M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Un corrigé du devoir surveillé n°8 (4h)

Théorèmes de Lebesgue et intégrales à paramètre
Endomorphismes des espaces euclidiens
Probabilités

Samedi 2 avril 2022

M. Carrot

Consignes

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier,

les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Vous êtes invité à encadrer les résultats de vos calculs.

Si vous êtes amené à repérer ce qui peut vous sembler être une erreur d'énoncé, vous le signalerez sur votre copie et devrez poursuivre votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

EXERCICE 1 : Calcul de l'intégrale de Dirichlet

L'objectif de cet exercice est de démontrer la convergence de l'intégrale de Dirichlet :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

et de calculer sa valeur. On considère la fonction $f : [0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ définie par :

$$\forall (x,t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[, \quad f(x,t) = \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}.$$

On définit également la fonction $u : [0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ par :

$$\forall (x,t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[, \quad u(x,t) = -\frac{x\sin(t) + \cos(t)}{1+x^2} e^{-xt}.$$

Dans l'exercice, on pourra utiliser **sans la démontrer** l'inégalité $|\sin(t)| \leqslant |t|$ valable pour tout $t \in \mathbf{R}$.

Partie I - Préliminaires

Q1. — Soit $x > 0$. Montrer que la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

La fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbf{R}_+^*$ par opérations sur les fonctions usuelles.
Pour tout $t > 0$, $|\sin(t)| \leqslant |t|$, donc $|f(x,t)| = \left|\frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}\right| \leqslant e^{-xt}$.
Or $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$ (car $x > 0$), donc, par comparaison, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$.

Q2. — Démontrer que l'intégrale I est convergente si et seulement si l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt$$

est convergente. En déduire que l'intégrale I converge.

Les fonctions $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ et $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ sont continues par morceaux sur $]0,+\infty[$.
Soient ε et A des réels tels que $0 < \varepsilon < A$. Les fonctions $u\colon t \mapsto 1-\cos(t)$ et $v\colon t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[\varepsilon, A]$. Par intégration par parties :

$$(\star) \qquad \underbrace{\int_\varepsilon^A \frac{\sin(t)}{t}dt}_{I(\varepsilon,A)} = \frac{1-\cos(A)}{A} - \frac{1-\cos(\varepsilon)}{\varepsilon} + \underbrace{\int_\varepsilon^A \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt}_{J(\varepsilon,A)} .$$

• En spécialisant $(\star)$ à $A=1$, il vient

$$I(\varepsilon,1) = 1-\cos(1) - \frac{1-\cos(\varepsilon)}{\varepsilon} + J(\varepsilon,1) .$$

Comme $\dfrac{1-\cos(\varepsilon)}{\varepsilon} = \dfrac{1-(1-\varepsilon^2/2+o(\varepsilon^2))}{\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon^2/2+o(\varepsilon^2)}{\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon}{2}+o(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$, on en déduit que $I(\varepsilon,1)$ a une limite finie lorsque ε tend vers 0 si et seulement si $J(\varepsilon,1)$ a une limite finie lorsque ε tend vers 0. Les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}dt$ et $\displaystyle\int_0^A \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt$ ont donc même nature.
• En spécialisant $(\star)$ à $\varepsilon = 1$, il vient

$$I(1,A) = \frac{1-\cos(A)}{A} - 1 + \cos(1) + J(1,A) .$$

Comme la fonction $A \mapsto 1-\cos(A)$ est bornée, $\dfrac{1-\cos(A)}{A} \underset{A\to+\infty}{\to} 0$, on en déduit que $I(1,A)$ a une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$ si et seulement si $J(1,A)$ a une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$. Les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt$ ont donc même nature.

Comme $\dfrac{1-\cos(t)}{t^2} = \dfrac{1-\cos(t)}{t^2} = \dfrac{1-(1-t^2/2+o(t^2))}{t^2} = \dfrac{t^2/2+o(t^2)}{t^2} = \dfrac{1}{2}+o(1) \underset{t\to 0}{\to} 1/2$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est prolongeable par continuité en 0, donc intégrable sur $]0,1]$.
On a $0 \leqslant \dfrac{1-\cos(t)}{t^2} = \dfrac{O(1)}{t^2} = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Or la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann et $2>1$), donc, par comparaison, la fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2} \geqslant 0$ est donc intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$, i.e. l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt$ est donc convergente. D'après la première partie de la réponse, l'intégrale I converge.

Q3. — Soit $x \geqslant 0$. Montrer que $t \mapsto u(x,t)$ est une primitive de la fonction $t \mapsto \sin(t)e^{-xt}$ sur $]0,+\infty[$.

