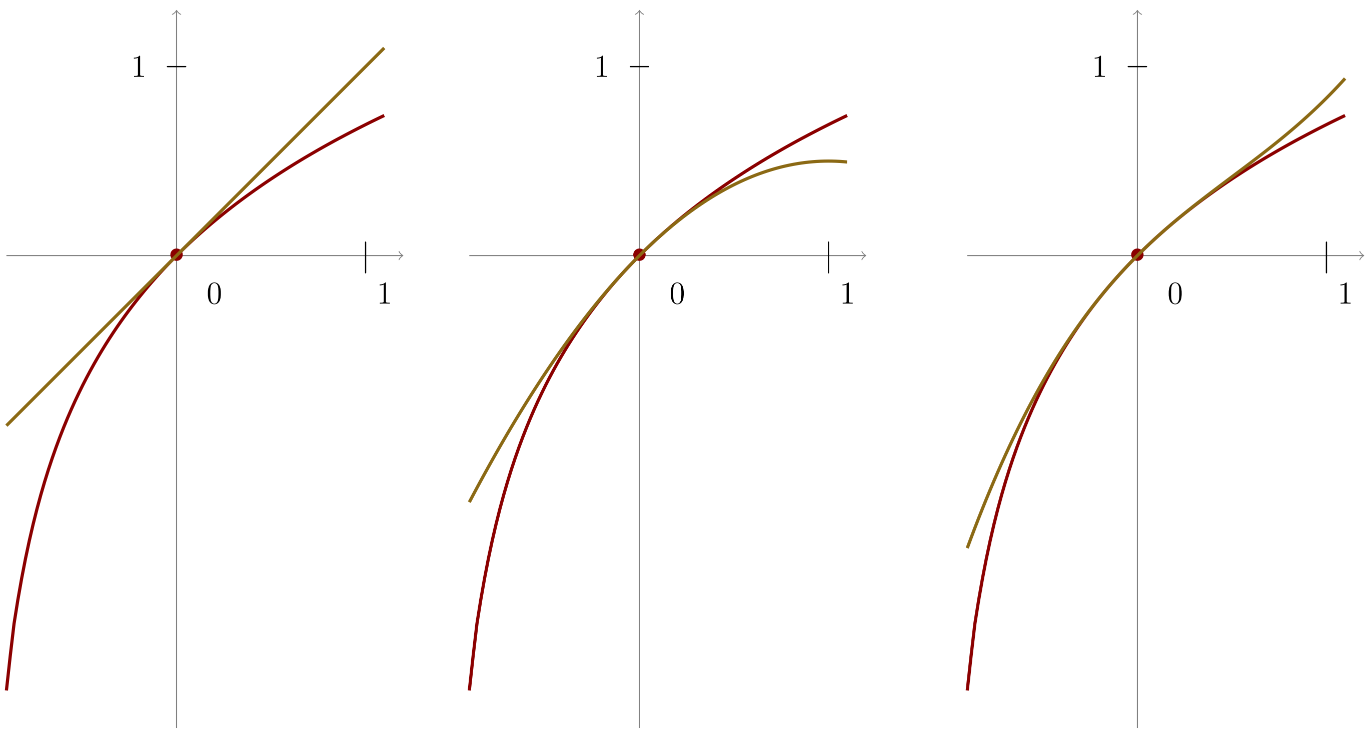
$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x + \mathrm{o}\,(x)$$

Ordre 2

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\,(x^2)$$

Ordre 3

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}\,(x^3)$$



On observe que la qualité de l'approximation croit avec l'ordre.

R9. 2. *Travail sur le cours.* — Le document support est le polycopié de cours sur les développements limités [PDF].

On commencera par revoir les fonctions polynomiales, en prenant le temps de confronter ces objets avec les polynômes. Quand le corps est infini (nous verrons des exemples de corps finis dans l'année), on peut confondre polynômes et fonctions polynomiales sans risque. Les Propriétés 3 et 4 du document support devront être travaillées (énoncés et, bien sûr, démonstrations).

Viendra ensuite le temps de s'intéresser à l'approximation d'une fonction « suffisamment régulière » par une fonction polynomiale, en précisant ce qu'on entend par « approximation ».

Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, $a \in I$, $n \in \mathbf{N}$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbf{C})$. On introduit le polynôme de Taylor d'ordre n de f en a :

$$T_{n,a} := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(X-a)^k$$

et le reste d'ordre n de f en a, $R_{n,a} \in \mathcal{F}(I, \mathbf{C})$, défini par :

$$\forall\, x \in I \quad R_{n,a}(x) = f(x) - T_{n,a}(x)$$

de sorte que :

$$\forall\, x \in I \quad f(x) = T_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)\ .$$

On dispose alors de trois propriétés, qui apportent une information sur $R_{n,a}$.

(A) Formule de Taylor avec reste intégral

$$\forall\, x \in I \quad R_{n,a}(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t\ .$$

On la démontre classiquement par récurrence, à l'aide d'une intégration par parties (cette démonstration doit être sue et comprise). Le cas $n = 0$ correspond précisément au théorème fondamental de l'analyse. Il s'agit d'une formule de nature globale (elle vaut sur I tout entier).

(B) Inégalité de Taylor-Lagrange
S'il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $x \in I$, $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leqslant M$, alors

$$\forall\, x \in I \quad |R_{n,a}(x)| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} M\ .$$

Elle se déduit de la formule de Taylor avec reste intégral, en utilisant la majoration d'une intégrale en valeur absolue et la croissance de l'intégrale.

(C) Formule de Taylor-Young

$$R_{n,a}(x) \underset{x \to a}{=} \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1} + o\left((x-a)^{n+1}\right)$$

i.e.

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + o\left((x-a)^{n+1}\right)\ .$$

Elle se déduit de la formule de Taylor avec reste intégral, en utilisant la continuité de la fonction $f^{(n+1)}$.

Ensuite, on reverra la notion de développement limité :

- existence et unicité de la partie régulière (Théorème 8 du document support) ;
- développements limités de référence (Proposition 10 du document support, à connaître par cœur) ;
- intégration d'un développement limité (Proposition 11 du document support) ;
- somme et produit de développements limités (Proposition 11 du document support) ;
- composée de développements limités (Proposition 11 du document support).

