M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Un corrigé du devoir surveillé n°6 (4h)

Suites et séries de fonctions, convexité, familles sommables et théorèmes de Lebesgue

MM. BLANCHARD, BILLOUET, LAROCHETTE et LUCAS

Sujet CCINP

EXERCICE I [CCINP–MP–2021]

On note f la fonction définie sur $]0,1[$ par $f(t) = \dfrac{\ln t}{t^2-1}$.

Q1. — Soit $k \in \mathbf{N}$. Justifier l'existence puis calculer l'intégrale $I_k = \displaystyle\int_0^1 t^{2k} \ln t \ \mathrm{d}t$.

Soit $k \in \mathbf{N}$ et $f_k : t \in]0,1] \mapsto t^{2k} \ln t$. C'est une fonction continue sur $]0,1]$ et $|f_k(t)| \underset{t\to 0^+}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ car $t^{2k+1/2} \ln t \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$ par croissances comparées.

Or $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,1]$ (intégrale de Riemann avec $\dfrac{1}{2} < 1$), donc par comparaison de fonction positives, f_k est intégrable sur $]0,1]$.

Puis, par intégration par parties, avec $\varepsilon > 0$, $t \mapsto \dfrac{t^{2k+1}}{2k+1}$ et $\ln$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$,

$$\int_\varepsilon^1 t^{2k} \ln t \ \mathrm{d}t = \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1} \ln t\right]_\varepsilon^1 - \frac{1}{2k+1} \int_\varepsilon^1 t^{2k} \ \mathrm{d}t = -\frac{\varepsilon^{2k+1} \ln \varepsilon}{2k+1} - \frac{1}{(2k+1)^2}\left(1-\varepsilon^{2k+1}\right).$$

Donc, en faisant tendre ε vers 0 et par croissances comparées, $\displaystyle\int_0^1 t^{2k} \ln t \ \mathrm{d}t = -\frac{1}{(2k+1)^2}$.

Q2. — Justifier que la fonction f est intégrable sur $]0,1[$, puis démontrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t) \ \mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{8}$. On pourra utiliser librement que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

f est continue et positive sur $]0,1[$ et, de nouveau, $f(t) \underset{t\to 0^+}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ car $\sqrt{t} f(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} -\sqrt{t} \ln t \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$ donc par comparaison de fonctions positives, f est intégrable sur $]0, \frac{1}{2}]$.

Puis $f(t) = \dfrac{\ln(1+(t-1))}{(t+1)(t-1)} \underset{t\to 1^-}{\sim} \dfrac{t-1}{2(t-1)} = \dfrac{1}{2}$ donc $f(t) \xrightarrow[t\to 1^-]{} \dfrac{1}{2}$ donc f est prolongeable par continuité en 1 donc intégrable sur $[\frac{1}{2}, 1[$.

Finalement, f est intégrable sur $]0,1[$.

Puis, pour $t \in]0,1[$, $t^2 \in]-1,1[$ donc $\dfrac{1}{1-t^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k}$, d'où $\displaystyle\int_0^1 f(t) \ \mathrm{d}t = -\int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k} \ln t \ \mathrm{d}t = -\int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t) \ \mathrm{d}t$.

Justifions l'interversion série intégrale par le théorème d'intégration terme-à-terme de Lebesgue :

H1. La série de fonctions $\sum f_k$ converge simplement vers $-f$ qui est continue sur $]0,1[$.

H2. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, f_k est intégrable sur $]0,1[$ d'après la question Q1 car négative et d'intégrale convergente.

H3. Avec Q1, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\displaystyle\int_0^1 |f_k(t)| \, \mathrm{d}t = \frac{1}{(2k+1)^2} \sim \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{k^2}$ avec $\sum \frac{1}{k^2}$ convergente en tant que série de Riemann avec $2 > 1$, donc par comparaison de séries à termes généraux positifs, $\displaystyle\sum \int_0^1 |f_k(t)| \, \mathrm{d}t$ converge.

On a alors $\displaystyle\int_0^1 f(t) \, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ (qui est positif, ce qui est rassurant).

Or, si $N \in \mathbf{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} - \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(2k)^2} = \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{p^2} - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n^2}$, donc en faisant tendre N vers $+\infty$, $\displaystyle\int_0^1 f(t) \, \mathrm{d}t = \frac{3}{4} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et finalement $\displaystyle\int_0^1 f(t) \, \mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{8}$.

EXERCICE II [CCINP–MP–2021]

Q3. — Justifier que la fonction $\ln$ est concave sur $]0,+\infty[$ et en déduire que

$$\forall\,(a,b,c) \in]0,+\infty[^3, \qquad \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}\ .$$

$\ln$ est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\ln'' : x \mapsto -\dfrac{1}{x^2} \leqslant 0$ donc $\ln$ est concave sur $]0,+\infty[$.

L'inégalité de concavité généralisée appliquée à $a, b, c \in]0,+\infty[$ avec des poids tous égaux à $\dfrac{1}{3}$ donne alors

$$\ln \frac{a+b+c}{3} \geqslant \frac{\ln a + \ln b + \ln c}{3} = \ln \sqrt[3]{abc},$$

donc, par croissance de l'exponentielle, $\sqrt[3]{abc} \leqslant \dfrac{a+b+c}{3}$.

Q4. — En déduire que la fonction f définie sur $]0,+\infty[^2$ par $f(x,y) = x + y + \dfrac{1}{xy}$ admet un minimum global, atteint au point $(1,1)$.

On calcule $f(1,1) = 3$. Soient x, y des réels strictement positifs. En spécialisant Q3 à $a = x > 0$, $b = y > 0$ et $c = \dfrac{1}{xy} > 0$, il vient $1 \leqslant \dfrac{f(x,y)}{3}$ puis $f(x,y) \geqslant 3 = f(1,1)$.