La fonction $t \mapsto u(x,t)$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et, pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= -\frac{x\cos(t) - \sin(t)}{1+x^2}e^{-xt} - \frac{x\sin(t)+\cos(t)}{1+x^2} \times (-x)e^{-xt} \\ &= \frac{-x\cos(t) + \sin(t) + x^2\sin(t) + x\cos(t)}{1+x^2}e^{-xt} \\ &= \frac{(1+x^2)\sin(t)}{1+x^2}e^{-xt} = \sin(t)e^{-xt},\end{aligned}$$

donc la fonction $t \mapsto u(x,t)$ est bien une primitive de la fonction $t \mapsto \sin(t)e^{-xt}$ sur $\mathbf{R}_+^*$.

Dans la suite de l'exercice, on définit la fonction $F : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)dt.$$

Partie II - Calcul de F sur $]0, +\infty[$

Q4. — Montrer que $|F(x)| \leqslant \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$. En déduire la limite de F en $+\infty$.

• Soit $x > 0$. Pour tout $t > 0$, $|f(x,t)| = \left|\frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}\right| \leqslant e^{-xt}$. D'où, par l'inégalité triangulaire généralisée et par positivité de l'intégrale convergente (avec "$0 \leqslant +\infty$"), on a :

$$|F(x)| = \left|\int_0^{+\infty} f(x,t)dt\right| \leqslant \int_0^{+\infty} |f(x,t)|dt \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \frac{1}{x}.$$

• Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc, d'après le théorème d'encadrement :

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0.$$

Q5. — Soit $a > 0$. Montrer que la fonction F est dérivable sur $[a, +\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x \in [a, +\infty[, \quad F'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}dt.$$

Soit $a > 0$.

— Pour tout $x \in [a, +\infty[$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$ (d'après Q1 avec $x \geqslant a > 0$).

— Pour tout $t > 0$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ (constante fois une exponentielle) et, pour tout $x \geqslant a$,

$$t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\sin(t)e^{-xt}$$

est continue (par morceaux) sur $\mathbf{R}_+^*$.

— Pour tout $x \geqslant a$, pour tout $t > 0$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = |-\sin(t)e^{-xt}| \leqslant e^{-xt} \leqslant e^{-at} = \varphi(t),$$

où φ est intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$ (car $a > 0$).

D'où, d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et, pour tout $x \geqslant a$:

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt = -\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}dt.$$

Q6. — En déduire que la fonction F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et déterminer une expression de $F'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$. Conclure que :

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x).$$

La fonction F est dérivable sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, donc F est dérivable sur $\displaystyle\bigcup_{a>0}[a, +\infty[=]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$, $F'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}dt$.

Soit $x > 0$. D'après Q3 :

$$\int_0^1 \sin(t)e^{-xt}dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \sin(t)e^{-xt}dt = \lim_{\varepsilon \to 0} u(x,1) - u(x,\varepsilon) = u(x,1) + \frac{1}{1+x^2}$$

et

$$\int_1^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}dt = \lim_{A \to +\infty} \int_1^A \sin(t)e^{-xt}dt = \lim_{A \to +\infty} u(x,A) - u(x,1) = -u(x,1)\ .$$

On en déduit

$$F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}\ .$$

Comme la fonction F est une primitive de F' sur l'intervalle $\mathbf{R}_+^*$, donc il existe $K \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $x > 0$,

$$F(x) = -\arctan(x) + K.$$

Enfin, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$, donc $-\dfrac{\pi}{2} + K = 0$, donc $K = \dfrac{\pi}{2}$, et, par suite, pour tout $x > 0$,

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x).$$

Partie III - Conclusion

On considère les fonctions $F_1 : [0,1] \to \mathbf{R}$ et $F_2 : [0,1] \to \mathbf{R}$ définies par :

$$\forall x \in [0,1], \quad F_1(x) = \int_0^1 f(x,t)dt \quad \text{et} \quad F_2(x) = \int_1^{+\infty} f(x,t)dt.$$

Q7. — Montrer que la fonction F_1 est continue sur $[0,1]$.

— Pour tout $t \in]0,1]$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[0,1]$.

— Pour tout $x \in [0,1]$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,1]$.

— Pour tout $t \in]0,1]$, pour tout $x \in [0,1]$,

$$|f(x,t)| = \left|\frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}\right| \leqslant e^{-xt} \leqslant 1 = \varphi(t),$$

où φ est intégrable sur $]0,1]$ (constante sur un intervalle borné).

D'où, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, $F_1 : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(x,t)dt$ est continue sur $[0,1]$.

Q8. — Soit $x \in [0,1]$. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{u(x,t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et que :

$$F_2(x) = \frac{x\sin(1)+\cos(1)}{1+x^2}e^{-x} + \int_1^{+\infty}\frac{u(x,t)}{t^2}dt.$$

• La fonction $t \mapsto \dfrac{u(x,t)}{t^2}$ est continue par morceaux sur $[1,+\infty[$.
Pour tout $t \geqslant 1$

$$0 \leqslant \left|\frac{u(x,t)}{t^2}\right| = \frac{1}{t^2} \times \left|-\frac{x\sin(t)+\cos(t)}{1+x^2}e^{-xt}\right| = \frac{1}{t^2} \times \underset{t\to+\infty}{O}(1) = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Or la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann et $2>1$), donc, par comparaison, la fonction $t \mapsto \dfrac{u(x,t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc, en particulier, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{u(x,t)}{t^2}dt$ converge.

