M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Proposition de corrigé du devoir surveillé n°7 (4h)

Espaces préhilbertiens
Théorèmes de Lebesgue et intégrales à paramètre
Séries entières

Samedi 5 mars 2022

MM. Lucas, Guenier et Morin

PROBLÈME 1 — POLYNÔMES DE HERMITE ET ORTHOGONALITÉ [1]

Partie 1 — Polynômes de Hermite

Soit $(H_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *la famille des polynômes (de Hermite) définie par* $H_0 = 1$ *et, pour tout* $n \in \mathbf{N}$, $H_{n+1} = XH_n - H_n'$.

Q1. — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, H_n est un polynôme unitaire de degré n.

Nous raisonnons par récurrence.

- Définition du prédicat : pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons :

$$\mathcal{P}(n) \ : \ H_n \text{ est un polynôme unitaire de degré } n.$$

- Initialisation : Le polynôme $H_0 := 1$ unitaire et de degré 0.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que H_n soit un polynôme unitaire de degré n. Démontrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie sous cette hypothèse.
  Comme $\deg(XH_n) = \deg(X) + \deg(H_n) = 1 + n > n - 1 \geqslant \deg(H_n')$:
  — $\deg(H_{n+1}) = \deg(XH_n - H_n') = n + 1$
  — $\mathrm{Cd}(H_{n+1}) = \mathrm{Cd}(XH_n) = \mathrm{Cd}(X)\,\mathrm{Cd}(H_n) = 1 \times 1 = 1$.
  Nous avons établi que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité.
- Conclusion : Nous avons montré que :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N},\ H_n \text{ est un polynôme unitaire de degré } n.}$$

Q2. — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $H_{n+1}' = (n+1)H_n$.

Nous raisonnons par récurrence.

- Définition du prédicat : pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons :

$$\mathcal{P}(n) \ : \ H_{n+1}' = (n+1)H_n.$$

- Initialisation : Nous savons : $H_0 = 1$ et $H_1 = X$. Ainsi $H_{0+1}' = (0+1)H_0$.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $H_{n+1}' = (n+1)H_n$. Nous calculons :

$$H_{n+2}' = (XH_{n+1} - H_{n+1}')' = XH_{n+1}' + H_{n+1} - H_{n+1}'' = (n+1)XH_n + XH_n - H_n' - (n+1)H_n'.$$

  donc $H_{n+2}' = (n+2)(XH_n - H_n') = (n+2)H_{n+1}$. Nous avons établi que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité.
- Conclusion : Nous avons montré que :

1. Extrait d'une épreuve du CCINP 2016 de la filière MP

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N},\ H'_{n+1} = (n+1)H_n.}$$

Pour tous polynôme P et Q à coefficients réels, on pose

$$\langle P \mid Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)f(x)\ \mathrm{d}x,$$

la fonction f étant définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$. On rappelle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = 1$.

Partie 2 — Un produit scalaire sur $\mathrm{R}[X]$

Q3. — Justifier, pour tous polynômes P et Q dans $\mathbf{R}[X]$, l'existence de l'intégrale qui définit $\langle P \mid Q \rangle$.

- Soit P et Q dans $\mathbf{R}[X]$. La fonction $x \mapsto P(x)Q(x)f(x)$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$.
- D'après les résultats sur les croissances comparées :

$$x^2\ |P(x)|\ |Q(x)|\ f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{donc} \quad |P(x)|\ |Q(x)|\ f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}\ .$$

  Or la fonction $x \mapsto 1/x^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Donc par théorème d'intégration des o pour les fonction positives, la fonction $x \mapsto P(x)Q(x)f(x)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.
- De façon analogue la fonction $x \mapsto P(x)Q(x)f(x)$ est intégrable sur $]-\infty, -1]$.
- Ainsi la fonction $x \mapsto P(x)Q(x)f(x)$ est intégrable sur $\mathbf{R}$ et donc :

$$\boxed{\text{pour tous polynômes } P \text{ et } Q \text{ dans } \mathbf{R}[X], \text{ l'intégrale qui définit } \langle P \mid Q \rangle \text{ existe.}}$$

Q4. — Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$.

Soient P, Q et $R \in \mathbf{R}[X]$. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Montrons :

$$\begin{cases} \text{(i)} & \langle \lambda P + R \mid Q \rangle = \lambda \langle P \mid Q \rangle + \langle R \mid Q \rangle \\ \text{(ii)} & \langle P \mid Q \rangle = \langle Q \mid P \rangle \\ \text{(iii)} & \langle P \mid \lambda Q + R \rangle = \lambda \langle P \mid Q \rangle + \langle P \mid R \rangle \\ \text{(iv)} & \langle P \mid P \rangle \geqslant 0 \\ \text{(v)} & \langle P \mid P \rangle = 0 \Longrightarrow P = 0 \end{cases}$$

(i) Par linéarité de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda P(x) + R(x))Q(x)f(x)\ \mathrm{d}x = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)f(x)\ \mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)Q(x)f(x)\ \mathrm{d}x.$$

(ii) La multiplication étant commutative dans $\mathbf{R}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(x)P(x)f(x)\ \mathrm{d}x.$$

(iii) Vrai avec (i) et (ii).