Enfin, on passera un temps substantiel à bien comprendre les Exemples 7–10 du document support qui donnent des applications classiques et fort utiles des développements limités.

Ce travail sur le cours est fondamental. Il convient de connaître toutes les définitions, ainsi que les énoncés et des démonstrations de chacun des résultats de ce chapitre.

R9. 3. *Voisinages.* —

1. Soit $a \in \mathbf{R}$. Énoncer la définition d'un voisinage du point a.

Une partie $\mathcal{V}$ de $\mathbf{R}$ est appelée voisinage du point a s'il existe $r \in \mathbf{R}_{>0}$ tel que $]a-r, a+r[\subset \mathcal{V}$.

Remarque. Intuitivement, une partie $\mathcal{V}$ de $\mathbf{R}$ est un voisinage de a si $\mathcal{V}$ contient « de l'espace »autour du point a.

2. Énoncer la définition d'un voisinage de $+\infty$.

Une partie $\mathcal{V}$ de $\mathbf{R}$ est appelée voisinage de $+\infty$ s'il existe $A \in \mathbf{R}$ tel que $]A, +\infty[\subset \mathcal{V}$.

Remarque. Intuitivement, une partie $\mathcal{V}$ de $\mathbf{R}$ est un voisinage de $+\infty$ si $\mathcal{V}$ contient « de l'espace »à gauche de $+\infty$.

Remarques. Soit $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

1. L'ensemble $\mathbf{R}$ tout entier est un voisinage de a.
2. L'intersection d'un nombre fini de voisinages de a est un voisinage de a. En revanche, l'intersection d'un nombre quelconque de voisinages de a n'est pas nécessairement un voisinage de a. En effet, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$ est un voisinage de 0, mais
$$(\star) \qquad \bigcap_{n \in \mathbf{N}^+} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\}$$
n'est pas un voisinage de 0. Le lecteur est invité à démontrer l'égalité ensembliste $(\star)$.
3. La réunion d'un nombre quelconque de voisinages de a est un voisinage de a.

R9. 4. *Comparaison des monômes au voisinage de 0 et de $+\infty$.* — Soit $(p, q) \in \mathbf{Z}^2$.

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur p et q, pour que $x^p \underset{x \to 0}{=} \mathrm{o}\left(x^q\right)$.

Nous raisonnons par équivalences.
$$\begin{aligned} x^p \underset{x \to 0}{=} \mathrm{o}\left(x^q\right) &\iff \frac{x^p}{x^q} = x^{p-q} \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \\ &\iff p - q > 0 \end{aligned}$$
Donc $x^p \underset{x \to 0}{=} \mathrm{o}\left(x^q\right)$ si et seulement si $p > q$.

(b) Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur p et q, pour que $x^p \underset{x \to 0}{=} \mathrm{O}\left(x^q\right)$.

Nous raisonnons par équivalences.

$$\begin{aligned} x^p \underset{x\to 0}{=} \mathrm{O}\left(x^q\right) &\iff \text{la fonction } x \longmapsto \frac{x^p}{x^q} = x^{p-q} \text{ est bornée au voisinage de } 0 \\ &\iff p-q \geq 0 \end{aligned}$$

Donc $x^p \underset{x\to 0}{=} \mathrm{O}\left(x^q\right)$ si et seulement si $p \geqslant q$.

(c) Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur p et q, pour que $x^p \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(x^q\right)$.

Nous raisonnons par équivalences.

$$\begin{aligned} x^p \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(x^q\right) &\iff \frac{x^p}{x^q} = x^{p-q} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \\ &\iff p-q < 0 \end{aligned}$$

Donc $x^p \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(x^q\right)$ si et seulement si $p < q$.

(d) Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur p et q, pour que $x^p \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(x^q\right)$.

Nous raisonnons par équivalences.

$$\begin{aligned} x^p \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(x^q\right) &\iff \text{la fonction } x \longmapsto \frac{x^p}{x^q} = x^{p-q} \text{ est bornée au voisinage de } +\infty \\ &\iff p-q \leqslant 0 \end{aligned}$$

Donc $x^p \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(x^q\right)$ si et seulement si $p \leqslant q$.

R9. 5. *Vrai/Faux sur les équivalents.* — Soit $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Soient f, g, φ, ψ des fonctions de la variable réelle à valeurs complexes, définies sur un voisinage épointé $\mathcal{V}^*$ de a (i.e. un voisinage de a, privé du point a). On suppose que les fonctions f, g, φ, ψ ne s'annulent pas sur $\mathcal{V}^*$. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Si la réponse est « Vrai », alors démontrer le résultat. Si la réponse est « Faux », argumenter au moyen un contre-exemple.

(a) Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \varphi(x)$ alors $f(x) - \varphi(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

Faux. En effet $x+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ mais $x+1-x = 1$ ne tend pas vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

(b) Si $f(x) - \varphi(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \varphi(x)$.

Faux. En effet $x^2 - x \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ mais x^2 n'est pas équivalent à x au voisinage de 0.

(c) Si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} \varphi(x)$ et $g(x) \underset{x \to a}{\sim} \psi(x)$ alors $f(x) + g(x) \underset{x \to a}{\sim} \varphi(x) + \psi(x)$.

Faux. En effet $x^2 + 2x \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2 + x$ et $-x^2 \underset{x \to +\infty}{\sim} -x^2$ mais $2x$ et x ne sont pas équivalents au voisinage de $+\infty$.

(d) Si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} \varphi(x)$ et $g(x) \underset{x \to a}{\sim} \psi(x)$ alors $f(x)g(x) \underset{x \to a}{\sim} \varphi(x)\psi(x)$.

Vrai. Supposons $f(x) \underset{x \to a}{\sim} \varphi(x)$ et $g(x) \underset{x \to a}{\sim} \psi(x)$. Alors

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 1 \quad \text{et} \quad \frac{g(x)}{\psi(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 1 \; .$$

Par Théorème d'opérations sur les limites, il vient

$$\frac{f(x)g(x)}{\varphi(x)\psi(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 1$$

d'où $f(x)g(x) \underset{x \to a}{\sim} \varphi(x)\psi(x)$.