PROBLÈME - [CCINP–MP–2020]

Objectifs. L'objectif de la **partie I** est de montrer l'existence d'un développement ternaire propre pour certains nombres réels. La **partie II** propose l'étude d'une série de fonctions où les coefficients du développement ternaire sont remplacés par une fonction continue. La **partie III** définit et présente quelques propriétés de la fonction de Cantor-Lebesgue

Notations.
On note T l'ensemble des suites réelles $t = (t_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$.
On désigne par ℓ^∞ l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ bornées et on pose $||\,u\,|| = \sup\limits_{n\in\mathbf{N}^*} |u_n|$.
On note $\lfloor y \rfloor$ la partie entière d'un réel y.

Partie I - Développement ternaire

Étude de l'application σ

Q5. — Démontrer que ℓ^∞ est un espace vectoriel réel et que $u \mapsto ||\,u\,||$ est une norme sur ℓ^∞.

Montrons que ℓ^∞ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles $\mathbf{R}^\mathbf{N}$:

- On a tout d'abord $\ell^\infty \subset \mathbf{R}^\mathbf{N}$;
- La suite nulle étant bornée, elle appartient bien à ℓ^∞ ;
- Si $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sont deux suites de ℓ^∞, bornées respectivement par M_u et M_v et λ, μ deux réels, l'inégalité triangulaire nous apprend que, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$|\lambda u_n + \mu v_n| \leq |\lambda| M_u + |\mu| M_v$$

  ce qui montre que $\lambda u + \mu v$ est bornée, donc dans ℓ^∞.

Ainsi, par caractérisation des sous-espaces vectoriels, ℓ^∞ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^\mathbf{N}$, donc un espace vectoriel réel.

Montrons maintenant que $u \mapsto ||\,u\,||$ est une norme sur ℓ^∞ :

- **Caractère bien défini** : si $u \in \ell^\infty$,

$$\{|u_n|, n \in \mathbf{N}^*\}$$

  est une partie non vide (elle contient $|u_1|$) et majorée (puisque u est bornée) de $\mathbf{R}$, donc par propriété de la borne supérieure, $||\,u\,||$ existe.
- **Séparation** : si $u \in \ell^\infty$ est telle que $||\,u\,|| = 0$, cela veut dire que $\sup\limits_{n\in\mathbf{N}^*} |u_n| = 0$, donc que 0 majore tous les $|u_n|$, qui sont des nombres positifs. On a donc :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad |u_n| = 0$$

  et par suite, u est la suite nulle.
- **Inégalité triangulaire** : soit $u, v \in \ell^\infty$. On a alors, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| \leq ||\,u\,|| + ||\,v\,||$$

donc la quantité $||\,u\,|| + ||\,v\,||$ est un majorant de tous les nombres $|u_n + v_n|$, et elle est donc plus grande que le plus petit desdits majorants, à savoir $||\,u+v\,||$. On a donc bien :

$$||\,u+v\,|| \leq ||\,u\,|| + ||\,v\,||$$

— **Homogénéité** : soit $\lambda \in \mathbf{R}$ et $u \in \ell^\infty$. Si $\lambda = 0$, on a $||\,\lambda u\,|| = 0 = 0\,||\,u\,||$. Supposons maintenant $\lambda \neq 0$. On a alors, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$|\lambda u_n| = |\lambda||u_n| \leq |\lambda|\,||\,u\,||$$

De ce fait, $||\,\lambda u\,|| \leq |\lambda|\,||\,u\,||$. Par ailleurs, on a $u = \frac{1}{\lambda}(\lambda u)$, donc :

$$||\,u\,|| = \left|\left|\,\frac{1}{\lambda}(\lambda u)\,\right|\right| \leq \frac{1}{|\lambda|}\,||\,\lambda u\,||$$

et donc

$$||\,\lambda u\,|| \leq \lambda\,||\,u\,||$$

On conclut donc à l'égalité

$$||\,\lambda u\,|| = |\lambda|\,||\,u\,||$$

ce qui conclut la preuve.

Q6. — Pour $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in \ell^\infty$, montrer que la série de terme général $\dfrac{u_n}{3^n}$ est convergente. On note

$$\sigma(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{3^n}.$$

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in \ell^\infty$, bornée par M. Alors, on a

$$0 \leq \frac{|u_n|}{3^n} \leq \frac{M}{3^n}.$$

Or, $\frac{M}{3^n}$ est le terme général d'une série convergente (série géométrique de raison dans $]-1,1[$) ; par comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général u_n converge donc absolument, donc converge.

Q7. — Démontrer que l'application σ est une forme linéaire continue sur ℓ^∞.

Montrons tout d'abord que σ est bien une forme linéaire sur ℓ^∞. σ est bien à valeurs dans $\mathbf{R}$. Par ailleurs, soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}, v = (v_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in \ell^\infty$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. On a alors

$$\sigma(\lambda u + \mu v) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\lambda u_n + \mu v_n)}{3^n} = \lambda \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{3^n}\right) + \mu \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{v_n}{3^n}\right) = \lambda\sigma(u) + \mu\sigma(v)$$

par linéarité de la somme d'une série (notons que cette égalité est justifiée par le fait que toutes les séries qui interviennent convergent bien d'après la question précédente). Ainsi, σ est linéaire, et σ est donc bien une forme linéaire.

Montrons maintenant que σ est continue. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in \ell^\infty$. Soit $N \in \mathbf{N}^*$. Alors :

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \frac{u_n}{3^n}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{|u_n|}{3^n} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{3^n}\right) ||\, u\, ||$$

Le terme de gauche de cette inégalité converge vers $\|\sigma(u)\|$, celui de droite converge également car la série de terme général $\frac{1}{3^n}$ converge, pour les mêmes raisons qu'n Q6. Par conséquent, on peut passer à la limite lorsque $N \to +\infty$, et :

$$\|\sigma(u)\| \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}\right) ||\, u\, ||$$

et d'après une caractérisation de la continuité des applications linéaires, cela montre que σ est une forme linéaire continue sur ℓ^∞.

Q8. — Démontrer que si $t = (t_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in T$, alors le réel $\sigma(t)$ est dans l'intervalle $[0, 1]$.

Soit $t = (t_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in T$. Notamment, pour tout $n \in \mathbf{N}^*, 0 \leq \frac{t_n}{3^n} \leq \frac{2}{3^n}$, donc

$$0 \leq \sigma(t) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^n}$$

et cette dernière somme de série vaut 1 car, pour $N \in \mathbf{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{2}{3^n} = 2\frac{1-3^{-N}}{2} \to 1$$

Donc $\sigma(t) \in [0, 1]$.