(iv) La fonction $x \mapsto P^2(x)\,f(x)$ est positive sur $\mathbf{R}$ et l'intégrale est croissante. Donc :

$$\langle P \mid P\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P^2(x)f(x)\ \mathrm{d}x \geqslant 0.$$

(v) On suppose $\langle P \mid P\rangle = 0$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P^2(x)f(x)\ \mathrm{d}x = 0$. Or la fonction $x \mapsto P^2(x)\,f(x)$ est continue et positive sur $\mathbf{R}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $P^2(x)\,f(x) = 0$. Or f ne s'annule pas donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $P^2(x) = 0$. P admet une infinité de racines donc $P = 0$.

$$\boxed{\text{On a démontré que l'on définit ainsi un produit scalaire sur } \mathbf{R}[X].}$$

Partie 3 — Une famille orthogonale

Dans la suite, $\mathbf{R}[X]$ *est muni de ce produit scalaire et de la norme associée notée* $\|.\|$.

Q5. — Démontrer que, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\langle P \mid H_n\rangle = \langle P^{(n)} \mid H_0\rangle$.

Nous raisonnons à nouveau par récurrence.

- Définition du prédicat : pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons :

$$\mathcal{P}(n)\ :\ \text{pour tout } P \in \mathbf{R}[X],\ \langle P \mid H_n\rangle = \langle P^{(n)} \mid H_0\rangle.$$

- Initialisation : Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. Par convention, $P^{(0)} = P$. Ainsi : $\langle P \mid H_0\rangle = \langle P^{(0)} \mid H_0\rangle$.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, $\langle P \mid H_n\rangle = \langle P^{(n)} \mid H_0\rangle$.
  Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. La relation de récurrence vérifiée par les polynômes de Hermite et la linéarité de l'intégrale livrent :

$$\langle P \mid H_{n+1}\rangle = \langle P \mid XH_n - H_n'\rangle = \langle P \mid XH_n\rangle - \langle P \mid H_n'\rangle.$$

  Les fonctions

$$x \mapsto -f(x) \qquad \text{et} \qquad x \mapsto P(x)H_n(x)$$

  sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$. De plus, par croissances comparées :

$$-f(x)(P(x)H_n(x)) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$$

  donc $[-f(x)(P(x)H_n(x))]_{-\infty}^{+\infty}$ existe et est nul. Nous pouvons donc effectuer une intégration par parties pour obetnir :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overbrace{xf(x)}^{\substack{-f(x)\\ \uparrow \int}} \underbrace{(P(x)H_n(x))}_{\substack{\downarrow\ \mathrm{d}/\mathrm{d}x \\ P'(x)H_n(x)+P(x)H_n'(x)}} \,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(P'(x)H_n(x)+P(x)H_n'(x))\,\mathrm{d}x.$$

Par linéarité de l'intégrale :

$$\langle P \mid XH_n\rangle = \langle P \mid H_n'\rangle + \langle P' \mid H_n\rangle.$$

Ainsi $\langle P \mid H_{n+1}\rangle = \langle P' \mid H_n\rangle = \langle (P')^{(n)} \mid H_0\rangle$, par hypothèse de récurrence. Donc $\langle P \mid H_{n+1}\rangle = \langle P \mid H_{n+1}\rangle = \langle P^{(n+1)} \mid H_0\rangle$. Nous avons établi que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité.

- Conclusion : Nous avons montré que :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N}, \text{ pour tout } P \in \mathbf{R}[X] : \langle P \mid H_n\rangle = \langle P^{(n)} \mid H_0\rangle.}$$

Q6. — En déduire que , pour tout $n \in \mathbf{N}$, la famille $(H_0, H_1, \dots, H_n)$ est une base orthogonale de $\mathbf{R}_n[X]$.

Soit $n \in \mathbf{N}$.
D'après ce qui précède, pour tout P tel que $\deg P < n$, nous avons $\langle P \mid H_n\rangle = \langle 0 \mid H_0\rangle = 0$. Donc si $0 \leq i < j$, on a $\deg(H_i) = i < j$ d'après Q1. Ainsi, $\langle H_i \mid H_j\rangle = 0$.
La famille $(H_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est donc orthogonale et formée de $n+1$ vecteurs non nuls de $\mathbf{R}_n[X]$. Elle est donc libre.
Comme $\dim \mathbf{R}_n[X] = n+1$,

$$\boxed{(H_0, H_1, \dots, H_n) \text{ est une base orthogonale de } \mathbf{R}_n[X].}$$

Q7. — Calculer $\|H_n\|$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. D'après Q5 :

$$\|H_n\|^2 = \langle H_n \mid H_n\rangle = \langle H_n^{(n)} \mid H_0\rangle.$$

D'après la Q2 :

$$H_n^{(n)} = (H_n')^{(n-1)} = n(H_{n-1}')^{(n-1)} = \dots = n!\ H_0^{(0)} = n!\ H_0.$$

Donc :

$$\|H_n\|^2 = n!\ \langle H_0 \mid H_0\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f = 1$$

d'après le rappel de l'énoncé. D'où :

$$\boxed{\|H_n\| = \sqrt{n!}}$$

Partie 4 — Un calcul de distance

Q8. — Soit $P = X^3 + X^2 + X + 1$. Préciser les polynômes H_1, H_2 et H_3 puis déterminer quatre réels a_i $(0 \leqslant i \leqslant 3)$ tels que $P = \sum_{i=0}^{3} a_i H_i$. En déduire la distance d du polynôme P au sous-espace $\mathbf{R}_0[X]$ des polynômes constants, c'est-à-dire la borne inférieure de $\|P - Q\|$ quand Q décrit $\mathbf{R}_0[X]$.

- Les premiers polynômes d'Hermite sont : $H_0 = 1$; $H_1 = X$; $H_2 = X^2 - 1$ et $H_3 = X^3 - 3X$.