(e) Si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} \varphi(x)$ alors $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x \to a}{\sim} \dfrac{1}{\varphi(x)}$.

Vrai. Supposons $f(x) \underset{x \to a}{\sim} \varphi(x)$. Alors

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 1 \; .$$

Par continuité de la fonction inverse au point 1, il vient

$$\frac{1}{\frac{f(x)}{\varphi(x)}} = \frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}} \xrightarrow[x \to a]{} \frac{1}{1} = 1$$

d'où $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x \to a}{\sim} \dfrac{1}{\varphi(x)}$.

(f) Si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} \varphi(x)$ et $g(x) \underset{x \to a}{\sim} \psi(x)$ alors $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\sim} \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$.

Vrai. Cette assertion est une conséquence immédiate des propriétés (d) et (e).

(g) Si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} \varphi(x)$ alors $\exp(f(x)) \underset{x \to a}{\sim} \exp(\varphi(x))$.

Faux. En effet, $x+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ mais $\exp(x+1) = e \times e^x$ n'est pas équivalent à e^x au voisinage de $+\infty$.

(h) Si les fonctions f et g sont à valeurs dans $\mathbf{R}_{>0}$ et vérifient $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \varphi(x)$ alors

$$\ln(f(x)) \underset{x\to a}{\sim} \ln(\varphi(x)) \ .$$

Faux. En effet $1+x^2 \underset{x\to 0}{\sim} 1+x^4$, mais le quotient

$$\frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1+x^4)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2}$$

ne tend pas vers 1 lorsque x tend vers 0.

(i) Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \varphi(x)$ et $\varphi(x) \underset{x\to a}{\sim} \psi(x)$ alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \psi(x)$.

Vrai. Cette propriété est appelée « transitivité de la relation $\underset{x\to a}{\sim}$ ». Par ailleurs, la relation $\underset{x\to a}{\sim}$ est également réflexive et symétrique. Il s'agit donc d'une relation d'équivalence.
Supposons $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \varphi(x)$ et $\varphi(x) \underset{x\to a}{\sim} \psi(x)$. Alors

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1 \quad \text{et} \quad \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1 \ .$$

Par Théorème d'opérations sur les limites, il vient

$$\frac{f(x)}{\psi(x)} = \frac{f(x)}{\varphi(x)} \times \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1 \ .$$

Ainsi $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \psi(x)$.

Remarques.

1. Il faut être très prudent lorsque l'on effectue des opérations sur les équivalents.
2. Les opérations licites sur les équivalents peuvent être démontrées à l'aide d'un calcul rapide de quotient. En cas de doute, il est conseillé de refaire ce calcul.
3. On pourra préférer manipuler les o aux équivalents. Les o peuvent être additionnés sans risque, par exemple.

R9. 6. *Équivalents et signes.* — Soit $a \in \mathbf{R}$. Soit $\mathcal{V}$ un voisinage de a. Il existe donc $r \in \mathbf{R}_{>0}$ tel que $]a-r, a+r[\subset \mathcal{V}$. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathcal{V}$, à valeurs réelles, telles que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$. On suppose que, pour tout $x \in \mathcal{V}$, $g(x) > 0$. Démontrer qu'il existe $\rho \in]0, r[$ tel que, pour tout $x \in]a-\rho, a+\rho[$, $f(x) > 0$.

Nous savons que $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1$. Donc, en spécialisant la définition de limite à $\varepsilon \leftarrow \dfrac{1}{2}$, il existe $r' \in \mathbf{R}_{>0}$ tel que

$$\forall\, x \in \mathcal{V}, \quad |x-a| < r' \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right| < \frac{1}{2}$$

que nous pouvons écrire également

$$\forall\, x \in \mathcal{V}, \quad x \in \,]a-r', a+r'[\quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2}\,.$$

En posant $\rho := \min(r, r') > 0$, nous en déduisons

$$\forall\, x \in \,]a-\rho, a+\rho[\quad \frac{f(x)}{g(x)} > 0\,.$$

Comme la fonction g est strictement positive sur $\mathcal{V}$, elle l'est ***a fortiori*** sur $]a-\rho, a+\rho[$. Ainsi, la fonction f est elle-même strictement positive sur $]a-\rho, a+\rho[$.

R9. 7. *Équivalents versus o.* — Soit $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Soient f et g deux fonctions de la variable réelle à valeurs complexes, définies sur un voisinage épointé $\mathcal{V}$ de a. On suppose que la fonction g ne s'annule sur $\mathcal{V}$. Démontrer l'équivalence suivante.

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + \mathrm{o}\left(g(x)\right)$$

Nous raisonnons par équivalences.

$$\begin{aligned}
f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \quad & \Longleftrightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1 \\
& \Longleftrightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} - 1 = \frac{f(x)-g(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad f(x) - g(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\left(g(x)\right) \\
& \Longleftrightarrow \quad f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + \mathrm{o}\left(g(x)\right)
\end{aligned}$$

Remarque. Cette équivalence, qui est particulièrement simple à établir, s'avère être souvent être utile, typiquement lorqu'on veut affiner (i.e. obtenir un terme supplémentaire dans) un développement limité ou un développement asymptotique.

R9. 8. *Dérivabilité versus existence d'un DL à l'ordre 1.* — Soit $a \in \mathbf{R}$. Soit f une fonction de la variable réelle à valeurs complexes, définie sur un voisinage $\mathcal{V}$ de a. Démontrer que la fonction f est dérivable en a si et seulement si la fonction f possède un développement limité à l'ordre 1 au point a.

