M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Programme de la journée de révisions n°9
Développements limités

David BLOTTIÈRE

On s'intéresse au comportement local d'une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, i.e. à son comportement autour d'un point fixé a de I. Quand la fonction est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, il existe parmi les fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n une fonction qui approxime au mieux la fonction f. Précisément, il existe un unique $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tels que :

$$\frac{f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k}{(x-a)^n} \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

ce que l'on écrit aussi $f(x) \underset{x \to a}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$ et que l'on nomme « développement limité de f en a à l'ordre n ». Cette notion met en jeu une technique calculatoire particulière qu'il convient de bien maîtriser, en plus de la table des développements limités usuels. Les applications de cette théorie sont nombreuses : études de limites éventuelles, études de continuité et de dérivabilité, recherches d'asymptotes, recherches d'équivalents... Un énoncé de nature global, fondamental, apparait aussi ici : la formule de Taylor avec reste intégral, qui nous permet par exemple d'établir $e = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$.

R9. 1. *Une illustration graphique des développements limités.* — Ci-dessous, on a représenté en rouge une portion du graphe de la fonction :

$$x \longmapsto \ln(1+x)$$

et en doré des portions des courbes représentatives des polynômes de Taylor de cette fonction en $x = 0$ pour les ordres 1,2,3.

Ordre 1

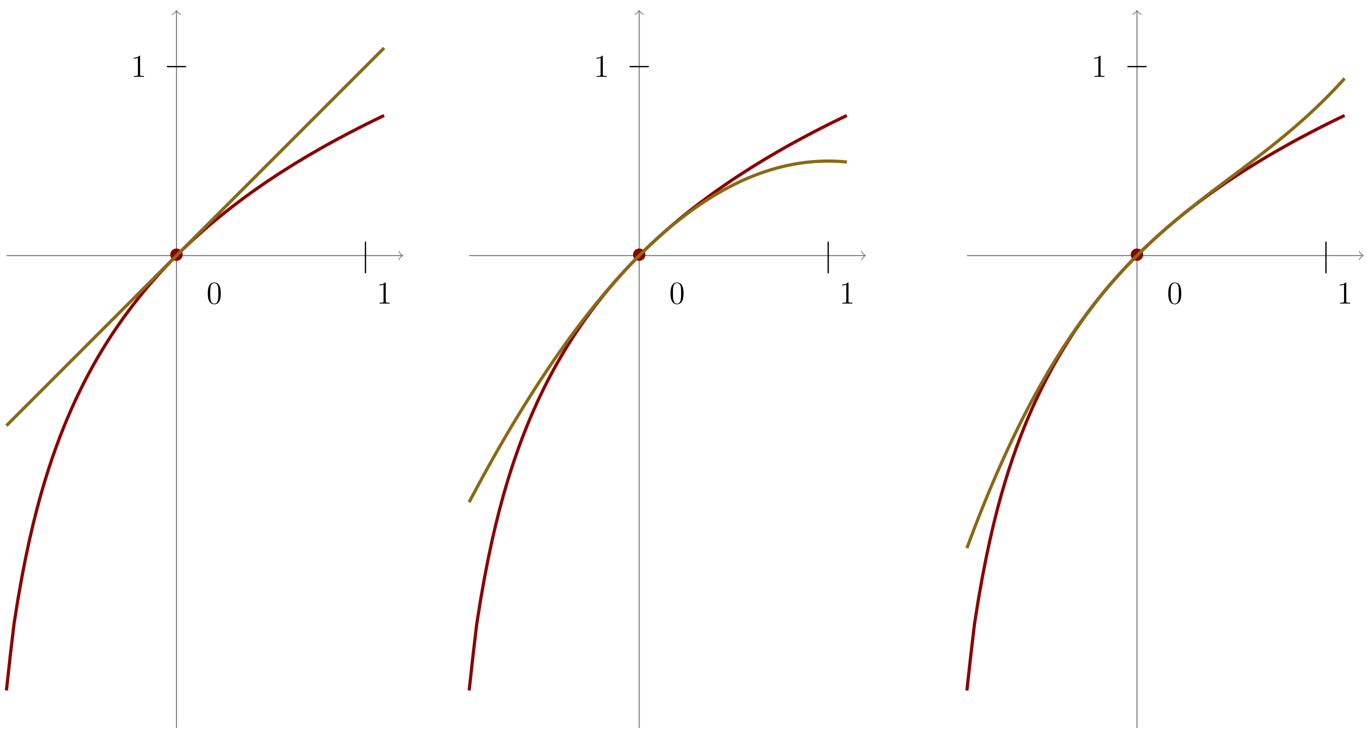
$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x + \mathrm{o}\,(x)$$

Ordre 2

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\,(x^2)$$

Ordre 3

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}\,(x^3)$$



On observe que la qualité de l'approximation croit avec l'ordre.

