M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Devoir surveillé n°8 (4h)

Théorèmes de Lebesgue et intégrales à paramètre
Endomorphismes des espaces euclidiens
Probabilités

Samedi 2 avril 2022

David BLOTTIÈRE

Consignes

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier,

les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Vous êtes invité à encadrer les résultats de vos calculs.

Si vous êtes amené à repérer ce qui peut vous sembler être une erreur d'énoncé, vous le signalerez sur votre copie et devrez poursuivre votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

EXERCICE 1 : Calcul de l'intégrale de Dirichlet

L'objectif de cet exercice est de démontrer la convergence de l'intégrale de Dirichlet :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

et de calculer sa valeur. On considère la fonction $f : [0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ définie par :

$$\forall (x,t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[, \quad f(x,t) = \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}.$$

On définit également la fonction $u : [0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ par :

$$\forall (x,t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[, \quad u(x,t) = -\frac{x\sin(t) + \cos(t)}{1+x^2} e^{-xt}.$$

Dans l'exercice, on pourra utiliser **sans la démontrer** l'inégalité $|\sin(t)| \leqslant |t|$ valable pour tout $t \in \mathbf{R}$.

Partie I - Préliminaires

Q1. — Soit $x > 0$. Montrer que la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Q2. — Démontrer que l'intégrale I est convergente si et seulement si l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt$$

est convergente. En déduire que l'intégrale I converge.

Q3. — Soit $x \geqslant 0$. Montrer que $t \mapsto u(x,t)$ est une primitive de la fonction $t \mapsto \sin(t)e^{-xt}$ sur $]0, +\infty[$.

Dans la suite de l'exercice, on définit la fonction $F : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t) dt.$$

Partie II - Calcul de F sur $]0,+\infty[$

Q4. — Montrer que $|F(x)| \leqslant \dfrac{1}{x}$ pour tout $x>0$. En déduire la limite de F en $+\infty$.

Q5. — Soit $a>0$. Montrer que la fonction F est dérivable sur $[a,+\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x \in [a,+\infty[, \quad F'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-xt} dt.$$

Q6. — En déduire que la fonction F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et déterminer une expression de $F'(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$. Conclure que :

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x).$$

Partie III - Conclusion

On considère les fonctions $F_1 : [0,1] \to \mathbf{R}$ et $F_2 : [0,1] \to \mathbf{R}$ définies par :

$$\forall x \in [0,1], \quad F_1(x) = \int_0^1 f(x,t)dt \quad \text{et} \quad F_2(x) = \int_1^{+\infty} f(x,t)dt.$$

Q7. — Montrer que la fonction F_1 est continue sur $[0,1]$.

Q8. — Soit $x \in [0,1]$. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{u(x,t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et que :

$$F_2(x) = \frac{x\sin(1)+\cos(1)}{1+x^2} e^{-x} + \int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2} dt.$$

Q9. — Montrer que la fonction F_2 est continue sur $[0,1]$.

Q10. — En déduire que la fonction F est continue en 0, puis déterminer la valeur de l'intégrale I.

EXERCICE 2 : Extremums d'une forme quadratique sur la boule unité fermée

On se donne un entier $n \geqslant 2$. On rappelle que la norme euclidienne usuelle $\|\cdot\|$ sur $\mathbf{R}^n$ est définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}^n, \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

On note $B_n = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| \leqslant 1\}$ la boule unité fermée de $\mathbf{R}^n$.
On fixe des réels $a_{i,j}$ pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ et on considère l'application $f : B_n \to \mathbf{R}$ définie par :

$$\forall (x_1,\ldots,x_n) \in B_n, \quad f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n a_{i,j} x_i x_j \right) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j.$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier les extremums de la fonction f sur la partie B_n. On définit la matrice $M_f \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ comme la matrice **symétrique** dont les coefficients $(m_{i,j})$ vérifient :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad m_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{si } i = j \\ a_{i,j}/2 & \text{si } i < j. \end{cases}$$

Si M est une matrice à coefficients réels, on note M^T sa matrice transposée.

Partie I - Etude d'un exemple

Dans cette **partie**, on suppose que $n = 2$ et que l'application $f : B_2 \to \mathbf{R}$ est définie par :

$$\forall (x_1, x_2) \in B_2, \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2.$$

Q11. — Justifier que l'application f admet un maximum et un minimum sur B_2.

Q12. — En étudiant la fonction $t \mapsto f(\cos(t), \sin(t))$, déterminer les extremums de l'application f sur la frontière $S_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ de B_2.

Q13. — La fonction f est polynomiale en les deux variables x_1 et x_2 donc de classe $\mathcal{C}^1$. On appelle **point critique de** f tout point $(x_1, x_2) \in B_2$ tel que

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 0\ .$$

Déterminer les points critiques de f dans la boule unité ouverte $B_2' = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ de $\mathbf{R}^2$.

Q14. — Soit M le maximum (resp. m le minimum) de f sur B_2. On rappelle que si M est atteint en un point $x_M \in B_2'$ alors x_M est un point critique de f et que, de même, si m est atteint en un point $x_m \in B_2'$ alors x_m est un point critique de f . Démontrer que le maximum M de f sur B_2 est 3 et que le minimum m de f sur B_2 est -1.