Nous raisonnons par double implications.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que f est dérivable en a. Alors il existe $\ell \in \mathbf{R}$ (le nombre dérivé de f en a) tel que

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x \to a]{} \ell \ .$$

Nous en déduisons

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \ell = \frac{f(x)-f(a)-\ell(x-a)}{x-a} \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

d'où $f(x)-f(a)-\ell(x-a) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\,(x-a)$, i.e. $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a)+\ell(x-a)+\mathrm{o}\,(x-a)$. La fonction f admet donc un développement limité à l'ordre 1 au point a.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que f admet un développement limité à l'ordre 1 au point a. Alors il existe $(\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbf{R}^2$ tel que

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \mathrm{o}\,(x-a) \ .$$

En évaluant $f(x) = \alpha_0 + (x-a)\,(\alpha_1 + \mathrm{o}\,(1))$, qui vaut pour x appartenant à un voisinage de a, en $x \leftarrow a$, il vient $f(a) = \alpha_0$. Nous en déduisons $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \alpha_1(x-a) + \mathrm{o}\,(x-a)$, puis

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \alpha_1 \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\,(1) \ .$$

Ainsi $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x \to a]{} \alpha_1$. La fonction f est donc dérivable au point 1 et $f'(a) = \alpha_1$.

Remarques.

1. L'existence d'un développement limité à l'ordre 1 de f au point a livre non seulement la dérivabilité de f au point a, mais aussi le nombre dérivé de f en a. En effet, ce dernier est le coefficient du développement limité devant $(x-a)$.
2. La dérivabilité de f au point a entraine $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a)+f'(a)(x-a)+\mathrm{o}\,(x-a)$. On peut ainsi donc lire l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a ($y = f(a) + f'(a)(x-a)$) sur le développement limité.
3. Une fonction qui admet un développement limité d'ordre 2 au point a n'est pas nécessairement deux fois dérivable en a. Un contre-exemple est donné par la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \in \mathbf{R}^*$ et $f(0) = 0$. Le lecteur est invité à démontrer que cette fonction est dérivable sur $\mathbf{R}$, qu'elle possède un développement limité à l'ordre 2 au point 0, mais qu'elle n'est pas deux fois dérivable au point 0.
4. Au cours de l'année de MP, nous aurons à étudier des fonctions de plusieurs variables et nous construirons un calcul différentiel pour icelles. Nous chercherons, alors, à généraliser la notion de développement limité à l'ordre 1, plutôt que celle de taux d'accroissement puisque diviser par un vecteur n'est pas une opération licite.

R9. 9. *Somme de termes en progression géométrique et DL.* — Soit $n \in \mathbf{N}$.

1. Simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$, pour tout $x \in]-1, 1[$.

D'après le cours, pour tout $x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

2. En déduire que la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ admet un développement limité à l'ordre n au point $x=0$. On explicitera ce DL.

Soit x un point de l'intervalle $]-1,1[$, qui est un voisinage de 0. D'après la question précédente

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}\,.$$

Comme $\dfrac{x}{1-x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, $\dfrac{x^{n+1}}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}\left(x^n\right)$. Ainsi $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right)$.

3. En déduire que les fonctions $x \longmapsto \ln(1+x)$ et $x \longmapsto \arctan(x)$ possèdent des développements limités à tout ordre au point $x=0$. On explicitera ces DL.

• Soit $n \in \mathbf{N}$. Par changement de variable $x \leftarrow -x$, $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right)$. Puis, par intégration d'un DL

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} + \mathrm{o}\left(x^{n+1}\right) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \mathrm{o}\left(x^{n+1}\right)\,.$$

• Soit $n \in \mathbf{N}$. Par changement de variable $x \leftarrow -x^2$, $\dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + \mathrm{o}\left(x^{2n}\right)$. Puis, par intégration d'un DL

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)\,.$$

R9. 10. *Neuf calculs de développements limités.* — Déterminer le développement limité en $x=0$ à l'ordre 4 de chacune des fonctions suivantes.

(a) $x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ (b) $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$ (c) $x \longmapsto \ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)$

(d) $x \longmapsto \sqrt{1+\sin(x)}$ (e) $x \longmapsto \tan\left(x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5}\right)$ (f) $x \longmapsto \exp(\mathbf{Arcsin(x)})$

(g) $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x}{\tan(x)}}$ (h) $x \longmapsto \dfrac{\mathbf{ch}(x)-1}{\cos(x)-1}$ (i) $x \longmapsto (1+2x)^{\frac{1}{1+x}}$

(a) Nous connaissons les DL suivants en $x=0$ à l'ordre 4.

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right) \text{ et } \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right) \quad (1)$$

Conclusion. En multipliant les deux DL à l'ordre 4 (1), nous trouvons le DL à l'ordre 4 suivant.

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x} = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right).$$

(b) Nous connaissons le DL suivant en $u=0$ à l'ordre 4.

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + \underset{u\to 0}{o}\left(u^4\right) \quad (2)$$

Le DL en $x=0$ suivant à l'ordre 4 est clair.

$$x + x^2 = x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right). \quad (3)$$

Conclusion. Comme

$$x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right) \underset{x\to 0}{\to} 0$$

nous pouvons composer le DL à l'ordre 4 (3) par le DL à l'ordre 4 (2) pour trouver :

$$\frac{1}{x^2+x+1} = 1 - x + x^3 - x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right).$$

(c) Pour obtenir un DL en $x=0$ à l'ordre 4 de $\dfrac{\sin(x)}{x}$, nous commençons par donner le DL en $x=0$ à l'ordre 5 de $\sin(x)$, qui est connu (la division par x fera ensuite chuter l'ordre de 1).

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right). \quad (4)$$

Nous déduisons du DL (4) :

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right).$$

Par suite :

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)\right).$$

Nous connaissons le DL suivant en $u=0$ à l'ordre 4.

$$\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + \underset{u\to 0}{o}\left(u^4\right). \quad (5)$$

Conclusion. Comme

$$-\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right) \underset{x\to 0}{\to} 0$$

nous pouvons composer le DL à l'ordre 4

$$-\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + \underset{x \to 0}{o}\left(x^4\right)$$

par le DL à l'ordre 4 (5) pour trouver :

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + \underset{x \to 0}{o}\left(x^4\right).$$

(d) Nous connaissons le DL suivant en $u = 0$ à l'ordre 4.

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 - \frac{5}{128}u^4 + \underset{u \to 0}{o}\left(u^4\right). \tag{6}$$

Nous connaissons également le DL suivant en $x = 0$ à l'ordre 4.