• Soit $A>1$. Les fonctions $v\colon t \mapsto \dfrac{1}{t}$ et $w\colon t \mapsto u(x,t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[1,A]$. Par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_1^A f(x,t)dt &= \frac{u(x,A)}{A} - u(x,1) + \int_1^A \frac{u(x,t)}{t^2}dt \\ &= \frac{x\sin(1)+\cos(1)}{1+x^2}e^{-x} - \frac{x\sin(A)+\cos(A)}{1+x^2}\frac{e^{-Ax}}{A} + \int_1^A\frac{u(x,t)}{t^2}dt\end{aligned}$$

Nous savons déjà que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x,t)dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2}dt$ convergent. De plus

$$\frac{x\sin(A)+\cos(A)}{1+x^2}\,\frac{e^{-Ax}}{A} \underset{A\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{A}\right)\ .$$

En faisant tendre A vers $+\infty$, dans l'identité livrée par l'intégration par parties, il vient avec le théorème d'encadrement :

$$F_2(x) = \frac{x\sin(1)+\cos(1)}{1+x^2}\,e^{-x} + \int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2}dt.$$

Q9. — Montrer que la fonction F_2 est continue sur $[0,1]$.

• Commençons par établir que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2}dt$ est continue sur $[0,1]$.

— Pour tout $x \in [0,1]$, $t \mapsto \dfrac{u(x,t)}{t^2}$ est continue par morceaux sur $[1,+\infty[$.

— Pour tout $t \geqslant 1$, $x \mapsto \dfrac{u(x,t)}{t^2}$ est continue sur $[0,1]$.

— Pour tout $x \in [0,1]$, pour tout $t \geqslant 1$,

$$\left|\frac{u(x,t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}\frac{x|\sin(t)|+|\cos(t)|}{1+x^2}e^{-xt} \leqslant \frac{1}{t^2}\frac{1+1}{1}\times 1 = \frac{2}{t^2} = \varphi(t)$$

où φ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann et $2>1$).

D'où, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2}dt$ est continue sur $[0,1]$.

• De plus, la fonction $x \mapsto \dfrac{x\sin(1)+\cos(1)}{1+x^2}e^{-x}$ est continue sur $[0,1]$ (par opérations sur les fonctions usuelles), donc F_2 est continue sur $[0,1]$ comme somme de fonctions continues.

Q10. — En déduire que la fonction F est continue en 0, puis déterminer la valeur de l'intégrale I.

• D'où, pour tout $x \in [0,1]$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)dt$ existe (on le savait déjà, cf Q1 et Q2) et

$$F(x) = \int_0^1 f(x,t)dt + \int_1^{+\infty} f(x,t)dt = F_1(x) + F_2(x),$$

donc $F = F_1 + F_2$, donc F est continue sur $[0,1]$ comme somme de fonctions continues.

• On a donc, par continuité de F en 0, $I = F(0) = \displaystyle\lim_{x\to0^+} F(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$.

EXERCICE 2 : Extremums d'une forme quadratique sur la boule unité fermée

On se donne un entier $n \geqslant 2$. On rappelle que la norme euclidienne usuelle $\|\cdot\|$ sur $\mathbf{R}^n$ est définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}^n, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

On note $B_n = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| \leqslant 1\}$ la boule unité fermée de $\mathbf{R}^n$.
On fixe des réels $a_{i,j}$ pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ et on considère l'application $f : B_n \to \mathbf{R}$ définie par :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in B_n, \quad f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} x_i x_j \right) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j.$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier les extremums de la fonction f sur la partie B_n. On définit la matrice $M_f \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ comme la matrice **symétrique** dont les coefficients $(m_{i,j})$ vérifient :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad m_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \textbf{si } i = j \\ a_{i,j}/2 & \textbf{si } i < j. \end{cases}$$

Si M est une matrice à coefficients réels, on note M^T sa matrice transposée.

Partie I - Etude d'un exemple

Dans cette **partie**, on suppose que $n = 2$ et que l'application $f : B_2 \to \mathbf{R}$ est définie par :

$$\forall (x_1, x_2) \in B_2, \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2.$$

Q11. — Justifier que l'application f admet un maximum et un minimum sur B_2.