- <u>$1^{\text{ère}}$ méthode pour calculer les coordonnées de P dans la base $(H_i)_{0\leqslant i\leqslant 3}$ de $\mathbf{R}_3[X]$</u>

  La famille $(\frac{1}{\sqrt{i!}}\ H_i)_{0\leqslant i\leqslant 3}$ est une base orthonormale de $\mathbf{R}_3[X]$, d'après Q6 et Q7. Nous en déduisons :

$$P = \sum_{i=0}^{3} \frac{\left\langle P \mid \frac{1}{\sqrt{i!}}\ H_i \right\rangle}{\sqrt{i!}}\ H_i = \sum_{i=0}^{3} \frac{\langle P \mid H_i\rangle}{i!}\ H_i = \sum_{i=0}^{3} \frac{\langle P^{(i)} \mid H_0\rangle}{i!} H_i\ .$$

  Par linéarité, nous sommes réduits à calculer les produits scalaires $\langle X^i \mid H_0\rangle$ pour $i \in [\![0, 3]\!]$. Soit $i \in [\![0, 3]\!]$.

$$\langle X^i \mid H_0\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^i\, f(x)\ \mathrm{d}x.$$

  Nous en déduisons $\langle 1 \mid H_0\rangle = 1$ (cf. rappel) et par imparité des fonctions $x \mapsto x\, f(x)$ et $x \mapsto x^3\, f(x)$:

$$\langle X \mid H_0\rangle = \langle X^3 \mid H_0\rangle = 0.$$

  Les fonctions

$$x \mapsto -f(x) \qquad \text{et} \qquad x \mapsto x$$

  sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$. De plus, par croissances comparées :

$$-x\, f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$$

  donc $[-x\, f(x)]_{-\infty}^{+\infty}$ existe et est nul. Nous pouvons donc effectuer une intégration par parties pour obtenir :

$$\langle X^2 \mid H_0\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \overbrace{xf(x)}^{\substack{-f(x) \\ \uparrow \int}} \underbrace{x}_{\substack{\downarrow\ \mathrm{d/dx} \\ 1}}\ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = 1.$$

Ainsi :

$$\langle 1 \mid H_0\rangle = \langle X^2 \mid H_0\rangle = 1 \qquad \text{et} \qquad \langle X \mid H_0\rangle = \langle X^3 \mid H_0\rangle = 0.$$

Nous en déduisons :

$$\langle P^{(0)} \mid H_0\rangle = 2 \qquad \langle P^{(1)} \mid H_0\rangle = 4 \qquad \langle P^{(2)} \mid H_0\rangle = 2 \qquad \langle P^{(3)} \mid H_0\rangle = 6$$

puis :

$$\boxed{P = 2.H_0 + 4.H_1 + 1.H_2 + 1.H_3.}$$

- $2^{\text{ème}}$ méthode pour calculer les coordonnées de P dans la base $(H_i)_{0\leqslant i\leqslant 3}$ de $\mathbf{R}_3[X]$
En remarquant que la base $(H_i)_{0\leqslant i\leqslant 3}$ de $\mathbf{R}_3[X]$ est échelonnée en degrés, nous obtenons successivement :
$$\begin{aligned} &P - H_3 = X^2 + 4X + 1 \\ &P - H_3 - H_2 = 4X + 2 = 4H_1 + 2H_0 \end{aligned}$$
donc :
$$\boxed{P = 2.H_0 + 4.H_1 + 1.H_2 + 1.H_3.}$$

- D'après le calcul précédent, le projeté orthogonal de P sur $\mathbf{R}_0[X]$ est $2H_0 \in \mathbf{R}_0[X]$ car $4.H_1 + 1.H_2 + 1.H_3 \in \mathbf{R}_0[X]^{\perp}$. La distance cherchée est donc :
$$\|4.H_1 + 1.H_2 + 1.H_3\| = \left\| \frac{4}{\sqrt{1!}}.H_1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2!}}.H_2 + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3!}}.H_3 \right\|.$$
Comme $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1!}}.H_1, \dfrac{1}{\sqrt{2!}}.H_2, \dfrac{1}{\sqrt{3!}}.H_3\right)$ est une famille orthonormale, nous obtenons :
$$\|4.H_1 + 1.H_2 + 1.H_3\| = \sqrt{4^2 + \sqrt{2}^2 + \sqrt{6}^2} = \sqrt{24}$$
et ainsi :
$$\boxed{d = 2\sqrt{6}.}$$

Partie 5 — Étude des racines des polynômes H_n

Soit $n \in \mathbf{N}$. On note p le nombre de racines réelles (distinctes) d'ordre impair du polynôme H_n, $a_1, a_2, \ldots, a_p$ ces racines et S le polynôme défini par :

$$S = 1 \textit{ si } p = 0 \textit{ et } S = \prod_{i=1}^{p} (X - a_i) \textit{ sinon.}$$

Q9. — Démontrer que, si $p < n$, alors $\langle S \mid H_n\rangle = 0$.

Supposons $p < n$. Nous savons que $(H_0, \dots, H_p)$ est une base orthogonale de $\mathbf{R}_p[X]$ d'après Q6. Donc $S \in \operatorname{Vect}(H_0, \dots, H_p)$. Comme $(H_0, \dots, H_p, H_{p+1}, \dots, H_n)$ est une famille orthogonale, le vecteur S est orthogonal au vecteur H_n. Donc :

$$\boxed{\text{si } p < n, \text{ alors } \langle S \mid H_n \rangle = 0.}$$

Q10. — Démontrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $S(x)H_n(x) \geqslant 0$.