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \underset{x \to 0}{o}\left(x^4\right). \tag{7}$$

Conclusion. Comme

$$x - \frac{1}{6}x^3 + \underset{x \to 0}{o}\left(x^4\right) \underset{x \to 0}{\to} 0$$

nous pouvons composer le DL à l'ordre 4 (7) par le DL à l'ordre 4 (6) pour trouver :

$$\sqrt{1+\sin(x)} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + \frac{1}{384}x^4 + \underset{x \to 0}{o}\left(x^4\right).$$

(e) • Nous commençons par calculer le DL de tangente en 0 à l'ordre 4. Nous connaissons le DL suivant en $u = 0$ à l'ordre 4 :

$$\cos(u) = 1 - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{24}u^4 + \underset{u \to 0}{o}\left(u^4\right).$$

Donc

$$\frac{1}{\cos(u)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{24}u^4 + \underset{u \to 0}{o}\left(u^4\right)}.$$

Nous connaissons le DL suivant en $v = 0$ à l'ordre 4 :

$$\frac{1}{1+v} = 1 - v + v^2 - v^3 + v^4 + \underset{v \to 0}{o}\left(v^4\right). \tag{8}$$

Comme

$$-\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{24}u^4 + \underset{u \to 0}{o}\left(u^4\right) \underset{u \to 0}{\to} 0$$

nous pouvons composer le DL à l'ordre 4

$$-\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{24}u^4 + \underset{u \to 0}{o}\left(u^4\right)$$

par le DL à l'ordre 4 (8) pour trouver :

$$\frac{1}{\cos(u)} = 1 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{5}{24}u^4 + \underset{u\to 0}{o}\left(u^4\right). \tag{9}$$

En multipliant le DL à l'ordre 4 (9) par le DL à l'ordre 4 connu suivant :

$$\sin(u) = u - \frac{1}{6}u^3 + \underset{u\to 0}{o}\left(u^4\right),$$

il vient :

$$\tan(u) = \sin(u) \times \frac{1}{\cos(u)} = u + \frac{1}{3}u^3 + \underset{u\to 0}{o}\left(u^4\right). \tag{10}$$

- Le DL suivant en $x = 0$ à l'ordre 4 est clair.

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} = x - \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right). \tag{11}$$

Conclusion. Comme

$$x - \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right) \underset{x\to 0}{\to} 0$$

nous pouvons composer le DL à l'ordre 4 (11) par le DL à l'ordre 4 (10) pour trouver :

$$\tan\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right) = x + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right).$$

Remarque. Le fait que le DL de Arctangente en $x = 0$ à l'ordre 4 soit :

$$\text{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right) \underset{x\to 0}{\to} 0$$

peut permettre une autre démonstration du résultat (nettement plus élégante), et fournit un éclairage conceptuel de la « forme » trouvée.

(f) Nous connaissons le DL suivant en $u = 0$ à l'ordre 4 :

$$\exp(u) = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{24}u^4 + \underset{u\to 0}{o}\left(u^4\right) \tag{12}$$

et le DL suivant en $x = 0$ à l'ordre 4 :

$$\text{Arcsin}(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right). \tag{13}$$

Conclusion. Comme

$$x + \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right) \underset{x\to 0}{\to} 0$$

nous pouvons composer le DL à l'ordre 4 (13) par le DL à l'ordre 4 (12) pour trouver :

$$\exp(\text{Arcsin(x)}) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{24}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right).$$

(g) • DL en $x=0$ à l'ordre 4 de $\dfrac{x}{\tan(x)}$ (approche naïve).

Nous commençons par une approche naïve, qui n'aboutit pas, car l'ordre ne conviendra pas, mais qui motivera la nécessité de considérer un DL à un ordre supérieur. Considérons à nouveau le DL de tangente en 0 à l'ordre 4 obtenu au (e) (cf. DL 10).

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right).$$

Nous en déduisons :

$$\frac{x}{\tan(x)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)}$$

duquel nous pourrions déduire aisément un DL de $\dfrac{x}{\tan(x)}$ en $x=0$, mais à l'ordre 3, ce qui ne suffit pas pour répondre à la question posée. Il nous faut donc partir d'un DL de tangente en 0 à l'ordre 5, si l'on procède ainsi.

• DL en $x=0$ à l'ordre 4 de $\dfrac{x}{\tan(x)}$.

En adaptant la stratégie adoptée en (e) pour trouver le DL de tangente en 0 à l'ordre 4, nous obtenons le DL de tangente en 0 à l'ordre 5 :

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right).$$

Donc :

$$\frac{x}{\tan(x)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{15}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)}.$$

Nous rappelons le DL suivant en $u=0$ à l'ordre 4 :

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + \underset{u\to 0}{o}\left(u^4\right). \tag{14}$$

Comme

$$\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{15}x^4 + + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right) \underset{x\to 0}{\to} 0$$

nous pouvons composer le DL à l'ordre 4

$$\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{15}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)$$

par le DL à l'ordre 4 (14) pour trouver :

$$\frac{x}{\tan(x)} = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right).$$

- Fin du calcul.
Nous rappelons le DL suivant en $u=0$ à l'ordre 4 :

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 - \frac{5}{128}u^4 + \underset{u\to 0}{o}\left(u^4\right). \tag{15}$$

Conclusion. Comme

$$-\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right) \underset{x\to 0}{\to} 0$$

nous pouvons composer le DL à l'ordre 4 :

$$-\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)$$

par le DL à l'ordre 4 (15) pour trouver :

$$\sqrt{\frac{x}{\tan(x)}} = 1 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{40}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right).$$

(h) - Approche naïve
D'après les résultats sur les DL usuels :

$$\text{ch}(x) - 1 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right) \qquad ; \qquad \cos(x) - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)$$

d'où :

$$\frac{\text{ch}(x)-1}{\cos(x)-1} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{24}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}{-\frac{1}{2} + \frac{1}{24}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}.$$

En poursuivant ainsi, nous obtiendrions un DL en $x=0$ à l'ordre 2 de $\dfrac{\text{ch}(x)-1}{\cos(x)-1}$. On voit que les ordres chutent de 2. Il faut donc débuter avec des DL à l'ordre 6 pour répondre à la question posée.