Q9. — On note $\tau = (\tau_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ l'élément de T défini par par $\tau_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$, $\tau_n = 0$. On introduit également l'élément $\tau' = (\tau'_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de T défini par $\tau'_1 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$, $\tau'_n = 2$. Calculer $\sigma(\tau)$ et $\sigma(\tau')$. L'application σ est-elle injective sur T ?

On a

$$\sigma(\tau) = \frac{\tau_1}{3^1} = \frac{1}{3}$$

et

$$\sigma(\tau') = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^n} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Notamment, l'application σ n'est pas injective sur T.

Développement ternaire propre

On fixe $x \in [0, 1[$. On définit une suite $t(x) = (t_n(x))_{n \in \mathbf{N}^*}$ par

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ t_n(x) = \lfloor 3^n x \rfloor - 3 \lfloor 3^{n-1} x \rfloor .$$

Q10. — Démontrer que $t(x) \in T$.

Il s'agit de montrer que $t(x)$ est à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$. Notons que pour tout $n \in \mathbf{N}^*, t_n(x)$ est un entier relatif comme différence d'entiers relatifs. Par ailleurs, pour $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$3^n x - 1 < \lfloor 3^n x \rfloor \leq 3^n x$$

et

$$3^{n-1} x - 1 < \lfloor 3^{n-1} x \rfloor \leq 3^{n-1} x$$

d'où (à chaque fois on somme une inégalité large et une inégalité stricte, donc on a bien une inégalité stricte)

$$3^n x - 1 - 3(3^{n-1} x) = -1 < t_n(x) < 3^n x - 3(3^{n-1} x - 1) = 3$$

Et puisque $t_n(x)$ est entier, on a bien $t_n(x) \in \{0, 1, 2\}$. Donc $t(x) \in T$.

Q11. — On définit deux suites réelles $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ et $(y_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ par

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ x_n = \frac{\lfloor 3^n x \rfloor}{3^n} \text{ et } y_n = x_n + \frac{1}{3^n}.$$

Démontrer que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes de limite x. En déduire que :

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t_n(x)}{3^n}.$$

Que peut-on en conclure concernant l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & [0, 1] \\ u & \longmapsto & \sigma(u) \end{array} \right.$?

Tout d'abord, $y_n - x_n = \frac{1}{3^n} \to 0$. De plus, pour $n \geq 2$,

$$x_n - x_{n-1} = \frac{\lfloor 3^n x \rfloor}{3^n} - \frac{\lfloor 3^{n-1} x \rfloor}{3^{n-1}} = \frac{t_n(x)}{3^n} \geq 0$$

donc $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est croissante, et, pour $n \geq 2$,

$$y_n - y_{n-1} = \frac{t_n(x)}{3^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{t_n(x) - 2}{3^n} \leq 0$$

donc $(y_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est décroissante. Ainsi, les suites $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ et $(y_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ sont adjacentes. Puisqu'on a l'encadrement, valable pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$3^n x - 1 \leq \lfloor 3^n x \rfloor \leq 3^n x$$

on a donc

$$1 - \frac{1}{3^n} \leq x_n \leq 1$$

et par théorème d'encadrement, $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge donc vers x, et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de même puisque $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sont adjacentes. Par ailleurs, pour $N \in \mathbf{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{t_n(x)}{3^n} = \frac{t_1(x)}{3} + \sum_{n=1}^{N} \frac{t_{n+1}(x)}{3^{n+1}} = \frac{\lfloor 3x \rfloor}{3} - \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{N} (x_{n+1} - x_n) = x_1 - 0 + x_{N+1} - x_1 = x_{N+1}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t_n(x)}{3^n} = x$$

La suite $t(x) = (t_n(x))_{n\in\mathbf{N}^*}$ est appelée développement ternaire propre de x.

Q12. — *Informatique pour tous.* Écrire en langage Python une fonction `flotVersTern(n,x)` d'arguments un entier naturel n et un flottant x et qui renvoie sous forme d'une liste les n premiers chiffres $t_1(x), \ldots, t_n(x)$ définis dans la question précédente du développement ternaire de x.

Par exemple `flotVersTern(4,0.5)` renvoie `[1,1,1,1]`.

```
def flotVersTern(n,x):
    T=[]
    for k in range(1,n+1):
        T.append(int(3**k*x)-3*int(3**(k-1)*x))
    return T
```

Q13. — *Informatique pour tous.* Si $\ell = [\ell_1, \ldots, \ell_n]$ est une suite finie d'entiers de $\{0; 1; 2\}$, on la complète avec des 0 pour en faire un élément de T encore noté ℓ.
Écrire en langage Python une fonction `ternVersFlot(`ℓ`)` d'arguments une liste d'entiers ℓ. Cette fonction renvoie en sortie le flottant $\sigma(\ell)$.

Par exemple `ternVersFlot([1,1,1,1])` renvoie 0.493827......

```
def ternVersFlot(l):
    x=0
    for k in range(len(l)):
        x+=l[k]/3**(k+1)
    return x
```

Q14. — *Informatique pour tous.* Si $\ell = [\ell_1, \ldots, \ell_n]$ est une suite finie d'entiers de $\{0; 1; 2\}$, on lui ajoute un élément égal à -1 si la somme $l_1 + \ldots + \ell_n$ est paire et un élément égal à -2 sinon. Ce dernier élément permet alors d'essayer de détecter d'éventuelles erreurs de transmission.
Écrire en langage Python une fonction `ajout(`ℓ`)` qui ajoute à la liste ℓ un élément comme expliqué précédemment et qui renvoie la nouvelle liste.
Écrire en langage Python une fonction `verif(`ℓ`)` qui renvoie `True` si la valeur du dernier élément de ℓ est correcte et `False` sinon.