R9. 2. *Travail sur le cours.* — Le document support est le polycopié de cours sur les développements limités [PDF].

On commencera par revoir les fonctions polynomiales, en prenant le temps de confronter ces objets avec les polynômes. Quand le corps est infini (nous verrons des exemples de corps finis dans l'année), on peut confondre polynômes et fonctions polynomiales sans risque. Les Propriétés 3 et 4 du document support devront être travaillées (énoncés et, bien sûr, démonstrations).

Viendra ensuite le temps de s'intéresser à l'approximation d'une fonction « suffisamment régulière » par une fonction polynomiale, en précisant ce qu'on entend par « approximation ».

Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, $a \in I$, $n \in \mathbf{N}$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbf{C})$. On introduit le polynôme de Taylor d'ordre n de f en a :

$$T_{n,a} := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(X-a)^k$$

et le reste d'ordre n de f en a, $R_{n,a} \in \mathcal{F}(I, \mathbf{C})$, défini par :

$$\forall x \in I \quad R_{n,a}(x) = f(x) - T_{n,a}(x)$$

de sorte que :

$$\forall x \in I \quad f(x) = T_{n,a}(x) + R_{n,a}(x) \ .$$

On dispose alors de trois propriétés, qui apportent une information sur $R_{n,a}$.

(A) Formule de Taylor avec reste intégral

$$\forall x \in I \quad R_{n,a}(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} \, f^{(n+1)}(t) \ \mathrm{d}t \ .$$

On la démontre classiquement par récurrence, à l'aide d'une intégration par parties (cette démonstration doit être sue et comprise). Le cas $n = 0$ correspond précisément au théorème fondamental de l'analyse. Il s'agit d'une formule de nature globale (elle vaut sur I tout entier).

(B) Inégalité de Taylor-Lagrange
S'il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $x \in I$, $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leqslant M$, alors

$$\forall x \in I \quad |R_{n,a}(x)| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} M \ .$$

Elle se déduit de la formule de Taylor avec reste intégral, en utilisant la majoration d'une intégrale en valeur absolue et la croissance de l'intégrale.

(C) Formule de Taylor-Young

$$R_{n,a}(x) \underset{x \to a}{=} \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} \, (x-a)^{n+1} + o\left((x-a)^{n+1}\right)$$

i.e.

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \, (x-a)^k + o\left((x-a)^{n+1}\right) \ .$$

Elle se déduit de la formule de Taylor avec reste intégral, en utilisant la continuité de la fonction $f^{(n+1)}$.

Ensuite, on reverra la notion de développement limité :

- existence et unicité de la partie régulière (Théorème 8 du document support) ;
- développements limités de référence (Proposition 10 du document support, à connaître par cœur) ;
- intégration d'un développement limité (Proposition 11 du document support) ;
- somme et produit de développements limités (Proposition 11 du document support) ;
- composée de développements limités (Proposition 11 du document support).

Enfin, on passera un temps substantiel à bien comprendre les Exemples 7–10 du document support qui donnent des applications classiques et fort utiles des développements limités.

Ce travail sur le cours est fondamental. Il convient de connaître toutes les définitions, ainsi que les énoncés et des démonstrations de chacun des résultats de ce chapitre.

R9. 3. *Voisinages.* —

1. Soit $a \in \mathbf{R}$. Énoncer la définition d'un voisinage du point a.
2. Énoncer la définition d'un voisinage de $+\infty$.

R9. 4. *Comparaison des monômes au voisinage de 0 et de $+\infty$.* — Soit $(p,q) \in \mathbf{Z}^2$.

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur p et q, pour que $x^p \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x^q)$.

(b) Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur p et q, pour que $x^p \underset{x\to 0}{=} \mathrm{O}(x^q)$.

(c) Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur p et q, pour que $x^p \underset{x\to +\infty}{=} \mathrm{o}(x^q)$.

(d) Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur p et q, pour que $x^p \underset{x\to +\infty}{=} \mathrm{O}(x^q)$.

R9. 5. *Vrai/Faux sur les équivalents.* — Soit $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Soient f, g, φ, ψ des fonctions de la variable réelle à valeurs complexes, définies sur un voisinage épointé $\mathcal{V}^*$ de a (i.e. un voisinage de a, privé du point a). On suppose que les fonctions f, g, φ, ψ ne s'annulent pas sur $\mathcal{V}^*$. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Si la réponse est « Vrai », alors démontrer le résultat. Si la réponse est « Faux », argumenter au moyen un contre-exemple.

(a) Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \varphi(x)$ alors $f(x) - \varphi(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

(b) Si $f(x) - \varphi(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \varphi(x)$.

(c) Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \varphi(x)$ et $g(x) \underset{x\to a}{\sim} \psi(x)$ alors $f(x) + g(x) \underset{x\to a}{\sim} \varphi(x) + \psi(x)$.