- Solution retenue
Nous partons des DL usuels suivants en $x=0$ à l'ordre 6.

$$\text{ch}(x)-1 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^6\right) \text{ et } \cos(x)-1 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^6\right)$$

Nous en déduisons :

$$\frac{\text{ch}(x)-1}{\cos(x)-1} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{24}x^2 + \frac{1}{720}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)}{-\frac{1}{2} + \frac{1}{24}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)} = \frac{-1 - \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{360}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)}{1 - \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{360}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)}$$

Nous rappelons :

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + \underset{u\to 0}{o}\left(u^4\right). \tag{16}$$

Comme

$$-\frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{360}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

nous pouvons composer le DL à l'ordre 4 :

$$-\frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{360}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)$$

par le DL à l'ordre 4 (16) pour trouver :

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{360}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)} = 1 + \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{240}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right). \tag{17}$$

Conclusion. En multipliant les deux DL à l'ordre 4

$$-1 - \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{360}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)$$

et (17) il vient :

$$\frac{\mathbf{ch}(x) - 1}{\cos(x) - 1} = -1 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{72}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right).$$

(i) Par définition même :

$$(1+2x)^{\frac{1}{1+x}} = \exp\left(\frac{1}{1+x} \times \ln(1+2x)\right).$$

Du DL usuel :

$$\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + \underset{u\to 0}{o}\left(u^4\right)$$

nous déduisons :

$$\ln(1+2x) = 2\,x - 2\,x^2 + \frac{8}{3}x^3 - 4\,x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right). \tag{18}$$

Nous rappelons (une nouvelle fois...) :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right). \tag{19}$$

En multipliant les deux DL à l'ordre 4 (18) et (19) il vient :

$$\frac{1}{1+x} \times \ln(1+2x) = 2\,x - 4\,x^2 + \frac{20}{3}x^3 - \frac{32}{3}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right).$$

Rappelons enfin :

$$\exp(u) = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{24}u^4 + \underset{u\to 0}{o}\left(u^4\right). \tag{20}$$

Conclusion. Comme

$$2\,x-4\,x^2+\frac{20}{3}x^3-\frac{32}{3}x^4+\underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)\underset{x\to 0}{\to}0$$

nous pouvons composer le DL à l'ordre 4 :

$$2\,x-4\,x^2+\frac{20}{3}x^3-\frac{32}{3}x^4+\underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)$$

par le DL à l'ordre 4 (20) pour trouver :

$$(1+2x)^{\frac{1}{1+x}}=\exp\left(\frac{1}{1+x}\times\ln(1+2x)\right)=1+2\,x-2\,x^2+\frac{10}{3}x^4+\underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right).$$

R9. 11. *Cinq applications des développements limités.* —

1. Calculer le développement limité en $x=0$ à l'ordre 2 de $x\longmapsto\ln(e+x)$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Pour tout $x\in]-e,+\infty[$:

$$\ln(e+x)=\ln\left(e\left(1+\frac{x}{e}\right)\right)=1+\ln\left(1+\frac{x}{e}\right).$$

Du DL usuel :

$$\ln(1+u)=u-\frac{1}{2}u^2+\underset{u\to 0}{o}\left(u^2\right)$$

nous déduisons :

$$\ln\left(1+\frac{x}{e}\right)=\frac{1}{e}x-\frac{1}{2e^2}x^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right).$$

Conclusion.

$$\ln(e+x)=1+\ln\left(1+\frac{x}{e}\right)=1+\frac{1}{e}x-\frac{1}{2e^2}x^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right).\tag{21}$$

Un repère du plan étant fixé on peut considérer la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction $x\longmapsto\ln(e+x)$. Nous déduisons de (21) que la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $x=0$ existe et a pour équation :

$$y=1+\frac{1}{e}x.$$

Puisque :

$$\ln(e+x)-\left(1+\frac{1}{e}x\right)=-\frac{1}{2e^2}x^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right).$$

nous savons que $\mathcal{C}$ est au-dessous de $\mathcal{T}$ localement autour du point d'abscisse $x=0$ de $\mathcal{C}$ (l'ordonnée du-dit point est 1).

2. Étudier la limite éventuelle de $\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ quand x tend vers 0, où $a>0$ et $b>0$.

- On est en présence d'une forme indéterminée du type $1^{\pm\infty}$.
- DL en $x = 0$ à l'ordre 2 de c^x où $c > 0$ est fixé.
  Par définition : $c^x = \exp(x \ln(c))$. Du DL usuel :
  $$\exp(u) = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \underset{u\to 0}{o}\left(u^2\right)$$
  nous déduisons :
  $$c^x = 1 + \ln(c)\,x + \frac{1}{2}\,(\ln(c))^2\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) \tag{22}$$
- DL en $x = 0$ à l'ordre 2 de $\dfrac{a^x + b^x}{2}$.
  De (22) nous déduisons :
  $$\frac{a^x + b^x}{2} = 1 + \frac{1}{2}(\ln(a) + \ln(b))\,x + \frac{1}{4}\left((\ln(a))^2 + (\ln(b))^2\right)x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right).$$
- Fin du calcul.
  Par définition même :
  $$\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x} \times \ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)\right).$$
  Nous rappelons le DL usuel :
  $$\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \underset{u\to 0}{o}\left(u^2\right). \tag{23}$$
  Comme
  $$\frac{1}{2}(\ln(a) + \ln(b))\,x + \frac{1}{4}\left((\ln(a))^2 + (\ln(b))^2\right)x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{\to} 0$$
  nous pouvons composer le DL à l'ordre 4 :
  $$\frac{1}{2}(\ln(a) + \ln(b))\,x + \frac{1}{4}\left((\ln(a))^2 + (\ln(b))^2\right)x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$$
  par le DL à l'ordre 2 (23) pour trouver :
  $$\ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right) = \frac{1}{2}(\ln(a) + \ln(b))\,x + \frac{1}{8}(\ln(a) - \ln(b))^2\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$$
  d'où :
  $$\frac{1}{x} \times \ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right) = \frac{1}{2}(\ln(a) + \ln(b)) + \frac{1}{8}(\ln(a) - \ln(b))^2\,x + \underset{x\to 0}{o}(x) \tag{24}$$