On décompose H_n produit d'éléments irréductibles de $\mathbf{R}[X]$:

$$H_n = \prod_{i=1}^{p}(X - a_i)^{\lambda_i} \cdot \prod_{i=1}^{q}(X - b_i)^{\lambda'_i} \cdot \prod_{i=1}^{\ell}(X^2 + \alpha_i X + \beta_i)^{\mu_i}$$

où p, q, ℓ sont des entiers, les λ_i sont des entiers impairs, les b_i sont les racines réelles de H_n d'ordre pair λ'_i, les $X^2 + \alpha_i X + \beta_i$ sont des polynômes à coefficients réels de discriminants strictement négatifs. On a donc :

$$SH_n = \prod_{i=1}^{p}(X - a_i)^{\lambda_i + 1} \cdot \prod_{i=1}^{q}(X - b_i)^{\lambda'_i} \cdot \prod_{i=1}^{\ell}(X^2 + \alpha_i X + \beta_i)^{\mu_i}.$$

On a pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x^2 + \alpha_i x + \beta_i > 0$, $(x - a_i)^{\lambda_i + 1} \geqslant 0$ et $(x - b_i)^{\lambda'_i} \geq 0$. Donc :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbf{R},\ S(x)H_n(x) \geqslant 0.}$$

Q11. — En déduire que H_n a n racines réelles distinctes.

Par l'absurde supposons que H_n n'a pas n racines réelles distinctes.
On note S et p défini comme ci-dessus. On a donc $p < n$. D'après la question 5.(a) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(x)H_n(x)f(x)\ \mathrm{d}x = 0.$$

Or, d'après la question 5.(b), $S(x)H_n(x)f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. De plus, la fonction $x \mapsto S(x)H_n(x)f(x)$ est continue sur $\mathbf{R}$. Donc $S(x)H_n(x)f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.
Comme f ne s'annule pas, $S(x)H_n(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Donc SH_n est le polynôme nul car admettant une infinité de racines. Comme $\mathbf{R}[X]$ est intègre , S ou H_n est nul ce qui est absurde.
On en déduit que :

$$\boxed{H_n \text{ a } n \text{ racines réelles distinctes.}}$$

PROBLÈME 2 — ÉTUDE D'UNE FAMILLE DE SÉRIES ENTIÈRES [2]

Dans tout le problème, α désigne un nombre réel. On note $\mathcal{D}_\alpha$ l'ensemble des réels x pour lesquels la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^\alpha}$ est convergente et on pose, pour tout $x \in \mathcal{D}_\alpha$:

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$$

Objectifs

Ce problème est composé de trois parties indépendantes. Dans la partie 1, on étudie quelques propriétés élémentaires des fonctions f_α. L'objectif de la partie 2 est de construire un logarithme complexe. Enfin, la partie 3 permet d'obtenir un équivalent de $f_\alpha(x)$ lorsque x tend vers 1, dans le cas $\alpha \in]0,1[$.

Partie 1 — Quelques propriétés des fonctions f_α

Q12. — Déterminer le rayon de convergence R commun aux séries entières définissant les fonctions f_α.

$\forall z \in \mathbf{C}$, $\left|\frac{z^n}{n^\alpha}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } |z|<1 \\ +\infty & \text{si } |z|>1 \end{cases}$ donc $R = 1$.

Q13. — Déterminer, suivant les valeurs du réel α, le domaine de définition $\mathcal{D}_\alpha$ de la fonction f_α. *On distinguera les cas $\alpha \in]-\infty, 0]$, $\alpha \in]0,1]$ et $\alpha \in]1,+\infty[$.*

D'après ce qui précède, $]-1,1[\subset \mathcal{D}_\alpha \subset [-1,1]$. La série converge en $1 \iff \alpha > 1$ (exemple de Riemann) et en $-1 \iff \alpha > 0$ (CSSA). Donc $\mathcal{D}_\alpha = \begin{cases}]-1,1[& \text{si } \alpha \in]-\infty,0] \\ [-1,1[& \text{si } \alpha \in]0,1] \\ [-1,1] & \text{si } \alpha \in]1,+\infty[\end{cases}$

Q14. — On suppose dans cette question $\alpha > 0$. Déterminer, pour tout $x \in \mathcal{D}_\alpha$, le signe de $f_\alpha(x)$.

Pour $x \geq 0$, la série est à termes positifs donc $f_\alpha(x) \geq 0$.
Pour $x \leq 0$, la série satisfait les hypothèses du CSSA donc sa somme est du signe de son 1[er] terme : $f_\alpha(x) \leq 0$.

Q15. — Expliciter f_0, f_{-1} et f_1.

2. Extrait d'une épreuve du CCINP 2021 de la filière PSI

D'après le cours, $f_0(x) = \dfrac{1}{1-x}$ et $f_1(x) = -\ln(1-x)$.

Par le théorème de dérivation des SE, $f_0'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \dfrac{1}{x} f_{-1}(x)$ donc $f_{-1}(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$

Q16. — Soit $\alpha > 1$. Prouver que f_α est continue sur $\mathcal{D}_\alpha$.

Pour $\alpha > 1$, la série converge normalement sur $[-1,1]$ donc f_α est continue sur $\mathcal{D}_\alpha = [-1,1]$.

Q17. — Soit $\alpha \leq 1$. Prouver que $\lim\limits_{x\to 1^-} f_\alpha(x) = +\infty$. *On pourra comparer f_α à f_1.*

$\forall x \in [0,1[$, $\dfrac{x^n}{n^\alpha} \geq \dfrac{x^n}{n}$ donc $f_\alpha(x) \geq f_1(x)$. Or $f_1(x) = -\ln(1-x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 1^-} f_\alpha(x) = +\infty$.