Par exemple `ajout([1,0,2,1,0])` renvoie `[1,0,2,1,0,-1]` et `verif([1,0,2,1,0,-2])` renvoie `False`.

```
def ajout(l):
    s=0
    for k in l:
        s+=k
    if s%2==0:
        l.append(-1)
    else:
        l.append(-2)
    return l

def verif(l):
    s=0
    for k in range(len(l)-1):
        s+=l[k]
    if s%2==0 and l[-1]==-1:
        return True
    if s%2==1 and l[-1]==-2:
        return True
    return False
```

Partie II - Étude d'une fonction définie par une série

Dans cette partie, on définit une fonction φ à l'aide d'un développement en série analogue au développement ternaire propre d'un réel, mais où la suite $(t_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est remplacée par une fonction numérique à valeurs dans l'intervalle $[0,2]$.

Pour tout réel x on pose :

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+\sin(nx)}{3^n}.$$

Étude de l'application φ

Q15. — Démontrer que φ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$.

Notons

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1+\sin(nx)}{3^n} \end{array} \right. .$$

— Les f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ comme composition, somme et quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

— Comme $\sin$ varie entre -1 et 1, $|| f_n ||_\infty = \frac{2}{3^n}$. Par ailleurs, $\sum \dfrac{2}{3^n}$ converge (c'est une série géométrique de raison $\frac{1}{3}$). Donc $\sum f_n$ converge normalement, donc simplement, sur $\mathbf{R}$.

— Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f_n'(x) = \frac{n\cos(nx)}{3^n}$ donc $|| f ||_\infty = \frac{n}{3^n}$. Or, $\frac{n}{3^n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par croissance comparée. Comme $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série positive et convergente (c'est une série de Riemann d'exposant strictement plus grand que 1), par comparaison, $\sum \frac{n}{3^n}$ converge. Donc $\sum f_n'$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbf{R}$.

D'après le théorème de dérivation d'une série, φ est donc bien définie sur $\mathbf{R}$ et est de classe $\mathcal{C}^1$.

Q16. — Pour tout x réel, justifier l'écriture : $\varphi(x) = \frac{1}{2} + \mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{3^n}\right)$. En déduire une expression simple de $\varphi(x)$ en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.

Notons que, pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$\left|\frac{e^{inx}}{3^n}\right| \leq \frac{1}{3^n}$$

De même que dans la question 6, la série de fonctions $x \mapsto \sum \frac{e^{inx}}{3^n}$ converge donc simplement. Notamment, sa partie imaginaire converge simplement. Soit maintenant $x \in \mathbf{R}$ (fixé pour le reste de la question) :

$$\mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Im}\left(\frac{e^{inx}}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{3^n}$$

D'autre part, par le même calcul qu'à la question 4,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}$$

On obtient donc bien

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{3^n} = \frac{1}{2} + \mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{3^n}\right)$$

Enfin, par somme d'une série géométrique convergente et de raison différente de 1 :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{3^n} = \frac{e^{ix}}{3\left(1 - \frac{e^{ix}}{3}\right)} = \frac{e^{ix}\left(1 - \frac{e^{-ix}}{3}\right)}{3\left(\left(1 - \frac{\cos(x)}{3}\right)^2 + \frac{\sin^2(x)}{9}\right)} = \frac{3e^{ix} - 1}{10 - 6\cos(x)}$$

On obtient donc :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{2} + \frac{3\sin(x)}{10 - 6\cos(x)}$$

Q17. — Pour $x \in \mathbf{R}$, en déduire une expression simple de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\cos(nx)}{3^n}$ en fonction de $\cos(x)$.

La question 15 nous a permis de vérifier le théorème de dérivation d'une série de fonctions terme à terme. Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\cos(nx)}{3^n}$$

D'autre part, en dérivant à vue l'expression obtenue à la question précédente, on trouve que, pour $x \in \mathbf{R}$:

$$\varphi'(x) = \frac{3\cos(x)(10-6\cos(x)) - 3\sin(x)6\sin(x)}{(10-6\cos(x))^2} = \frac{-18+30\cos(x)}{(10-6\cos(x))^2}$$

On en déduit donc que, pour $x \in \mathbf{R}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\cos(nx)}{3^n} = \frac{-18+30\cos(x)}{(10-6\cos(x))^2}$$

Q18. — Démontrer que, pour tout $x \in]-1,1[$, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$.

Posons pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$g_n \left| \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \right. .$$

Les fonctions g_n sont toutes continues sur $]-1,1[$. Comme pour tout $0 < a < 1$, $|| f_n ||_{\infty,[-a,a]} = a^n$ est le terme général d'une série géométrique convergente, la série de fonctions $\sum g_n$ converge normalement sur tout segment de $]-1,1[$, donc uniformément sur tout segment de $]-1,1[$. Par théorème de primitivation terme-à-terme, il vient, pour tout $x \in]-1,1[$

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x f_n(t)\ \mathrm{d}t$$

soit

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

qui livre alors l'identité demandée.

Q19. — À l'aide de $\int_0^\pi \varphi(x)dx$ démontrer que :

$$\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{10-6\cos(x)}dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}+1}{n3^{n+1}}.$$

Puis en calculant la somme de la série du second membre, en déduire $\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{10-6\cos(x)}dx$.

On a montré en question 15 que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbf{R}$. Cette série converge donc uniformément. Par ailleurs, les f_n, étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, sont notamment continues sur $[0,\pi]$. Par théorème d'intégration d'une série terme-à-terme :

$$\int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)\ \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^\pi f_n(x)\ \mathrm{d}x\right)$$

donc

$$\int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)\ \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{x}{3^n} - \frac{\cos(nx)}{n3^n}\right]_0^\pi = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{3^n} + \frac{(-1)^{n-1}+1}{n3^n}\right)$$

Or, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\pi}{3^n} = \pi\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n} = \frac{\pi}{2}$ d'après la question 16, donc :

$$\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{10-6\cos(x)}\ \mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{\varphi(x)-\frac{1}{2}}{3}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^\pi \varphi(x)\ \mathrm{d}x - \frac{\pi}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}+1}{n3^{n+1}}$$

D'après la question 18

$$\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{10-6\cos(x)}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left(\ln\left(1+\frac{1}{3}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{3}\ln(2)$$

Q20. — Retrouver la valeur de cette intégrale par un calcul direct.