Conclusion. De (24), nous déduisons que :

$$\frac{1}{x} \times \ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\left(\ln(a) + \ln(b)\right) = \ln\left(\sqrt{ab}\right).$$

Par continuité de la fonction exponentielle au point $\ln\left(\sqrt{ab}\right)$, il vient :

$$\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x} \times \ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)\right) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \exp\left(\ln\left(\sqrt{ab}\right)\right) = \sqrt{ab}.$$

Remarque sur la stratégie adoptée. Nous sommes partis de DL à l'ordre 2 (choix quelque peu arbitraire) pour finalement aboutir à un DL à l'ordre 1 qui nous a permis de conclure. À la fin de notre résolution, nous remarquons que partir d'un ordre 1, pour arriver au final avec un ordre 0 nous aurait suffi pour conclure. On peut parfois anticiper un ordre suffisant de DL, en faisant une analyse fine des quantités en jeu (il était possible de le faire ici, mais ce n'était pas tout à fait évident). Nous reviendrons sur ce point en cours d'année, car il s'agit d'un point crucial (ne serait-ce que pour minimiser la longueur des calculs).

3. Étudier la limite éventuelle de $\dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{3x+5}}{1 - \tan\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)}$ quand x tend vers 1.

- Analysons le poids du dénominateur $1 - \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}h\right)$, i.e. déterminons le premier coefficient non nul qui apparaît dans « son » DL en $h = 0$. Puisque la valeur en $h = 0$ de $1 - \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}h\right)$ est 0, il nous faut au moins aller à l'ordre 1. Nous savons que la fonction
$$h \longmapsto 1 - \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}h\right)$$
est dérivable en 0 et nous calculons son nombre dérivé en 0 pour trouver $\frac{\pi}{2}$. Nous en déduisons :
$$1 - \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}h\right) = \frac{\pi}{2}h + \underset{h \to 0}{o}(h) \tag{25}$$
d'après le lien entre dérivabilité, nombre dérivé et DL à l'ordre 1. Dès lors, nous savons qu'un DL à l'ordre 1 en $h = 0$ du dénominateur $\sqrt{4+h} - \sqrt[3]{8+3h}$ nous permettra de conclure.
- DL de $\sqrt{4+h}$ en $h = 0$ à l'ordre 1.
Nous notons :
$$\sqrt{4+h} = \sqrt{4\left(1 + \frac{4}{h}\right)} = 2\sqrt{1 + \frac{h}{4}}.$$
Du DL usuel :
$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u + \underset{u \to 0}{o}(u)$$

nous déduisons :

$$\sqrt{4+h} = 2 + \frac{1}{4}h + \underset{h\to 0}{o}(h)\,. \tag{26}$$

- DL de $\sqrt[3]{8+3h}$ en $h=0$ à l'ordre 1.
  Pour tout $h > -\dfrac{8}{3}$,

$$\sqrt[3]{8+3h} = (8+3h)^{\frac{1}{3}} = \left(8\left(1+\frac{3}{8}h\right)\right)^{\frac{1}{3}} = 2\left(1+\frac{3}{8}h\right)^{\frac{1}{3}}.$$

  Du DL usuel :

$$(1+u)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}u + \underset{u\to 0}{o}(u)$$

  nous déduisons :

$$\sqrt[3]{8+3h} = 2 + \frac{1}{4}h + \underset{h\to 0}{o}(h)\,. \tag{27}$$

- Fin du calcul.
  Conclusion. De (25), (26) et (27), nous déduisons :

$$\frac{\sqrt{4+h} - \sqrt[3]{8+3h}}{1-\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}h\right)} = \frac{\underset{h\to 0}{o}(h)}{\frac{\pi}{2}h + \underset{h\to 0}{o}(h)} = \frac{\underset{h\to 0}{o}(1)}{\frac{\pi}{2} + \underset{h\to 0}{o}(1)}.$$

  Par suite :

$$\frac{\sqrt{4+h} - \sqrt[3]{8+3h}}{1-\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}h\right)} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \frac{0}{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

4. Pour tout $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, on note $f_{a,b}$ la fonction définie par :

$$f_{a,b} \colon t \longmapsto \frac{t}{\ln(1+t)-t} + \frac{a}{t} + \frac{b}{t^2}.$$

   (a) À quelle condition sur $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, la fonction $f_{a,b}$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Préliminaires. Nous allons tout d'abord analyser le comportement local de la fonction $f_{a,b}$ au voisinage de 0.

Laissons dans un premier temps les quantités $\dfrac{a}{t}$ et $\dfrac{b}{t^2}$ de côté, pour nous concentrer sur $\dfrac{t}{\ln(1+t)-t}$. Si nous parvenons à obtenir un développement asymptotique de la « forme » :

$$\frac{\alpha}{t^2} + \frac{\beta}{t} + \gamma + \delta t + \underset{t\to 0}{o}(t)$$

avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des constantes réelles explicites (dépendant peut-être de a et b), de cette dernière, nous saurons conclure rapidement quant aux deux questions posées. Compte tenu de notre souhait, il nous faut débuter avec un DL en $t=0$ à l'ordre 4 de $\ln(1+t)-t$.