Partie 2 — Un logarithme complexe

Q18. — Donner sans démonstration le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction qui à $x \in]-1,1[$ associe $\ln(1+x)$.

Pour $x \in]-1,1[,\ \ln(1+x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-x)^n}{n}$

Pour tout nombre complexe z, tel que la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-z)^n}{n}$ est convergente, on note : $S(z) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-z)^n}{n}$.

Q19. — Donner le rayon de convergence R de la série entière définissant S. Pour tout x réel élément de $]-R,R[$, déterminer la valeur de $\exp(S(x))$.

$R_S = 1$ et pour $x \in]-1,1[,\ \exp(S(x)) = 1 + x$.

Soit $z_0 \in \mathbf{C}$ tel que $|z_0| < R$. On considère la série entière de la variable réelle t suivante :

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{z_0^n}{n} t^n.$$

En cas de convergence, on note $g(t)$ sa somme. On a donc, pour $t \in \mathbf{R}$ tel que la série est convergente, $g(t) = S(tz_0)$.

Q20. — Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant g.

$R_g = \dfrac{1}{|z_0|} R_S = \dfrac{1}{|z_0|}$.

Q21. — Prouver que g est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$. Déterminer, pour tout $t \in [0,1]$, $g'(t)$.

D'après le théorème de dérivation des SE, g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R_g, R_g[\supset [0,1]$ et $g'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} z_0^n t^{n-1} = \dfrac{z_0}{1+tz_0}$.

Q22. — On pose $h = \exp \circ g$. Prouver que pour tout $t \in [0,1]$:

$$h'(t) = \frac{z_0}{1+tz_0} h(t).$$

D'après ce qui précède, h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$ et $h'(t) = g'(t)h(t) = \dfrac{z_0}{1+tz_0} h(t)$.

Q23. — Résoudre l'équation différentielle de la question précédente et en déduire que :

$$\exp(S(z_0)) = z_0 + 1.$$

On remarque que la fonction $z : t \mapsto 1 + tz_0$ est solution de cette équation différentielle. De plus, $z(0) = 1 = h(0)$. Ainsi, h et z sont solutions du même problème de Cauchy, donc elle sont égales. En $t = 1$, on obtient $h(1) = \exp(S(z_0)) = z(1) = 1 + z_0$.

Partie 3 — Un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1, dans le cas où $\alpha \in]0,1[$

Dans toute cette partie, on suppose que $\alpha \in]0,1[$. L'objectif est de donner un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1.

Pour tout $x \in]0,1[$, on considère l'intégrale : $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

Q24. — Justifier que, pour tout $x \in]0,1[$, l'intégrale $I(x)$ est convergente.

$t \mapsto \dfrac{x^t}{t^\alpha} = \dfrac{e^{t\ln x}}{t^\alpha}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

$0 \leq \dfrac{x^t}{t^\alpha} \leq \dfrac{1}{t^\alpha}$ qui est intégrable sur $]0,1]$.

$\forall t \geq 1,\ 0 \leq \dfrac{x^t}{t^\alpha} \leq e^{t\ln x}$ qui est intégrable sur $[1,+\infty[$ car $\ln x < 0$.

Q25. — On rappelle que la fonction Γ d'Euler est définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par : $\forall s \in \mathbf{R}_+^*,\ \Gamma(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$. Pour tout $x \in]0,1[$, déterminer une expression de $I(x)$ faisant intervenir $\ln(x)$, α et $\Gamma(1-\alpha)$.

On effectue le changement de variable $u = -t\ln x$, $\mathcal{C}^1$ et strictement croissant de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$:

$$I(x) = (-\ln x)^{\alpha-1}\int_0^{+\infty} u^{-\alpha}e^{-u}\,\mathrm{d}u = (-\ln x)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\ .$$

Q26. — Prouver que, pour tout $x \in]0,1[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{x^t}{t^\alpha}$ définie sur $\mathbf{R}_+^*$ est décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$.

$t \mapsto x^t = e^{t\ln x}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ sont décroissantes positives sur $\mathbf{R}_+^*$ donc aussi leur produit.

Q27. — En déduire, pour tout $x \in]0,1[$, l'encadrement :

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leq f_\alpha(x) \leq \int_0^{+\infty}\frac{x^t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

$\forall t \in [n,n+1],\ \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \leq \dfrac{x^t}{t^\alpha} \leq \dfrac{x^n}{n^\alpha}$ donc en intégrant sur $[n,n+1]$, $\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \leq \displaystyle\int_n^{n+1}\frac{x^t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leq \frac{x^n}{n^\alpha}$.
On somme les 1^res^ inégalités pour $n \in \mathbf{N}$ et les 2^es^ pour $n \in \mathbf{N}^*$ et on obtient le résultat attendu.

Q28. — En déduire un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1.

$t \mapsto \dfrac{x^t}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0,1]$ et $I(x) = (-\ln x)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha) \underset{x\to1}{\longrightarrow} +\infty$ car $\alpha < 1$. Donc $\int_1^{+\infty}\dfrac{x^t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \underset{x\to1}{\sim} \int_0^{+\infty}\dfrac{x^t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = (-\ln x)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)$. En divisant par ce même équivalent et en utilisant le théorème des gendarmes, on obtient $f_\alpha(x) \underset{x\to1}{\sim} (-\ln x)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)$.

PROBLÈME 3 — FONCTION GAMMA ET TRANSFORMÉE DE FOURIER [3]

On utilise la fonction Gamma d'Euler (partie 1) pour calculer, en partie 2, une intégrale dépendant d'un paramètre.