• La partie $B_2 = \{x \in \mathbf{R}^2 : \|x\| \leqslant 1\}$ est bien sûr bornée. D'après le cours, B_2 est une partie fermée de $\mathbf{R}^2$ puisqu'il s'agit d'une boule fermée. Comme $\mathbf{R}^2$ est un espace vectoriel de dimension finie, B_2 est compacte.
• Enfin

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 \end{array} \right.$$

est polynomiale en ses coordonnés, donc continue sur $\mathbf{R}^2$.
• D'après le théorème des bornes atteintes, f admet un maximum et un minimum sur B_2.

Q12. — En étudiant la fonction $t \mapsto f(\cos(t), \sin(t))$, déterminer les extremums de l'application f sur la frontière $S_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ de B_2.

• Pour tout $(x_1, x_2) \in S^2$, il existe $t \in [0, 2\pi]$ tel que $(x_1, x_2) = (\cos(t), \sin(t))$.
• Posons $h : t \in [0, 2\pi] \mapsto f(\cos(t), \sin(t)) = \cos^2(t) + \sin^2(t) + 4\cos(t)\sin(t) = 1 + 2\sin(2t)$.
D'après les variations de la fonction sin, on a :

t	0		$\pi/4$		$3\pi/4$		$5\pi/4$		$7\pi/4$		2π
$h(t)$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

donc h a pour maximum 3 et pour minimum -1, donc f a pour maximum 3 et pour minimum -1 sur la frontière S_2.

Q13. — La fonction f est polynomiale en les deux variables x_1 et x_2 donc de classe $\mathcal{C}^1$. On appelle **point critique de** f tout point $(x_1, x_2) \in B_2$ tel que

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 0\ .$$

Déterminer les points critiques de f dans la boule unité ouverte $B_2' = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ de $\mathbf{R}^2$.

On a, pour tout $(x_1, x_2) \in B_2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 2x_2 + 4x_1.$$

Par suite :

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2) \in B_2' \text{ point critique de } f &\iff \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 0 \\
&\iff \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_2 + 4x_1 = 0 \end{cases} \\
&\iff x_1 = x_2 = 0.
\end{aligned}$$

f admet donc un unique point critique sur B_2', le point $(0, 0)$.

Q14. — Soit M le maximum (resp. m le minimum) de f sur B_2. On rappelle que si M est atteint en un point $x_M \in B_2'$ alors x_M est un point critique de f et que, de même, si m est atteint en un point $x_m \in B_2'$ alors x_m est un point critique de f . Démontrer que le maximum M de f sur B_2 est 3 et que le minimum m de f sur B_2 est -1.

• Le maximum M peut être atteint sur S_2, et donc valoir 3, où en un point critique de B_2' (qui est un ouvert), donc en $(0, 0)$. Or $f(0, 0) = 0$, donc le maximum de f sur B_2 est 3, atteint sur S_2 (et plus précisément en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$).

• De même, le minimum peut être atteint sur S_2, et donc valoir -1, où en un point critique de B_2', donc en $(0, 0)$. Or $f(0, 0) = 0$, donc le minimum de f sur B_2 est -1, atteint sur S_2 (et plus précisément en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$).

Q15. — Vérifier que la plus grande valeur propre de M_f est égale au maximum de f sur B_2 et que la plus petite valeur propre de M_f est égale au minimum de f sur B_2.

On a $M_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, donc $\chi_{M_f}(X) = (X-1)^2 - 4 = (X-3)(X+1)$, donc $\mathrm{Sp}(M_f) = \{-1, 3\}$ et on a donc bien la propriété demandée.

Partie II - Le cas général

On ne suppose plus dans cette **partie** que $n = 2$. On considère un vecteur $x = (x_1, \dots, x_n) \in B_n$ et on note $X = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

Q16. — Montrer que $f(x) = X^T M_f X$.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $(M_f X)_i = \sum_{j=1}^{n} (M_f)_{i,j} (X)_j = \sum_{j=1}^{n} (M_f)_{i,j} x_j$, donc

$$\begin{aligned}
X^T M_f X &= \sum_{i=1}^{n} (X^T)_i (M_f X)_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (M_f)_{i,j} x_i x_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} (M_f)_{i,i} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} (M_f)_{i,j} x_i x_j + \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} (M_f)_{i,j} x_i x_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{m_{i,j}}{2} x_i x_j + \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{m_{i,j}}{2} x_i x_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{m_{i,j}}{2} x_i x_j + \sum_{1 \leqslant j < i \leqslant n} \frac{m_{i,j}}{2} x_i x_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{m_{i,j}}{2} x_i x_j + \sum_{1 \leqslant j < i \leqslant n} \frac{m_{j,i}}{2} x_i x_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{m_{i,j}}{2} x_i x_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j \\
&= \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j = f(x).
\end{aligned}$$

Q17. — Justifier que la matrice M_f est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

M_f est symétrique réelle, donc, d'après le théorème spectral, elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

Dans la suite, on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ les valeurs propres de M_f comptées avec leur multiplicité et on suppose que $\lambda_1 \leqslant \dots \leqslant \lambda_n$.
On fixe une matrice **orthogonale** $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que $M_f = PDP^{-1}$ où :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}).$$

On note $Y = P^{-1}X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

Q18. — Montrer les égalités $Y^TY = X^TX = \|x\|^2$.

