M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Devoir surveillé n°7 (4h)

Espaces préhilbertiens
Théorèmes de Lebesgue et intégrales à paramètre
Séries entières

Samedi 5 mars 2022

David BLOTTIÈRE

Consignes

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier,

les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Vous êtes invité à encadrer les résultats de vos calculs.

Si vous êtes amené à repérer ce qui peut vous sembler être une erreur d'énoncé, vous le signalerez sur votre copie et devrez poursuivre votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

PROBLÈME 1 — POLYNÔMES DE HERMITE ET ORTHOGONALITÉ [1]

Partie 1 — Polynômes de Hermite

Soit $(H_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la famille des polynômes (de Hermite) définie par $H_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $H_{n+1} = XH_n - H_n'$.

Q1. — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, H_n est un polynôme unitaire de degré n.

Q2. — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $H_{n+1}' = (n+1)H_n$.

Pour tous polynôme P et Q à coefficients réels, on pose

$$\langle P \mid Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)f(x)\ \mathrm{d}x,$$

la fonction f étant définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$. On rappelle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = 1$.

Partie 2 — Un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$

Q3. — Justifier, pour tous polynômes P et Q dans $\mathbf{R}[X]$, l'existence de l'intégrale qui définit $\langle P \mid Q\rangle$.

Q4. — Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$.

1. Extrait d'une épreuve du CCINP 2016 de la filière MP

Partie 3 — Une famille orthogonale

Dans la suite, $\mathbf{R}[X]$ *est muni de ce produit scalaire et de la norme associée notée* $\|.\|$.

Q5. — Démontrer que, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\langle P \mid H_n \rangle = \langle P^{(n)} \mid H_0 \rangle$.

Q6. — En déduire que , pour tout $n \in \mathbf{N}$, la famille $(H_0, H_1, \dots, H_n)$ est une base orthogonale de $\mathbf{R}_n[X]$.

Q7. — Calculer $\|H_n\|$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Partie 4 — Un calcul de distance

Q8. — Soit $P = X^3 + X^2 + X + 1$. Préciser les polynômes H_1, H_2 et H_3 puis déterminer quatre réels a_i $(0 \leqslant i \leqslant 3)$ tels que $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{3} a_i H_i$. En déduire la distance d du polynôme P au sous-espace $\mathbf{R}_0[X]$ des polynômes constants, c'est-à-dire la borne inférieure de $\|P - Q\|$ quand Q décrit $\mathbf{R}_0[X]$.

Partie 5 — Étude des racines des polynômes H_n

Soit $n \in \mathbf{N}$. *On note* p *le nombre de racines réelles (distinctes) d'ordre impair du polynôme* H_n, $a_1, a_2, \dots, a_p$ *ces racines et* S *le polynôme défini par :*

$$S = 1 \textit{ si } p = 0 \quad \textit{et} \quad S = \prod_{i=1}^{p} (X - a_i) \textit{ sinon.}$$

Q9. — Démontrer que, si $p < n$, alors $\langle S \mid H_n \rangle = 0$.

Q10. — Démontrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $S(x)H_n(x) \geqslant 0$.

Q11. — En déduire que H_n a n racines réelles distinctes.

PROBLÈME 2 — ÉTUDE D'UNE FAMILLE DE SÉRIES ENTIÈRES[2]

Dans tout le problème, α *désigne un nombre réel. On note* $\mathcal{D}_\alpha$ *l'ensemble des réels* x *pour lesquels la série entière* $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^\alpha}$ *est convergente et on pose, pour tout* $x \in \mathcal{D}_\alpha$ *:*

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$$

2. Extrait d'une épreuve du CCINP 2021 de la filière PSI

Objectifs

Ce problème est composé de trois parties indépendantes. Dans la partie 1, on étudie quelques propriétés élémentaires des fonctions f_α. L'objectif de la partie 2 est de construire un logarithme complexe. Enfin, la partie 3 permet d'obtenir un équivalent de $f_\alpha(x)$ lorsque x tend vers 1, dans le cas $\alpha \in]0,1[$.

Partie 1 — Quelques propriétés des fonctions f_α

Q12. — Déterminer le rayon de convergence R commun aux séries entières définissant les fonctions f_α.

Q13. — Déterminer, suivant les valeurs du réel α, le domaine de définition $\mathcal{D}_\alpha$ de la fonction f_α. *On distinguera les cas $\alpha \in]-\infty, 0]$, $\alpha \in]0,1]$ et $\alpha \in]1,+\infty[$.*

Q14. — On suppose dans cette question $\alpha > 0$. Déterminer, pour tout $x \in \mathcal{D}_\alpha$, le signe de $f_\alpha(x)$.

Q15. — Expliciter f_0, f_{-1} et f_1.

Q16. — Soit $\alpha > 1$. Prouver que f_α est continue sur $\mathcal{D}_\alpha$.

Q17. — Soit $\alpha \leq 1$. Prouver que $\lim\limits_{x \to 1^-} f_\alpha(x) = +\infty$. *On pourra comparer f_α à f_1.*

Partie 2 — Un logarithme complexe

Q18. — Donner sans démonstration le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction qui à $x \in]-1,1[$ associe $\ln(1+x)$.

Pour tout nombre complexe z, tel que la série $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{(-z)^n}{n}$ est convergente, on note : $S(z) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{n}$.