3. Extrait d'une épreuve du Concours Centrale 2016 de la filière PC

Partie 1 — Autour de la fonction Gamma d'Euler

Pour $x \in \mathbf{R}$, on pose, lorsque cela a un sens, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t.$

Q29. — Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la fonction Γ ? Justifier.

$f(t) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$ donc $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$ existe si et seulement si $x > 0$.

Puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} t^{x+1}\mathrm{e}^{-t} = 0$, $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\frac{1}{t^2})$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ existe pour tout x.

Le domaine de définition de Γ est donc $\mathcal{D} =]0, +\infty[$.

Q30. — Pour tout $x \in \mathcal{D}$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de x et de $\Gamma(x)$. En déduire, pour tout $x \in \mathcal{D}$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$, une expression de $\Gamma(x+n)$ en fonction de x, n et $\Gamma(x)$, ainsi que la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n \geqslant 1$.

On intègre par parties pour $x > 0$: $\Gamma(x+1) = [-e^{-t}t^x]_0^{+\infty} + x\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t = x\Gamma(x)$ puisque l'expression entre crochets a pour limite 0 en 0 et en $+\infty$.

On en déduit par récurrence, pour $n \geq 1$ et $x > 0$: $\Gamma(x+n) = \Gamma(x)\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(x+k)$.

Pour $x = 1$ on obtient avec $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t = 1$, $\Gamma(n+1) = n!$ donc $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour $n \geq 1$.

Q31. — Montrer l'existence des deux intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^4}\ \mathrm{d}t$ et les exprimer à l'aide de Γ.

Dans la première intégrale on pose $t = u^{1/2}$ (bijection de classe C^1 de $]0, +\infty[$ dans lui-même) :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\frac{1}{2}u^{-1/2}\ \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \Gamma(3/2).$$

Dans la seconde intégrale on pose $t = u^{1/4}$ (bijection de classe C^1 de $]0, +\infty[$ dans lui-même) :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^4}\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\frac{1}{4}u^{-3/4}\ \mathrm{d}u = \frac{1}{4}\Gamma(1/4) = \Gamma(5/4).$$

Q32. — Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Montrer que, pour tout $t > 0$ et tout $x \in [a, b]$,

$$t^x \leqslant \max(t^a, t^b) \leqslant t^a + t^b$$

Si $t \in]0,1[$, la fonction $x \mapsto e^{x\ln t}$ est décroissante. et donc, pour tout $x \in [a,b]$, $e^{b\ln t} \leqslant e^{x\ln t} \leqslant e^{a\ln t}$. Ainsi, pour tout $x \in [a,b]$, $t^x \leqslant \max(t^a,t^b) \leq t^a + t^b$.
Si $t \geqslant 1$, la fonction $x \mapsto e^{x\ln t}$ est croissante. et donc, pour tout $x \in [a,b]$, $e^{a\ln t} \leqslant e^{x\ln t} \leqslant e^{b\ln t}$. Ainsi, pour tout $x \in [a,b]$, $t^x \leqslant \max(t^a,t^b) \leq t^a + t^b$.

Q33. — Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$. Soit $k \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathcal{D}$. Exprimer $\Gamma^{(k)}(x)$, dérivée k-ième de Γ au point x, sous forme d'une intégrale.

Pour $x > 0$ et $t > 0$ posons $f(x,t) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{(x-1)\ln t - t}$. On calcule $\dfrac{\partial f^k}{\partial x^k}(x,t) = (\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$.
Pour $x > 0$ fixé : $|(\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}| \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\frac{1}{t^2})$ puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{x+1}(\ln t)^k\mathrm{e}^{-t} = 0$.
D'autre part $|(\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}| \underset{t\to0}{\sim} |\ln t|^k t^{x/2}\dfrac{1}{t^{1-x/2}} \underset{t\to0}{=} \mathrm{o}(\frac{1}{t^{1-x/2}})$ qui est intégrable sur $]0,1]$ puisque $x > 0$.
On en déduit que $t \mapsto \dfrac{\partial f^k}{\partial x^k}(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
On peut maintenant appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral :

- Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$
- Pour tout $t \in]0,+\infty[$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$
- Pour tout $x \in]0,+\infty[$ et pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $t \mapsto \dfrac{\partial f^k}{\partial x^k}(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$
- Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ et pour tout segment $[a,b] \subset]0,+\infty[$ il existe φ continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ telle $\left|\dfrac{\partial f^k}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$: en appliquant le I.B.1 on peut prendre $\varphi(t) = \left|\dfrac{\partial f^k}{\partial x^k}(a,t)\right| + \left|\dfrac{\partial f^k}{\partial x^k}(b,t)\right|$.