On a $X = PY$, donc

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = X^TX = (PY)^T(PY) = Y^TP^TPY \underset{P\in\mathcal{O}_n(\mathbf{R})}{=} Y^TI_nY = Y^TY.$$

Q19. — On suppose que $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$. Montrer que $\lambda_1 \leqslant Y^TDY \leqslant \lambda_n$ et en déduire que $\lambda_1 \leqslant f(x) \leqslant \lambda_n$.

• Posons $Y = (y_1, \dots, y_n)^TP^{-1}X$. Alors, d'après la question précédente, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = Y^TY = \|x\|^2 \leqslant 1$ et, comme

$$Y^TDY = Y^T\begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2,$$

on a

$$\begin{aligned} Y^TDY &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_n y_i^2 \quad \text{(car pour tout } i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i \leqslant \lambda_n \text{ et } y_i^2 \geqslant 0) \\ &= \underbrace{\lambda_n}_{\geqslant 0} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}_{\leqslant 1} \leqslant \lambda_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad Y^TDY &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_1 y_i^2 \quad \text{(car pour tout } i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i \geqslant \lambda_1 \text{ et } y_i^2 \geqslant 0) \\ &= \underbrace{\lambda_1}_{\leqslant 0} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}_{\leqslant 1} \geqslant \lambda_1, \end{aligned}$$

donc on a bien $\lambda_1 \leqslant Y^TDY \leqslant \lambda_n$.

• Or, pour tout $x \in B_2$, comme P est orthogonale,

$$f(x) = X^T M_f X = X^T P D P^T X = (P^T X)^T D (P^T X) = (P^{-1} X)^T D (P^{-1} X) = Y^T D Y \in [\lambda_1, \lambda_n],$$

donc on a bien l'encadrement demandé.

Q20. — En déduire que si $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$, alors $\max_{B_n}(f) = \lambda_n$ et $\min_{B_n}(f) = \lambda_1$.

Supposons $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$.
• Soit X_1 un vecteur propre unitaire (quitte à le normaliser) de M_f associé à la valeur propre λ_1 et $x_1 \in \mathbf{R}^n$ tel que $x_1^T = X_1$. Alors :

— $\|x_1\| = \|X_1\| = 1$, donc $x_1 \in B_n$

— $f(x_1) = X_1^T M_f X_1 = X_1^T \lambda_1 X_1 = \lambda_1 X_1^T X_1 = \lambda_1 \|x_1\|^2 = \lambda_1$.

On a, pour tout $x \in B_n$, $f(x) \geqslant \lambda_1$ et $f(x_1) = \lambda_1$, donc on a bien $\min_{B_n}(f) = \lambda_1$, ***et ce minimum est atteint en*** x_1.
• On procède de même pour le maximum en prenant cette fois un vecteur propre unitaire de M_f associé à la valeur propre λ_n.

Q21. — Dans le cas où $\lambda_1 \geqslant 0$, déterminer le maximum et le minimum de f sur B_n.

Supposons $\lambda_1 \geqslant 0$.
• Alors, pour tout $x \in B_n$, en gardant les notations de cette partie, on a

$$f(x) = X^T M_f X = Y^T D Y = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\lambda_i}_{\geqslant 0} \underbrace{x_i^2}_{\geqslant 0} \geqslant 0,$$

et, comme $f((0, \ldots, 0)) = 0$, on a $\min_{B_n}(f) = 0$, atteint pour $x = 0$.
• L'étude faite sur le majorant dans les 2 questions précédentes reste valable ici, donc on a $\max_{B_n}(f) = \lambda_n$.
Si on a $\lambda_n \leqslant 0$, ***on aura de façon similaire*** $\max_{B_n}(f) = 0$ ***et*** $\min_{B_n}(f) = \lambda_1$.

Partie III - Application des résultats

Dans cette **partie**, on suppose que $n \geqslant 3$ et que l'application $f : B_n \to \mathbf{R}$ est définie par :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in B_n, \quad f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 2 x_i x_j.$$

Q22. — Déterminer le maximum et le minimum de l'application f sur B_n (on pourra commencer par déterminer le rang de la matrice $M_f - 2I_n$ où I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$).