Avec le changement de variable (licite, car de classe $\mathcal{C}^1$) $u=\cos(x),\ \mathrm{d}u = -\sin(x)\ \mathrm{d}x$, on obtient que

$$\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{10-6\cos(x)}\ \mathrm{d}x = \int_1^{-1}\frac{-1}{10-6u}\ \mathrm{d}u = \left[\frac{1}{6}\ln(10-6u)\right]_1^{-1} = \frac{1}{3}\ln(2)$$

Partie III - Fonction de Cantor-Lebesgue

Dans cette partie, on va définir et étudier la fonction de Cantor-Lebesgue.

Étude d'une suite de fonctions

On note f_0 la fonction définie sur $[0,1]$ par $f_0(x)=x$. Pour tout entier $n\in\mathbf{N}$, on pose :

$$\forall x\in[0,1],\ f_{n+1}(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(3x)}{2} & \text{si } x\in\left[0,\frac{1}{3}\right] \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x\in\left]\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right[\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{f_n(3x-2)}{2} & \text{si } x\in\left[\frac{2}{3},1\right] \end{cases}.$$

Q21. — Représenter l'allure graphique des fonctions f_0, f_1 et f_2 sur trois schémas différents (pour f_2 on envisagera sept sous-intervalles de $[0,1]$). Pour tout $n \in \mathbf{N}$, démontrer que f_n est à valeurs dans $[0,1]$.

On a :

$$\forall x \in [0,1], f_0(x) = x$$

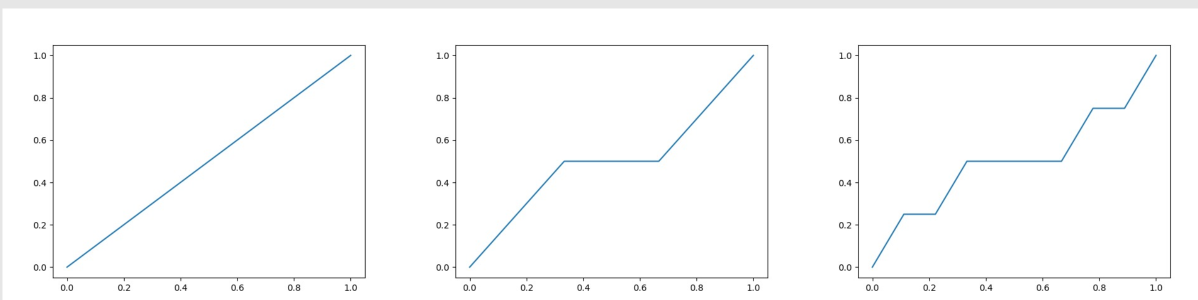
D'où l'on déduit que :

$$\begin{cases} \forall x \in \left[0, \frac{1}{3}\right], \ f_1(x) = \frac{3}{2}x \\ \forall x \in \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[, \ f_1(x) = \frac{1}{2} \\ \forall x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right], \ f_1(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \end{cases}$$

puis que

$$\begin{cases} \forall x \in \left[0, \frac{1}{9}\right], \ f_2(x) = \frac{9}{4}x \\ \forall x \in \left]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right[, \ f_2(x) = \frac{1}{4} \\ \forall x \in \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right], \ f_2(x) = \frac{9}{4}x - \frac{1}{4} \\ \forall x \in \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[, \ f_2(x) = \frac{1}{2} \\ \forall x \in \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right], \ f_2(x) = \frac{9}{4}x - 1 \\ \forall x \in \left]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right[, \ f_2(x) = \frac{3}{4} \\ \forall x \in \left[\frac{8}{9}, 1\right[, \ f_2(x) = \frac{9}{4}x - \frac{5}{4} \end{cases}$$

On en déduit les graphiques respectifs de f_0, f_1 et f_2 :



Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f_n([0,1]) \subset [0,1]$.

— ***Initialisation à*** $n = 0$. Comme pour tout $x \in [0,1]$, $f_0(x) = x$, on a $f_0([0,1]) \subset [0,1]$.

— ***Hérédité.*** Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $f_n([0,1]) \subset [0,1]$. Soit $y \in f_{n+1}([0,1])$. Il existe donc $x \in [0,1]$ tel que $y = f_{n+1}(x)$.

  — Si $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3}$ alors $y = \dfrac{f_n(3x)}{2} \in [0,1]$ puisque $f_n(3x) \in [0,1]$ (HR).

  — Si $\dfrac{1}{3} < x < \dfrac{2}{3}$, alors $f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{2} \in [0,1]$.

  — Si $\dfrac{2}{3} \leqslant x \leqslant 1$, alors $f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{f_n(3x-2)}{2} \in [0,1]$ car $f_n(3x-2) \in [0,1]$ (HR).

Q22. — *Informatique pour tous.* Écrire en langage Python une fonction récursive `cantor(n,x)` qui renvoie la valeur de $f_n(x)$.

```
def cantor(n,x):
    if n == 0:
        return x
    if x <= 1 / 3:
```

```
        return cantor( n - 1, 3 * x) / 2
    if x >= 2 / 3:
        return cantor( n - 1, 3 * x - 2) / 2 + 1 /2
    return 1 / 2
```

Q23. — Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, démontrer que :

$$\forall x \in [0,1],\ |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{3 \times 2^{n+1}}.$$

Montrons que la propriété :

$$\mathcal{P}(n) : \forall x \in [0,1], |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{3 \times 2^{n+1}}$$

est vraie pour tout $n \geq 0$.