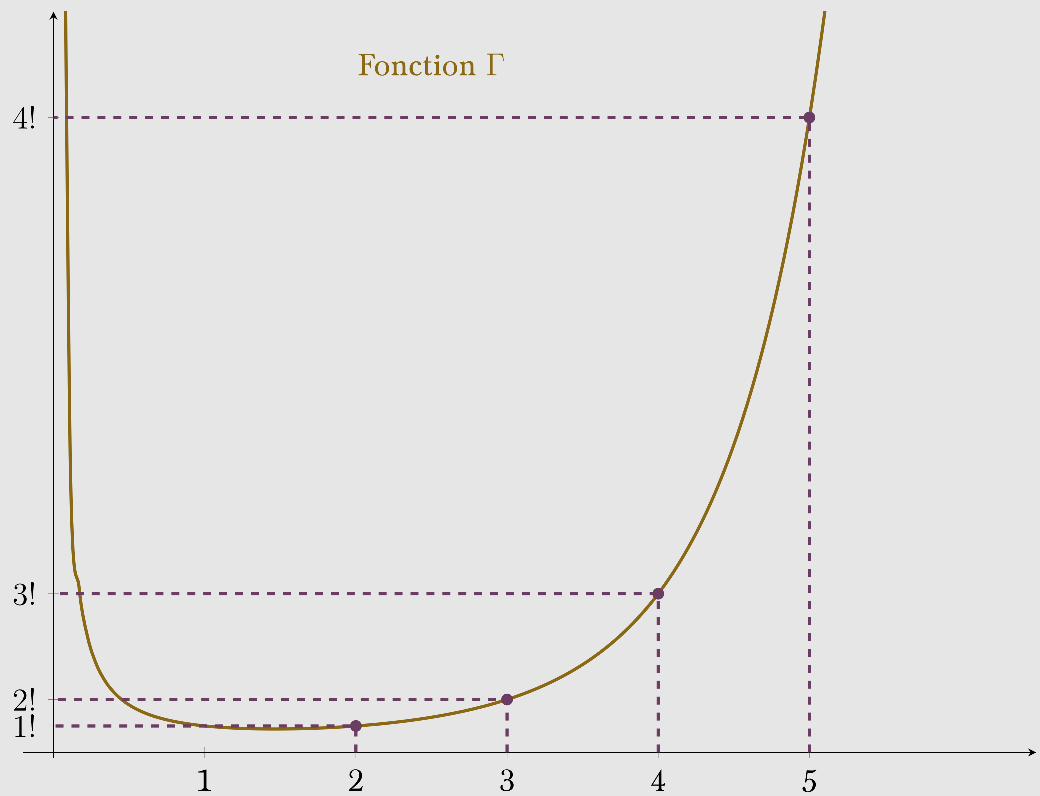
On en conclut pour $x > 0$: $\Gamma^{(k)}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$.

Q34. — Montrer que Γ' s'annule en un unique réel ξ dont on déterminera la partie entière.

Puisque $(\ln t)^2 > 0$ pour $t \neq 1$, on a $\Gamma''(x) > 0$ et donc Γ' est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Avec $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour $n \in \mathbf{N}^*$ on déduit que $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$. On peut appliquer le théorème de Rolle à Γ sur $[1,2]$ puisqu'elle est de classe C^1 et que $\Gamma(1) = \Gamma(2)$. On en déduit que Γ' s'annule sur $]1,2[$, une seule fois puisque Γ' est strictement croissante. Il existe un unique ξ tel que $\Gamma'(\xi) = 0$ et sa partie entière est égale à 1.

Q35. — En déduire les variations de Γ sur $\mathcal{D}$. Préciser en particulier les limites de Γ en 0 et en $+\infty$. Préciser également les limites de Γ' en 0 et en $+\infty$. Esquisser le graphe de Γ.

Pour $0 < x < \xi$, $\Gamma'(x) < 0$ donc Γ est strictement décroissante. Pour $x > \xi$, $\Gamma'(x) > 0$ donc Γ est strictement croissante.
De $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et de $\Gamma(1) = 1$ on déduit par continuité de Γ en 1 que $\Gamma(x) \sim \dfrac{1}{x}$ au voisinage de 0^+ et par suite Γ a pour limite $+\infty$ en 0^+.
Puisque Γ est croissante pour $x > 2$ et que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour $n \in \mathbf{N}^*$ on déduit que Γ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.
De $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ on déduit $\Gamma'(x+1) = \Gamma(x) + x\Gamma'(x)$. Par continuité de Γ' en 1 et avec l'équivalent obtenu pour $\Gamma(x)$ en 0^+ on déduit que $\Gamma'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\dfrac{1}{x^2}$, donc Γ' a pour limite $-\infty$ en 0^+.
Pour $x > \xi$ on a $\Gamma'(x) > 0$ et par suite $\Gamma'(x+1) = \Gamma(x) + x\Gamma'(x) > \Gamma(x)$: on en déduit que Γ' a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.



Partie 2 — Une transformée de Fourier

Pour $x \in \mathbf{R}$, *on pose* $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{-3/4} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}t$, *où* i *désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument* $\pi/2$.

Q36. — Montrer que la fonction $F : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \to & \mathbf{C} \\ x & \mapsto & F(x) \end{array}$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$. Soit k un entier naturel non nul et soit x un réel. Donner une expression intégrale de $F^{(k)}(x)$, dérivée k-ième de F en x. Préciser $F(0)$.

Pour $x \in \mathbf{R}$ et $t > 0$ posons $g(x,t) = \mathrm{e}^{-t}t^{-3/4}\mathrm{e}^{ixt}$. On calcule $\dfrac{\partial g^k}{\partial x^k}(x,t) = (it)^k \mathrm{e}^{-t}t^{-3/4}\mathrm{e}^{ixt}$.
Pour x fixé et $k \in \mathbf{N}$, $t \mapsto \left|\dfrac{\partial g^k}{\partial x^k}(x,t)\right| = \mathrm{e}^{-t}t^{k-3/4}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ puisque $\Gamma(k+1/4)$ existe.
On peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral en dominant la dérivée k-ième par $\varphi(t) = \mathrm{e}^{-t}t^{k-3/4}$. F est donc de classe C^∞ et $F^{(k)}(x) = i^k \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{k-3/4}\mathrm{e}^{ixt}\ \mathrm{d}t$.
$F(0) = \Gamma(1/4)$.