On a $M_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a donc $M_f - 2I_n = \begin{pmatrix} -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{rg}(M_f - 2I_n) \leqslant 1$ (car toutes les colonnes de $M_f - 2I_n$ sont identiques) et $\mathrm{rg}(M_f - 2I_n) \geqslant 1$ (car ce n'est pas la matrice nulle), donc $\mathrm{rg}(M_f - 2I_n) = 1$.
D'où, d'après le théorème du rang, on a

$$\dim \ker(M_f - 2I_n) = n - \mathrm{rg}(M_f - 2I_n) = n - 1 \neq 0,$$

donc 2 est valeur propre de M_f et $E_2(M_f) = \ker(m_f - 2I_n)$ est de dimension $n-1$.
Comme M_f est diagonalisable, on en déduit :

— 2 est valeur propre de M_f de multiplicité exactement $n-1$.

— M_f a exactement n valeurs propres, comptées avec multiplicité, donc il reste une dernière valeur propre, que l'on note λ.

— χ_{M_f} est scindé, donc la trace de M_f est égale à la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité, donc :

$$n = \mathrm{tr}(M_f) = 2(n-1) + \lambda \Leftrightarrow \lambda = -n + 2.$$

On a donc $\mathrm{Sp}(f) = \{-n+2, 2\}$, et, comme $-n+2 < 0$ et $2 > 0$, on a :

$$\min_{B_n}(f) = -n+2 \quad \text{et} \quad \max_{B_n}(f) = 2.$$

Remarque : Pour trouver la dernière valeur propre de M_f, on aurait aussi pu remarquer que la somme sur chaque ligne de M_f vaut $-n+2$, donc que $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M_f associé à la valeur propre $2-n$, et un argument sur les dimensions des espaces propres permet alors de conclure qu'il n'y a pas d'autre valeur propre, et donc que $\mathrm{Sp}(M_f) = \{-n+2, 2\}$.

EXERCICE 3 : Retour à l'origine d'une marche aléatoire sur $\mathbf{Z}$

Dans cet exercice, nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant dans l'ensemble des entiers relatifs. A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve en 0. Ensuite, si le pion se trouve à l'étape n sur l'entier $x \in \mathbf{Z}$, alors à l'étape $n+1$, le pion a une chance sur 2 de se trouver en $x+1$ et une chance sur deux de se trouver en $x-1$, ceci indépendamment des mouvements précédents.

Pour modéliser cette situation, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on considère une suite $(X_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $S_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer la loi de la variable aléatoire T définie de la façon suivante :

1. si pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $S_n \neq 0$, on pose $T = +\infty$;
2. sinon, on pose $T = \min\{n \in \mathbf{N}^* \mid S_n = 0\}$.

L'événement $(T = +\infty)$ se réalise donc si et seulement si l'ensemble $\{n \in \mathbf{N}^* \mid S_n = 0\}$ est vide. Finalement, on définit les suites $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad p_n = P(S_n = 0) \quad \text{et} \quad q_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ P(T = n) & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

Partie I - Calcul de p_n

On fixe un entier $n \in \mathbf{N}$.

Q23. — Que représente la variable aléatoire S_n ?

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Chaque variable X_k modélise le pas de l'instant k, donc $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ modélise la positition du pion à l'instant n.
Comme $S_0 = 0$, S_0 modélise aussi la position du pion à l'instant 0.

Q24. — Calculer p_0, p_1 et p_2.

$p_0 = P(S_0 = 0) = 1$. Comme $S_1(\Omega) = X_1(\Omega) = \{\pm 1\}$, on a $p_1 = P(S_1 = 0) = 0$. Enfin, $p_2 = P(S_2 = 0) = P(X_1 + X_2 = 0)$.
D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X_1 = k)_{k\in X_1(\Omega)} = (X_1 = -1, X_1 = 1)$, on a

$$\begin{aligned} p_2 = P(X_1 + X_2 = 0) &= P(X_1 = 1 \cap X_1 + X_2 = 0) + P(X_1 = -1 \cap X_1 + X_2 = 0) \\ &= P(X_1 = 1 \cap X_2 = -1) + P(X_2 = -1 \cap X_1 = 1) \\ &= P(X_1 = 1)P(X_2 = -1) + P(X_1 = -1)P(X_2 = 1) \quad \text{(car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes)} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Q25. — Justifier que, si n est impair, alors on a $p_n = 0$.

Si n est impair, alors pour tout $\omega \in \Omega$, $S_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{X_k(\omega)}_{\in\{\pm 1\}}$ est la somme d'un nombre impair de nombres impairs, donc est impair.
Par suite, $p_n = P(S_n = 0) = 0$, car l'événement $(S_n = 0)$ est impossible (car 0 est un nombre pair).

On considère pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ la variable aléatoire Y_k définie par $Y_k = \dfrac{X_k + 1}{2}$. On admet que $(Y_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Q26. — Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Montrer que Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

On a $Y_k(\Omega) = \left(\dfrac{X_k+1}{2}\right)(\Omega) = \left\{\dfrac{1+1}{2}, \dfrac{-1+1}{2}\right\} = \{0,1\}$, donc Y_k suit une loi de Bernoulli.
De plus, $P(Y_k = 1) = P\left(\dfrac{X_k+1}{2} = 1\right) = P(X_k = 1) = \dfrac{1}{2}$, donc Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

Q27. — Pour $n > 0$, donner la loi de $Z_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ et exprimer S_n en fonction de Z_n.