Q15. — Vérifier que la plus grande valeur propre de M_f est égale au maximum de f sur B_2 et que la plus petite valeur propre de M_f est égale au minimum de f sur B_2.

Partie II - Le cas général

On ne suppose plus dans cette **partie** que $n = 2$. On considère un vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n) \in B_n$ et on note $X = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

Q16. — Montrer que $f(x) = X^T M_f X$.

Q17. — Justifier que la matrice M_f est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Dans la suite, on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ les valeurs propres de M_f comptées avec leur multiplicité et on suppose que $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$.
On fixe une matrice **orthogonale** $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que $M_f = PDP^{-1}$ où :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}).$$

On note $Y = P^{-1}X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

Q18. — Montrer les égalités $Y^TY = X^TX = \|x\|^2$.

Q19. — On suppose que $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$. Montrer que $\lambda_1 \leqslant Y^TDY \leqslant \lambda_n$ et en déduire que $\lambda_1 \leqslant f(x) \leqslant \lambda_n$.

Q20. — En déduire que si $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$, alors $\max_{B_n}(f) = \lambda_n$ et $\min_{B_n}(f) = \lambda_1$.

Q21. — Dans le cas où $\lambda_1 \geqslant 0$, déterminer le maximum et le minimum de f sur B_n.

Partie III - Application des résultats

Dans cette **partie**, on suppose que $n \geqslant 3$ et que l'application $f : B_n \to \mathbf{R}$ est définie par :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in B_n, \quad f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 2x_ix_j.$$

Q22. — Déterminer le maximum et le minimum de l'application f sur B_n (on pourra commencer par déterminer le rang de la matrice $M_f - 2I_n$ où I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$).

EXERCICE 3 : Retour à l'origine d'une marche aléatoire sur Z

Dans cet exercice, nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant dans l'ensemble des entiers relatifs. A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve en 0. Ensuite, si le pion se trouve à l'étape n sur l'entier $x \in \mathbf{Z}$, alors à l'étape $n+1$, le pion a une chance sur 2 de se trouver en $x+1$ et une chance sur deux de se trouver en $x-1$, ceci indépendamment des mouvements précédents.

Pour modéliser cette situation, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $S_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer la loi de la variable aléatoire T définie de la façon suivante :

1. si pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $S_n \neq 0$, on pose $T = +\infty$;
2. sinon, on pose $T = \min\{n \in \mathbf{N}^* \mid S_n = 0\}$.

L'événement $(T = +\infty)$ se réalise donc si et seulement si l'ensemble $\{n \in \mathbf{N}^* \mid S_n = 0\}$ est vide. Finalement, on définit les suites $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad p_n = P(S_n = 0) \quad \text{et} \quad q_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ P(T = n) & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

Partie I - Calcul de p_n

On fixe un entier $n \in \mathbf{N}$.

Q23. — Que représente la variable aléatoire S_n ?

Q24. — Calculer p_0, p_1 et p_2.

Q25. — Justifier que, si n est impair, alors on a $p_n = 0$.

On considère pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ la variable aléatoire Y_k définie par $Y_k = \dfrac{X_k + 1}{2}$. On admet que $(Y_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Q26. — Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Montrer que Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

Q27. — Pour $n > 0$, donner la loi de $Z_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ et exprimer S_n en fonction de Z_n.

Q28. — On suppose que $n = 2m$ avec $m \in \mathbf{N}$. Déduire de la question précédente que :

$$p_{2m} = \binom{2m}{m} \frac{1}{4^m}.$$

Partie II - Fonction génératrice de la suite $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$

On note R_p le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} p_n x^n$ et f la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence.

Q29. — Montrer que $R_p \geqslant 1$.

Q30. — Montrer que pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$p_{2m} = \frac{(-1)^m}{m!} \prod_{k=1}^{m} \left(-\frac{1}{2} - k + 1 \right).$$

Q31. — Déterminer un nombre $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $f(x) = (1 - x^2)^\alpha$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

Partie III - Loi de la variable aléatoire T

On note R_q le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} q_n x^n$ et g la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on considère également la fonction $g_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $g_n(x) = q_n x^n$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

Q32. — Calculer q_1 et q_2.

Q33. — Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} g_n$ converge normalement sur $[-1, 1]$. En déduire que $R_q \geqslant 1$.

Dans la suite, on **admet** la relation :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad p_n = \sum_{k=0}^{n} p_k\, q_{n-k}.$$

Q34. — Démontrer que :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x)g(x) = f(x) - 1.$$

Q35. — En déduire que $g(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$ pour tout $x \in]-1,1[$, puis calculer le développement en série entière de la fonction $x \mapsto 1 - \sqrt{1-x^2}$ en précisant son rayon de convergence.

Q36. — En déduire une expression de q_n pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

Q37. — En utilisant les questions Q33 et Q35, déterminer la valeur de $P(T = +\infty)$. Interpréter le résultat.

Q38. — La variable aléatoire T admet-elle une espérance ?