Nous savons :
$$\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + \underset{t\to 0}{o}\left(t^4\right)$$
d'où :
$$\ln(1+t) - t = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + \underset{t\to 0}{o}\left(t^4\right)$$
et
$$\frac{t}{\ln(1+t)-t} = \frac{1}{-\frac{1}{2}t + \frac{1}{3}t^2 - \frac{1}{4}t^3 + \underset{t\to 0}{o}\left(t^3\right)} = -\frac{2}{t}\,\frac{1}{1 - \frac{2}{3}t + \frac{1}{2}t^2 + \underset{t\to 0}{o}\left(t^2\right)}.$$
Nous rappelons :
$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + \underset{u\to 0}{o}\left(u^2\right). \tag{28}$$
Comme
$$-\frac{2}{3}t + \frac{1}{2}t^2 + \underset{t\to 0}{o}\left(t^2\right) \underset{x\to 0}{\to} 0$$
nous pouvons composer le DL à l'ordre 2 :
$$-\frac{2}{3}t + \frac{1}{2}t^2 + \underset{t\to 0}{o}\left(t^2\right)$$
par le DL à l'ordre 4 (28) pour trouver :
$$\frac{1}{1 - \frac{2}{3}t + \frac{1}{2}t^2 + \underset{t\to 0}{o}\left(t^2\right)} = 1 + \frac{2}{3}t - \frac{1}{18}t^2 + \underset{t\to 0}{o}\left(t^2\right)$$
et par suite :
$$\frac{t}{\ln(1+t)-t} = -\frac{2}{t}\,\frac{1}{1 - \frac{2}{3}t + \frac{1}{2}t^2 + \underset{t\to 0}{o}\left(t^2\right)} = -\frac{2}{t} - \frac{4}{3} + \frac{1}{9}t + \underset{t\to 0}{o}\left(t\right). \tag{29}$$
De (29), nous déduisons :
$$f_{a,b}(t) = \frac{t}{\ln(1+t)-t} + \frac{a}{t} + \frac{b}{t^2} = \frac{b}{t^2} + \frac{a-2}{t} - \frac{4}{3} + \frac{1}{9}t + \underset{t\to 0}{o}\left(t\right) \tag{30}$$
ce qui achève cette phase préliminaire.

Solution à la question posée.

- Analyse
  Supposons $f_{a,b}$ prolongeable par continuité en 0, i.e. supposons que $f_{a,b}$ possède une limite finie en 0.

Si $b \neq 0$, alors d'après (30), $f_{a,b}(t) \underset{t \to 0}{\to} \dfrac{b}{t^2}$ et $f_{a,b}$ n'admet pas de limite finie en 0. Donc $b = 0$ et alors :

$$f_{a,b}(t) = \frac{a-2}{t} - \frac{4}{3} + \frac{1}{9}t + \underset{t \to 0}{o}(t) \tag{31}$$

Si $a \neq 2$, alors d'après (31), $f_{a,b}(t) \underset{t \to 0}{\sim} \dfrac{a-2}{t}$ et $f_{a,b}$ n'admet pas de limite finie en 0. Donc $a = 2$.
Une condition nécessaire pour que $f_{a,b}$ soit prolongeable par continuité est : $b = 0$ et $a = 2$.

- Synthèse
  Supposons $b = 0$ et $a = 2$. D'après (30),

$$f_{a,b}(t) = -\frac{4}{3} + \frac{1}{9}t + \underset{t \to 0}{o}(t)$$

donc

$$f_{a,b}(t) \underset{t \to 0}{\to} -\frac{4}{3}.$$

La fonction $f_{a,b}$ est donc prolongeable par continuité en 0 ; son prolongement par continuité en 0 prend la valeur $-\dfrac{4}{3}$ en 0.

Conclusion. La fonction $f_{a,b}$ est prolongeable par continuité en 0 si et seulement si $a = 2$ et $b = 0$.

(b) On suppose que les réels a et b sont tels que la fonction $f_{a,b}$ est prolongeable par continuité en 0. On note (abusivement) $f_{a,b}$ le prolongement par continuité de $f_{a,b}$ en 0. La fonction $f_{a,b}$ est-elle dérivable en 0 ?

Nous supposons ici que $f_{a,b}$ est prolongeable par continuité en 0, i.e. que $a = 2$ et $b = 0$. Donc par (30) :

$$f_{a,b}(t) = -\frac{4}{3} + \frac{1}{9}t + \underset{t \to 0}{o}(t).$$

Conclusion. La fonction $f_{a,b}$ admet un DL en $t = 0$ à l'ordre 1. Elle est donc dérivable en 0 et son nombre dérivé en 0 est donné par le coefficient de degré 1, ici $\dfrac{1}{9}$.

5. On fixe un repère du plan. Déterminer l'asymptote Δ en $+\infty$ de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction

$$f : x \longmapsto \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}$$

ainsi que la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ au voisinage de $+\infty$.

Essayons, dans un premier temps, d'obtenir un développement asymptotique de la « forme » :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \underset{x \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

où a, b, c sont des constantes réelles explicites, avec, si possible, $c \neq 0$.

On effectue le changement de variable $X = \dfrac{1}{x}$ et on suppose $X > 0$.

$$f\left(\frac{1}{X}\right) = \sqrt{\frac{1}{X^2}+1} + \sqrt{\frac{1}{X^2}-1} = \frac{1}{X}\left(\sqrt{1+X^2}+\sqrt{1-X^2}\right).$$

Compte tenu de l'objectif annoncé, il nous faut un développement limité en $X = 0^+$ à l'ordre 3 de $\sqrt{1+X^2} - \sqrt{1-X^2}$. Pour des raisons de parité, le terme de degré 3 de ce développement limité sera nul. Celui-ci étant responsable du coefficient c cherché (que nous aimerions non nul), nous ne pourrons conclure quant à la position de l'asymptote et de la courbe au voisinage de $+\infty$. On augmente donc l'ordre du DL ; la stratégie initiale est modifiée, puisque nous ne pouvons obtenir la forme (naïvement) annoncée [a]. Du DL usuel suivant :

$$\sqrt{1+U} = 1 + \frac{1}{2}U - \frac{1}{8}U^2 + \underset{U\to 0}{o}\left(U^2\right)$$

nous déduisons :

$$\sqrt{1+X^2}+\sqrt{1-X^2} = 2 - \frac{1}{4}X^4 + \underset{X\to 0^+}{o}\left(X^4\right)$$

et par suite :

$$f\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{X}\left(\sqrt{1+X^2}+\sqrt{1-X^2}\right) = \frac{2}{X} - \frac{1}{4}X^3 + \underset{X\to 0^+}{o}\left(X^3\right).$$

Nous en déduisons :

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4x^3} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right). \qquad (32)$$

Conclusion. De (32), nous déduisons que la droite Δ d'équation

$$y = 2x$$

est asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$. De plus comme

$$f(x) - 2x = -\frac{1}{4x^3} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessous de Δ au voisinage de $+\infty$.

a. Nous aurions pu l'anticiper dès le départ.