Q19. — Donner le rayon de convergence R de la série entière définissant S. Pour tout x réel élément de $]-R, R[$, déterminer la valeur de $\exp(S(x))$.

Soit $z_0 \in \mathbf{C}$ tel que $|z_0| < R$. On considère la série entière de la variable réelle t suivante :

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{z_0^n}{n} t^n.$$

En cas de convergence, on note $g(t)$ sa somme. On a donc, pour $t \in \mathbf{R}$ tel que la série est convergente, $g(t) = S(tz_0)$.

Q20. — Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant g.

Q21. — Prouver que g est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$. Déterminer, pour tout $t \in [0,1]$, $g'(t)$.

Q22. — On pose $h = \exp \circ g$. Prouver que pour tout $t \in [0,1]$:

$$h'(t) = \frac{z_0}{1 + tz_0} h(t).$$

Q23. — Résoudre l'équation différentielle de la question précédente et en déduire que :

$$\exp(S(z_0)) = z_0 + 1.$$

Partie 3 — Un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1, dans le cas où $\alpha \in]0,1[$

Dans toute cette partie, on suppose que $\alpha \in]0,1[$. L'objectif est de donner un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1.

Pour tout $x \in]0,1[$, on considère l'intégrale : $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t$.

Q24. — Justifier que, pour tout $x \in]0,1[$, l'intégrale $I(x)$ est convergente.

Q25. — On rappelle que la fonction Γ d'Euler est définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par : $\forall s \in \mathbf{R}_+^*,\ \Gamma(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t$. Pour tout $x \in]0,1[$, déterminer une expression de $I(x)$ faisant intervenir $\ln(x)$, α et $\Gamma(1-\alpha)$.

Q26. — Prouver que, pour tout $x \in]0,1[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{x^t}{t^\alpha}$ définie sur $\mathbf{R}_+^*$ est décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$.

Q27. — En déduire, pour tout $x \in]0,1[$, l'encadrement :

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t \leq f_\alpha(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t.$$

Q28. — En déduire un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1.

PROBLÈME 3 — FONCTION GAMMA ET TRANSFORMÉE DE FOURIER [3]

On utilise la fonction Gamma d'Euler (partie 1) pour calculer, en partie 2, une intégrale dépendant d'un paramètre.

Partie 1 — Autour de la fonction Gamma d'Euler

Pour $x \in \mathbf{R}$, on pose, lorsque cela a un sens, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$.

Q29. — Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la fonction Γ ? Justifier.

Q30. — Pour tout $x \in \mathcal{D}$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de x et de $\Gamma(x)$. En déduire, pour tout $x \in \mathcal{D}$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$, une expression de $\Gamma(x+n)$ en fonction de x, n et $\Gamma(x)$, ainsi que la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n \geqslant 1$.

Q31. — Montrer l'existence des deux intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^4}\, \mathrm{d}t$ et les exprimer à l'aide de Γ.

3. Extrait d'une épreuve du Concours Centrale 2016 de la filière PC

Q32. — Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Montrer que, pour tout $t > 0$ et tout $x \in [a, b]$,

$$t^x \leqslant \max(t^a, t^b) \leqslant t^a + t^b$$

Q33. — Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$. Soit $k \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathcal{D}$. Exprimer $\Gamma^{(k)}(x)$, dérivée k-ième de Γ au point x, sous forme d'une intégrale.

Q34. — Montrer que Γ' s'annule en un unique réel ξ dont on déterminera la partie entière.

Q35. — En déduire les variations de Γ sur $\mathcal{D}$. Préciser en particulier les limites de Γ en 0 et en $+\infty$. Préciser également les limites de Γ' en 0 et en $+\infty$. Esquisser le graphe de Γ.

Partie 2 — Une transformée de Fourier

Pour $x \in \mathbf{R}$, *on pose* $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{-3/4} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\, \mathrm{d}t$, *où* i *désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument* $\pi/2$.

Q36. — Montrer que la fonction $F : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \to & \mathbf{C} \\ x & \mapsto & F(x) \end{array}$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$. Soit k un entier naturel non nul et soit x un réel. Donner une expression intégrale de $F^{(k)}(x)$, dérivée k-ième de F en x. Préciser $F(0)$.

Q37. — Montrer qu'au voisinage de $x = 0$, la fonction F peut s'écrire sous la forme

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \frac{(\mathrm{i}x)^n}{n!} \qquad \text{(S)}$$

où c_n est la valeur de Gamma en un point à préciser. On exprimera c_n en fonction de n et de c_0.

Q38. — Quel est le rayon de convergence de la série entière qui apparaît au second membre de **(S)** ?

On admet que $\Gamma(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} x^{x-1/2} \mathrm{e}^{-x}$.

Q39. — Étudier si la série du second membre de **(S)** converge absolument lorsque $|x| = 1$.

Q40. — Soit $R(x)$ la partie réelle et $I(x)$ la partie imaginaire de $F(x)$. Déterminer, au voisinage de 0, le développement limité de $R(x)$ à l'ordre 3 et de $I(x)$ à l'ordre 4.

Q41. — Prouver que F vérifie sur $\mathbf{R}$ une équation différentielle de la forme $F' + AF = 0$, où A est une fonction à préciser.

Q42. — En déduire une expression de $F(x)$. On pourra commencer par dériver la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{8}\ln(1 + x^2) + \dfrac{\mathrm{i}}{4}\arctan x$.