— ***Initialisation.*** Tout d'abord :

- — Si $x \in [0, \frac{1}{3}]$, alors

$$|f_1(x) - f_0(x)| = \frac{x}{2} \leq \frac{1}{6}$$

- — Si $x \in \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$, alors $|f_1(x) - f_0(x)| = \left|x - \frac{1}{2}\right|$. Si $x \geq \frac{1}{2}$, on a donc

$$|f_1(x) - f_0(x)| = x - \frac{1}{2} \leq \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

D'autre part, si $x < \frac{1}{2}$, on a

$$|f_1(x) - f_0(x)| = \frac{1}{2} - x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

- — Si $x \in [\frac{2}{3}, 1]$, alors

$$|f_1(x) - f_0(x)| = \left|\frac{1}{2} + \frac{3x-2}{2} - x\right| = \frac{1}{2}|x-1| = \frac{1}{2}(1-x) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6}$$

donc la propriété $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

— ***Hérédité.*** Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Alors :

- — Si $x \in [0, \frac{1}{3}]$, alors

$$|f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x)| = \frac{1}{2}|f_{n+1}(3x) - f_n(3x)| \leq \frac{1}{2}\frac{1}{3 \times 2^{n+1}} = \frac{1}{3 \times 2^{n+2}}$$

- — Si $x \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$, alors

$$|f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x)| = 0$$

— Si $x \in [\frac{2}{3}, 1]$, alors

$$|f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x)| = \frac{1}{2}|f_{n+1}(3x-2) - f_n(3x-2)| \leq \frac{1}{2}\frac{1}{3 \times 2^{n+1}} = \frac{1}{3 \times 2^{n+2}}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Q24. — En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

La série de terme général $\frac{1}{3\times 2^n}$ converge en tant que série géométrique de raison dans $]-1, 1[$. D'après la question précédente, la série de fonctions $\sum(f_{n+1} - f_n)$ converge donc normalement sur $[0, 1]$, donc uniformément sur $[0, 1]$. Par lien suite-série, la suite de fonctions $(f_n - f_0)_{n\in\mathbf{N}}$ converge donc uniformément sur $[0, 1]$, et il en va donc de même pour $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

La limite de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est notée f. *On l'appelle fonction de Cantor-Lebesgue.*

Q25. — Démontrer que la fonction f est à valeurs dans $[0, 1]$ et qu'elle est croissante et continue sur $[0, 1]$. Démontrer aussi qu'elle est surjective de $[0, 1]$ vers $[0, 1]$.

Montrons que la propriété $\mathcal{P}(n)$: f_n est continue et croissante sur $[0, 1]$, $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 1$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

— ***Initialisation.*** $\mathcal{P}(0)$ est vraie car $f_0 = \mathrm{Id}$ qui est bien continue, croissante sur $[0, 1]$, et vaut bien 0 en 0 et 1 en 1.

— ***Hérédité.*** Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$.

Alors f_{n+1} est continue sur $[0, \dfrac{1}{3}],]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$ et $[\frac{2}{3}, 1]$ comme somme, quotient et composition de fonctions continues. Par ailleurs,

$$f_{n+1}\left(\frac{1}{3}\right) = \lim_{x\to\frac{1}{3}^-} f_{n+1}(x) = \lim_{x\to\frac{1}{3}^-} \frac{f_n(3x)}{2} = \frac{f_n(1)}{2} = \frac{1}{2} = \lim_{x\to\frac{1}{3}^+} f_{n+1}(x)$$

donc f_{n+1} est continue en $\frac{1}{3}$. On montre de la même manière que f_{n+1} est continue en $\frac{2}{3}$. Donc f_{n+1} est continue sur $[0, 1]$.

Comme composée de fonctions croissantes, f_{n+1} est également croissante sur chacun des intervalles $[0, \dfrac{1}{3}]$ et $[\frac{2}{3}, 1]$, et elle est constante donc croissante sur $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$. Comme cette croissance a lieu sur chaque intervalle fermé, on peut « recoller » cette croissance sur tout $[0, 1]$: par exemple si $x \in [0, \dfrac{1}{3}]$ et $y \in [\frac{2}{3}, 1]$, on a $f_{n+1}(x) \leq f_{n+1}\left(\frac{1}{3}\right) \leq f_{n+1}\left(\frac{2}{3}\right) \leq f_{n+1}(y)$).

Enfin, $f_{n+1}(0) = \frac{f_n(3\times 0)}{2} = 0$ et $f_{n+1}(1) = \frac{1}{2} + \frac{f_n(3\times 1-2)}{2} = 1$.

Puisque pour tout $n \in \mathbf{N}$ et pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$0 \leq f_n(x) \leq 1$$

ce que l'on avait déjà établi en Q21. En passant à la limite en n, on trouve que pour tout $x \in [0, 1]$:

$$0 \leq f(x) \leq 1$$

La fonction f est donc bien à valeurs dans $[0,1]$. Par ailleurs, si $0 \leq x \leq y \leq 1$, on a pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$f_n(x) \leq f_n(y)$$

et là encore, en passant à la limite en n, on obtient

$$f(x) \leq f(y)$$

La fonction f est donc croissante, et en passant à la limite dans les égalités $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 1$, on obtient $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Puisque f est la limite uniforme d'une suite de fonctions continues sur $[0,1]$, elle est elle-même continue sur $[0,1]$. Enfin, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f([0,1])$ est un intervalle contenant $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, donc il contient $[0,1]$, et f est donc surjective.

La fonction f est aussi nommée « escalier du diable ». Les développements ternaires étudiés en début de problème permettent d'obtenir une expression analytique de $f(x)$.

Sujet Mines-Ponts

EXERCICE [CCMP–MP–2016]

Dans tout l'exercice n désigne un entier supérieur ou égal à 2. Soit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et $\mathcal{A}$ un sous ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est ***extrémale dans*** $\mathcal{A}$ si pour tous M, N dans $\mathcal{A}$ et tout $\lambda \in]0,1[$, on a l'implication :

$$A = \lambda M + (1-\lambda)N \Longrightarrow A = M = N.$$

On note $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des matrices ***bistochastiques*** de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $A = (A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls et tels que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} A_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} A_{j,i} = 1$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

On note enfin $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des matrices de permutation $M_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont les coefficients sont de la forme :

$$(M_\sigma)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour tous i, j dans $\{1, 2, \ldots, n\}$, où σ est une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Q1. — Montrer que l'ensemble $\mathcal{B}_n$ est convexe et compact. Est-il un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$?

- Soit A et $B \in \mathcal{B}_n$. Soit $\lambda \in [0,1]$. Montrons que $C = \lambda A + (1-\lambda)B \in \mathcal{B}_n$.