(d) Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \varphi(x)$ et $g(x) \underset{x\to a}{\sim} \psi(x)$ alors $f(x)g(x) \underset{x\to a}{\sim} \varphi(x)\psi(x)$.

(e) Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \varphi(x)$ alors $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{1}{\varphi(x)}$.

(f) Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \varphi(x)$ et $g(x) \underset{x\to a}{\sim} \psi(x)$ alors $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$.

(g) Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \varphi(x)$ alors $\exp(f(x)) \underset{x\to a}{\sim} \exp(\varphi(x))$.

(h) Si les fonctions f et g sont à valeurs dans $\mathbf{R}_{>0}$ et vérifient $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \varphi(x)$ alors

$$\ln(f(x)) \underset{x\to a}{\sim} \ln(\varphi(x)) \ .$$

(i) Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \varphi(x)$ et $\varphi(x) \underset{x\to a}{\sim} \psi(x)$ alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \psi(x)$.

R9. 6. *Équivalents et signes.* — Soit $a \in \mathbf{R}$. Soit $\mathcal{V}$ un voisinage de a. Il existe donc $r \in \mathbf{R}_{>0}$ tel que $]a-r, a+r[\subset \mathcal{V}$. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathcal{V}$, à valeurs réelles, telles que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$. On suppose que, pour tout $x \in \mathcal{V}$, $g(x) > 0$. Démontrer qu'il existe $\rho \in]0, r[$ tel que, pour tout $x \in]a-\rho, a+\rho[$, $f(x) > 0$.

R9. 7. *Équivalents versus o.* — Soit $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Soient f et g deux fonctions de la variable réelle à valeurs complexes, définies sur un voisinage épointé $\mathcal{V}$ de a. On suppose que la fonction g ne s'annule sur $\mathcal{V}$. Démontrer l'équivalence suivante.

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + \mathrm{o}(g(x))$$

R9. 8. *Dérivabilité versus existence d'un DL à l'ordre 1.* — Soit $a \in \mathbf{R}$. Soit f une fonction de la variable réelle à valeurs complexes, définie sur un voisinage $\mathcal{V}$ de a. Démontrer que la fonction f est dérivable en a si et seulement si la fonction f possède un développement limité à l'ordre 1 au point a.

R9. 9. *Somme de termes en progression géométrique et DL.* — Soit $n \in \mathbf{N}$.

1. Simplifier la somme $\sum_{k=0}^{n} x^k$, pour tout $x \in]-1,1[$.
2. En déduire que la fonction $x \longmapsto \frac{1}{1-x}$ admet un développement limité à l'ordre n au point $x=0$. On explicitera ce DL.
3. En déduire que les fonctions $x \longmapsto \ln(1+x)$ et $x \longmapsto \arctan(x)$ possèdent des développements limités à tout ordre au point $x=0$. On explicitera ces DL.

R9. 10. *Neuf calculs de développements limités.* — Déterminer le développement limité en $x=0$ à l'ordre 4 de chacune des fonctions suivantes.

(a) $x \longmapsto \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ (b) $x \longmapsto \frac{1}{x^2+x+1}$ (c) $x \longmapsto \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$

(d) $x \longmapsto \sqrt{1+\sin(x)}$ (e) $x \longmapsto \tan\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)$ (f) $x \longmapsto \exp(\mathbf{Arcsin(x)})$

(g) $x \longmapsto \sqrt{\frac{x}{\tan(x)}}$ (h) $x \longmapsto \frac{\mathrm{ch}(x)-1}{\cos(x)-1}$ (i) $x \longmapsto (1+2x)^{\frac{1}{1+x}}$

R9. 11. *Cinq applications des développements limités.* —

1. Calculer le développement limité en $x=0$ à l'ordre 2 de $x \longmapsto \ln(e+x)$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
2. Étudier la limite éventuelle de $\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ quand x tend vers 0, où $a>0$ et $b>0$.
3. Étudier la limite éventuelle de $\frac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{3x+5}}{1-\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)}$ quand x tend vers 1.
4. Pour tout $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, on note $f_{a,b}$ la fonction définie par :

$$f_{a,b} \colon t \longmapsto \frac{t}{\ln(1+t)-t} + \frac{a}{t} + \frac{b}{t^2}.$$

   (a) À quelle condition sur $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, la fonction $f_{a,b}$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

   (b) On suppose que les réels a et b sont tels que la fonction $f_{a,b}$ est prolongeable par continuité en 0. On note (abusivement) $f_{a,b}$ le prolongement par continuité de $f_{a,b}$ en 0. La fonction $f_{a,b}$ est-elle dérivable en 0 ?

5. On fixe un repère du plan. Déterminer l'asymptote Δ en $+\infty$ de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction

$$f \colon x \longmapsto \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}$$

ainsi que la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ au voisinage de $+\infty$.