• Les variables $(Y_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ suivent toutes une loi de Bernoulli et sont indépendantes, donc, pour tout $n > 0$, $Z_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ suit une loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{2}$ (se démontre aisément avec les fonctions génératrices).
Par suite, $Z_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$P(Z_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

• De plus,

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}X_i + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{n}{2} = \frac{S_n + n}{2},$$

donc $S_n = 2Z_n - n$.

Q28. — On suppose que $n = 2m$ avec $m \in \mathbf{N}$. Déduire de la question précédente que :

$$p_{2m} = \binom{2m}{m}\frac{1}{4^m}.$$

Pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, $2m > 0$, donc, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} p_{2m} &= P(S_{2m} = 0) = P(2Z_{2m} - 2m = 0) = P(Z_{2m} = m) \\ &= \binom{2m}{m} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} = \binom{2m}{m} \frac{1}{4^m}. \end{aligned}$$

Comme $\displaystyle\binom{0}{0}\frac{1}{4^0} = 1 = p_0$, ce résultat est encore valable pour $m = 0$.

Partie II - Fonction génératrice de la suite $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$

On note R_p le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} p_n x^n$ et f la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence.

Q29. — Montrer que $R_p \geqslant 1$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|p_n| = P(S_n = 0) \leqslant 1$, donc le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} p_n x^n$ est supérieur ou égal au rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} 1 x^n$, c'est-à-dire $R_p \geqslant 1$.

Q30. — Montrer que pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$p_{2m} = \frac{(-1)^m}{m!} \prod_{k=1}^{m} \left(-\frac{1}{2} - k + 1\right).$$

Pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^m}{m!} \prod_{k=1}^{m} \left(-\frac{1}{2} - k + 1\right) &= \frac{1}{m!} \prod_{k=1}^{m} \left(-\left(-\frac{1}{2} - k + 1\right)\right) \\ &= \frac{1}{m!} \prod_{k=1}^{m} \left(\frac{2k-1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{m!2^m} \prod_{k=1}^{m} (2k-1) \\ &= \frac{1}{m!2^m} \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{m}(2k-1)\prod_{k=1}^{m}(2k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{m}(2k)} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{m!2^m} \frac{\prod_{k=1}^{2m} k}{2^m \prod_{k=1}^{m} k}$$

$$= \frac{1}{m!2^m} \frac{(2m)!}{2^m m!} = \frac{(2m)!}{m!m!} \frac{1}{2^m 2^m} = \binom{2m}{m} \frac{1}{4^m} = p_{2m}$$

Q31. — Déterminer un nombre $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $f(x) = (1-x^2)^\alpha$ pour tout $x \in]-1,1[$.

D'après le cours, pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n} (\alpha-k+1) x^n.$$

Par suite, pour tout $x \in]-1,1[$, comme $(-x^2) \in]-1,1[$, on a

$$(1-x^2)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n} (\alpha-k+1)(-x^2)^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \prod_{k=1}^{n} (\alpha-k+1) x^{2n}.$$

Par ailleurs, avec les expressions trouvées pour p_n dans la partie précédente, on a, pour tout $x \in]-1,1[$ (on a $R_p \geqslant 1$),

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n = p_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{p_{2n+1}}_{=0} x^{2n+1} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_{2n} x^{2n}. \end{aligned}$$

D'où, pour $\alpha = -1/2$, comme $p_{2n} = \dfrac{(-1)^n}{n!} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (\alpha-k+1)$ pour tout $n \geqslant 1$ d'après la question précédente, on a $f(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ pour tout $x \in]-1,1[$.

Partie III - Loi de la variable aléatoire T

On note R_q le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} q_n x^n$ et g la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on considère également la fonction $g_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $g_n(x) = q_n x^n$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

Q32. — Calculer q_1 et q_2.

• Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $T = n \Rightarrow S_n = 0$, donc $(T = n) \subset (S_n = 0)$, donc $P(T = n) \leqslant P(S_n = 0)$.
Or, pour tout n impair, $P(S_n = 0) = 0$, donc, pour tout n impair, $q_n = P(T = n) = 0$. En particulier, pour $n = 1$, $q_1 = 0$.
• $S_1 = 0$ est impossible, donc, par définition de T, on a $T \geqslant 2$ et $T = 2 \Leftrightarrow S_2 = 0$, donc $q_2 = P(T = 2) = P(S_2 = 0) = p_2 = \dfrac{1}{2}$.

Q33. — Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 0} g_n$ converge normalement sur $[-1, 1]$. En déduire que $R_q \geqslant 1$.

• Pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$|g_n(x)| = |q_n x^n| = P(T = n)|x|^n \leqslant P(T = n),$$

donc $\|g_n\|_{\infty,[-1,1]} \leqslant P(T = n)$.
Or $\sum_{n \geqslant 0} P(T = n)$ converge (et vaut $1 - P(T = +\infty)$ car $T(\Omega) = \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$), donc, par comparaison, $\sum_{n \geqslant 0} \|g_n\|_{\infty,[-1,1]}$ converge, donc la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} g_n$ converge normalement sur $[-1, 1]$.
• Comme $\sum_{n \geqslant 0} g_n$ converge normalement sur $[-1, 1]$, $\sum_{n \geqslant 0} g_n$ converge simplement sur $[-1, 1]$, donc, en particulier, pour $x = 1$, $\sum_{n \geqslant 0} g_n(1)$ converge, ce qui assure que

$$R_q = \sup \left\{ \rho > 0 : \sum_{n \geqslant 0} q_n \rho^n \text{ converge} \right\} \geqslant 1.$$

Dans la suite, on **admet** la relation :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad p_n = \sum_{k=0}^{n} p_k \, q_{n-k}.$$

Q34. — Démontrer que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x)g(x) = f(x) - 1.$$

f et g sont deux fonctions développables en série entière au moins sur $]-1, 1[$, donc, par produit de Cauchy, fg est développable en série entière au moins sur $]-1, 1[$ et, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$
\begin{aligned}
f(x)g(x) &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\right) x^n \\
&= \left(\sum_{k=0}^{0} p_k q_{n-k}\right) x^0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\right) x^n \\
&= p_0 q_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x^n \quad \text{(d'après la relation admise pour tout } n \in \mathbf{N}^*) \\
&= 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x^n \\
&= -1 + p_0 x^0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x^n \\
&= -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n = -1 + f(x).
\end{aligned}
$$

Q35. — En déduire que $g(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$ pour tout $x \in]-1,1[$, puis calculer le développement en série entière de la fonction $x \mapsto 1 - \sqrt{1-x^2}$ en précisant son rayon de convergence.

• Comme, pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ (d'après la question Q31), la relation obtenue à la question précédente devient :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (1-x^2)^{-1/2} g(x) = (1-x^2)^{-1/2} - 1,$$

donc, en multipliant de part et d'autre par $\sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{1/2}$, on a bien, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$g(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}.$$

• Pour tout $x \in]-1,1[$,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n} (\alpha - k + 1) x^n,$$

donc, pour $\alpha = 1/2$, on a , pour tout $x \in]-1,1[$, comme $(-x^2) \in]-1,1[$,

$$\sqrt{1-x^2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - k + 1\right) (-x^2)^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - k + 1\right) x^{2n},$$

donc

$$g(x) = 1 - \sqrt{1-x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - k + 1\right) x^{2n},$$

où le rayon de convergence de cette série entière vaut 1.

Q36. — En déduire une expression de q_n pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

Pour tout $x \in]-1,1[$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - k + 1\right) x^{2n}$, donc, par unicité du développement en série entière sur $]-1,1[$, on a :

$$q_0 = 0, \quad \left(\forall n \in \mathbf{N}^*, q_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - k + 1\right)\right) \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbf{N}, q_{2n+1} = 0)\,.$$

Q37. — En utilisant les questions Q33 et Q35, déterminer la valeur de $P(T = +\infty)$. Interpréter le résultat.

• Comme $T(\Omega) = \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$, on a

$$P(T = +\infty) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} P(T = n) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} q_n = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} q_n 1^n = 1 - g(1).$$

• Or, comme pour tout $n \in \mathbf{N}$, g_n est continue sur $[-1,1]$ et $\sum_{n \geqslant 0} g_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[-1,1]$ (d'après la question Q33), la fonction $g = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n$ est continue sur $[-1,1]$. En particulier, elle est continue en 1, donc

$$\begin{aligned} g(1) &= \lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^-} 1 - \sqrt{1 - x^2} \quad \text{(d'après l'expression trouvée en Q35)} \\ &= 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

• On a donc $P(T = +\infty) = 1 - g(1) = 0$, donc l'événement $T = +\infty$ est négligeable. Le pion reviendra donc à l'origine à un instant donné presque sûrement.

Q38. — La variable aléatoire T admet-elle une espérance ?

Pour se raccrocher au programme, on considère que $T(\Omega) = \mathbf{N}$.

$g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n P(T = n)$ est la fonction génératrice de T.

D'après le cours, T admet une espérance si et seulement si g est dérivable en 1. Or, pour tout $x \in]-1,1[$, $g(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$, donc g est dérivable sur $]-1,1[$ et, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} +\infty.$$

g est continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$ et $\lim_{x \to 1^-} g'(x) = +\infty$, donc, d'après le théorème de la limite de la dérivée, g n'est pas dérivable en 1, et, par suite, T n'admet pas d'espérance.