  Pour $i, k \in [\![1, n]\!]$, on a $C_{i,k} = \lambda A_{i,k} + (1-\lambda)B_{i,k} \geqslant 0$ car $[0,1]$ convexe et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} C_{i,j} = \lambda \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} + (1-\lambda)\sum_{j=1}^{n} B_{i,j} = 1$ et de même $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} C_{j,i} = 1$ On a bien $C \in \mathcal{B}_n$, on a montré que $\mathcal{B}_n$ est convexe

- On considère les applications $\varphi_i : M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mapsto \displaystyle\sum_{j=1}^{n} M_{i,j} \in \mathbf{R}$, $\varphi'_i : M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mapsto \displaystyle\sum_{j=1}^{n} M_{j,i} \in \mathbf{R}$ et $\psi_{i,k} : M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mapsto \displaystyle\sum_{j=1}^{n} M_{j,i} \in \mathbf{R}$. Ces applications sont continues car linéaires et définies sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dimension finie et de plus les notions topologiques ne dépendent pas du choix de la norme. On a

$$\mathcal{B}_n = \left(\bigcap_{i=1}^{n} \varphi_i^{-1}(\{1\})\right) \bigcap \left(\bigcap_{i=1}^{n} \varphi_i'^{-1}(\{1\})\right) \bigcap \left(\bigcap_{1\leqslant i,k\leqslant n} \psi_{i,k}^{-1}(\mathbf{R}^+)\right).$$

  Comme $\{1\}$ et $\mathbf{R}^+$ sont des fermés de $\mathbf{R}$, $\mathcal{B}_n$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ par intersection des fermés. De plus l'application $N : M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mapsto \displaystyle\max_{1\leqslant i,k\leqslant n} |M_{i,k}| \in \mathbf{R}$ est une norme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Ainsi $\forall M \in \mathcal{B}_n$, $N(M) \leqslant 1$ donc $\mathcal{B}_n$ est une partie bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Or $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est un espace de dimension finie et comme $\mathcal{B}_n$ est aussi fermée $\mathcal{B}_n$ est une partie compacte.

- La matrice nulle n'est pas bistochastique car la somme sur une rangée est nulle. Ainsi $\mathcal{B}_n$ n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Q2. — Montrer que $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{B}_n$ et que $\mathcal{P}_n$ est un sous-groupe multiplicatif de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. Tout élément de $\mathcal{P}_n$ est-il diagonalisable sur $\mathbf{C}$? L'ensemble $\mathcal{P}_n$ est-il convexe ?

- Soit $A \in \mathcal{P}_n$. On écrit $A = M_\sigma$ où σ est une permutation.
  Pour tout $i, k \in [\![1, n]\!]$, on a $A_{i,k} \geqslant 0$ car 0 et $1 \in \mathbf{R}^+$
  de plus $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} M_{i,j} = M_{\sigma^{-1}(i),j} + 0 = 1$ et de même $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} M_{j,i} = 1$
  donc $M \in \mathcal{B}_n$. On a montré $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{B}_n$.
- La matrice I_n est la matrice de permutation associée à l'identité de $[\![1, n]\!]$. Donc $I_n \in \mathcal{P}_n$.
- On considère σ et σ' deux permutations de $[\![1, n]\!]$. Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$

$$(M_\sigma \times M_{\sigma'})_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} (M_\sigma)_{i,k}(M_{\sigma'})_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma(k)}\delta_{k,\sigma'(j)} = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma^{-1}(i) = \sigma'(j) \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

  d'où $(M_\sigma \times M_{\sigma'})_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma \circ \sigma'(j) \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases} = (M_{\sigma\circ\sigma'})_{i,j}$. On en déduit que $M_\sigma \times M_{\sigma'} = M_{\sigma\circ\sigma'} \in \mathcal{P}_n$.
- Soit σ une permutation de $[\![1, n]\!]$. D'après les deux points précédents $M_\sigma \times M_{\sigma^{-1}} = M_{\sigma^{-1}} \times M_\sigma = M_{\mathrm{id}} = I_n$. Donc M_σ est inversible d'inverse $M_{\sigma^{-1}}$. Ainsi $\mathcal{P}_n \subset \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ et $\mathcal{P}_n$ est stable par passage à l'inverse.
- Soit $A = M_\sigma \in \mathcal{P}_n$. On note w l'ordre de σ dans $\mathfrak{S}_n$. D'après ce qui précède,

$$A^w = (M_\sigma)^w = M_{\sigma^w} = M_{\mathrm{id}} = I_n\ .$$

  Donc $X^w - 1$ est un polynôme annulateur de A. Or ce polynôme est scindé à racines simples dans $\mathbf{C}[X]$, donc A est diagonalisable sur $\mathbf{C}$. On a montré que Tout élément de $\mathcal{P}_n$ est diagonalisable sur $\mathbf{C}$
- Les matrices $M_{\mathrm{id}} = I_n$ et $M_{\tau_{1,2}} = E_{1,2} + E_{2,1} + \displaystyle\sum_{k=3}^{n} E_{k,k}$ sont des matrices de permutations. La matrice $\dfrac{1}{2}I_n + \dfrac{1}{2}M_{\tau_{1,2}}$ n'est pas une matrice de permutation puisque son coefficient d'adresse $(1, 1)$ est $\dfrac{1}{2}$. Ainsi L'ensemble $\mathcal{P}_n$ n'est pas convexe.

Q3. — Montrer que toute matrice de $\mathcal{P}_n$ est extrémale dans $\mathcal{B}_n$.