Q37. — Montrer qu'au voisinage de $x = 0$, la fonction F peut s'écrire sous la forme

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \frac{(\mathrm{i}x)^n}{n!} \tag{S}$$

où c_n est la valeur de Gamma en un point à préciser. On exprimera c_n en fonction de n et de c_0.

En utilisant le développement en série entière de e^{itx} on obtient : $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{-3/4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ixt)^n}{n!}\ \mathrm{d}t$.
Appliquons le théorème d'intégration terme à terme pour la série de fonction $(\sum f_n)$ définie par $f_n(t) = \mathrm{e}^{-t}t^{-3/4}\dfrac{(ixt)^n}{n!}$ (x étant fixé) :

- f_n est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ puisque $|f_n(t)| = \dfrac{|x|^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}t^{n-3/4}$ et que $\Gamma(n+1/4)$ existe.
- La série $(\sum f_n)$ converge pour tout $t > 0$.
- Si on choisit $|x| < 1$, la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\ \mathrm{d}t$ converge.
  En effet, $u_n = \dfrac{|x|^n}{n!}\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{n-3/4}\ \mathrm{d}t = \dfrac{|x|^n}{n!}\Gamma(n+1/4)$. Pour $n \geq 2$, par croissance de la fonction Γ, on obtient $u_n \leq \dfrac{|x|^n}{n!}\Gamma(n+1) = |x|^n$ qui est le terme général d'une série géométrique convergente.

On obtient donc pour $|x| < 1$ en intégrant terme à terme : $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n\frac{(ix)^n}{n!}$ avec $c_n = \Gamma(n+1/4)$.

Avec Q30 on déduit : $c_n = c_0 \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(k+1/4)$ avec $c_0 = \Gamma(1/4)$.

Q38. — Quel est le rayon de convergence de la série entière qui apparaît au second membre de **(S)** ?

La croissance de la fonction Γ pour $x \geq n > 2$ entraîne que $\Gamma(n)\dfrac{|x|^n}{n!} \leq \left|c_n\dfrac{(ix)^n}{n!}\right| \leq \Gamma(n+1)\dfrac{|x|^n}{n!}$ et par suite $\dfrac{|x|^n}{n} \leq \left|c_n\dfrac{(ix)^n}{n!}\right| \leq |x|^n$. On en déduit que le rayon de convergence est égal à 1.

On admet que $\Gamma(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}x^{x-1/2}\mathrm{e}^{-x}$.

Q39. — Étudier si la série du second membre de **(S)** converge absolument lorsque $|x| = 1$.

L'inégalité que l'on vient de montrer entraîne qu'il n'y a pas convergence absolue pour $|x| = 1$ puisque la série $(\sum \frac{1}{n})$ diverge.

Q40. — Soit $R(x)$ la partie réelle et $I(x)$ la partie imaginaire de $F(x)$. Déterminer, au voisinage de 0, le développement limité de $R(x)$ à l'ordre 3 et de $I(x)$ à l'ordre 4.

Le développement en série entière de $F(x)$ donne son développement limité en 0 à l'ordre 3 :

$$F(x) = c_0 + c_1 ix + c_2(\frac{-x^2}{2}) + c_3(\frac{-ix^3}{6}) + \mathrm{o}(x^3)\ .$$

On en déduit avec $c_1 = \frac{1}{4}c_0$, $c_2 = \frac{5}{16}c_0$ et $c_3 = \frac{45}{64}c_0$:

$$R(x) = c_0(1 - \frac{5}{32}x^2) + \mathrm{o}(x^3) \qquad \text{et} \qquad I(x) = c_0(\frac{x}{4} - \frac{15}{128}x^3) + \mathrm{o}(x^4)\ .$$

On obtient l'ordre 4 pour $I(x)$ puisque c'est une fonction impaire.

Q41. — Prouver que F vérifie sur $\mathbf{R}$ une équation différentielle de la forme $F' + AF = 0$, où A est une fonction à préciser.

Intégrons par parties :

$$\begin{aligned} F'(x) &= i\int_0^{+\infty} t^{1/4}\mathrm{e}^{(ix-1)t}\ \mathrm{d}t \\ &= \left[it^{1/4}\frac{\mathrm{e}^{(ix-1)t}}{(ix-1)}\right]_0^{+\infty} - \frac{i}{4(ix-1)}\int_0^{+\infty} t^{-3/4}\mathrm{e}^{(ix-1)t}\ \mathrm{d}t \\ &= -\frac{i}{4(ix-1)}F(x) \end{aligned}$$

puisque les limites en 0 et en $+\infty$ de l'expression entre crochets sont nulles. On a donc bien $F' + AF = 0$ en posant $A(x) = \dfrac{i}{4(ix-1)} = \dfrac{1}{4(x+i)}$.

Q42. — En déduire une expression de $F(x)$. On pourra commencer par dériver la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{8}\ln(1+x^2)+\dfrac{\mathrm{i}}{4}\arctan x$.

On obtient $A(x)=\dfrac{x-i}{4(x^2+1)}$ dont une primitive est $G(x)=\dfrac{1}{8}\ln(1+x^2)-\dfrac{i}{4}\arctan x$.
On en déduit que $(F\mathrm{e}^G)'=(F'+FG')\mathrm{e}^G=0$ d'où $F(x)=Ce^{-G(x)}$ avec $C=F(0)=\Gamma(1/4)$.
On obtient donc $F(x)=\Gamma(1/4)(1+x^2)^{-1/8}\mathrm{e}^{\frac{i}{4}\arctan x}$.