Soit $A \in \mathcal{P}_n$. Soit M, N dans $\mathcal{B}_n$ et $\lambda \in]0, 1[$ tels que $A = \lambda M + (1 - \lambda)N$. Montrons $A = M = N$. Soit $i, j \in [\![1, n]\!]$. On a $A_{i,j} = \lambda M_{i,j} + (1 - \lambda)N_{i,j}$. Comme M, N dans $\mathcal{B}_n$, on a $M_{i,j}$ et $N_{i,j} \in [0, 1]$ et $\lambda > 0$ et $1 - \lambda > 0$. Si on a $A_{i,j} = 0$, alors $0 = \lambda M_{i,j} + (1 - \lambda)N_{i,j}$ donc nécessairement $M_{i,j} = N_{i,j} = 0$. Sinon on a $A_{i,j} = 1$, on a $1 = \lambda M_{i,j} + (1 - \lambda)N_{i,j}$ donc nécessairement $M_{i,j} = N_{i,j} = 1$.
On utilisé le fait que 0 et 1 sont extrémaux dans $[0, 1]$. On a bien montré que toute matrice de $\mathcal{P}_n$

est extrémale dans $\mathcal{B}_n$.

Dans toute la suite de cette partie, on considère une matrice bistochastique $A = (A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ ***qui n'est pas une matrice de permutation.***

Q4. — Montrer qu'il existe un entier $r > 0$ et deux familles $i_1, i_2, \dots, i_r$ et $j_1, j_2, \dots, j_r$ d'indices distincts dans $\{1, 2, \dots, n\}$ tels que pour tous $k \in \{1, 2, \dots, r\}$, $A_{i_k,j_k} \in]0,1[$ et $A_{i_k,j_{k+1}} \in]0,1[$ avec $j_{r+1} = j_1$.

Étape 1 : On va construire par récurrence deux suites $(i_m)_{m\geqslant 1}$ et $(j_m)_{m\geqslant 1}$ telles que

$$\forall m \in \mathbf{N}^*,\ A_{i_m,j_m} \in]0,1[\text{ et } A_{i_m,j_{m+1}} \in]0,1[\text{ et } i_m \neq i_{m+1} \text{ et } j_m \neq j_{m+1}$$

On remarque que si $A \in \mathcal{B}_p$ et $\forall i,j \in [\![1,p]\!]$, $A_{i,j} \in \{0,1\}$ alors il y a exactement une occurrence de 1 et $p-1$ occurrences de 0 par ligne et par colonne. Dans ce cas, il existe une unique permutation σ telle que $A = M_\sigma$. Comme $A \in \mathcal{B}_p \setminus \mathcal{P}_p$, ceci nous fournit i_1, j_1 tels que $A_{i_1,j_1} \in]0,1[$ (par contraposée). Soit $N \in \mathbf{N}^*$. On suppose construit $(i_m)_{1\leqslant m\leqslant N}$ et $(j_m)_{1\leqslant m\leqslant N}$ telles que :

$$\begin{cases} \forall m \in [\![1,N]\!],\ A_{i_m,j_m} \in]0,1[\\ \forall m \in [\![1,N-1]\!],\ A_{i_m,j_{m+1}} \in]0,1[\\ \forall m \in [\![1,N-1]\!],\ i_m \neq i_{m+1} \\ \forall m \in [\![1,N-1]\!],\ j_m \neq j_{m+1} \end{cases}$$

On vient d'effectuer cette construction pour $N = 1$ ce qui est une initialisation. On a $A_{i_N,j_N} \in]0,1[$ et comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} A_{i_N,k} = 1$ et $\forall k \in [\![1,p]\!], A_{i_N,k} \geqslant 0$, ceci nous fournit un entier noté $j_{N+1} \in [\![1,p]\!] \setminus \{j_N\}$ tel que $A_{i_N,j_{N+1}} \in]0,1[$. De même, on construit $i_{N+1} \in [\![1,n]\!] \setminus \{i_N\}$ tel que $A_{i_{N+1},j_{N+1}} \in]0,1[$ On a donc construit $(i_m)_{1\leqslant m\leqslant N+1}$ et $(j_m)_{1\leqslant m\leqslant N+1}$ telles que :

$$\begin{cases} \forall m \in [\![1,N+1]\!],\ A_{i_m,j_m} \in]0,1[\\ \forall m \in [\![1,N]\!],\ A_{i_m,j_{m+1}} \in]0,1[\\ \forall m \in [\![1,N]\!],\ i_m \neq i_{m+1} \\ \forall m \in [\![1,N]\!],\ j_m \neq j_{m+1} \end{cases}$$

Ce qui nous donne l'hérédité. On a construit nos suites $(i_m)_{m\geqslant 1}$ et $(j_m)_{m\geqslant 1}$ par récurrence.
Étape 2 : Comme les couples (i_m, j_m) $(m \in \mathbf{N}^*)$ prennent au plus p^2 valeurs. Ceci nous fournit $a < b$ dans $\mathbf{N}^*$ tels que $(i_a, j_a) = (i_b, j_b)$ donc l'ensemble $\{k \in \mathbf{N}^* \,/\, \exists c \in \mathbf{N}^*,\ i_c = i_{c+k} \text{ ou } j_c = j_{c+k}\}$ est une partie non vide de $\mathbf{N}^*$. Cet ensemble admet donc un plus petit élément $r > 0$, de plus par construction des suites on a $r > 1$. On a alors : $\forall d \in \mathbf{N}^*,\ \forall m \in [\![1, r-1]\!],\ i_d \neq i_{d+m}$ et $j_d \neq j_{d+m}$ et on peut prendre $c \in \mathbf{N}$ tel que $i_c = i_{c+r}$ ou $j_c = j_{c+r}$.
Premier cas : Si $j_c = j_{c+r}$ alors les deux familles $i_c, i_{c+1}, \dots, i_{c+r-1}$ et $j_c, j_{c+1}, \dots, j_{c+r-1}$ sont d'indices distincts dans $\{1, 2, \dots, p\}$ tels que pour tous $k \in \{1, 2, \dots, r\}$, $A_{i_{c+k-1},j_{c+k-1}} \in]0,1[$ et $A_{i_{c+k-1},j_{c+k}} \in]0,1[$ avec $j_{c+r} = j_c$.
Deuxième cas : Si $j_c \neq j_{c+r}$, alors $i_c = i_{c+r}$ et $A_{i_c,j_{c+r}} = A_{i_{c+r},j_{c+r}} \in]0,1[$ et les deux familles $i_c, i_{c+1}, \dots, i_{c+r-1}$ et $j_c, j_{c+1}, \dots, j_{c+r}$ sont d'indices distincts dans $\{1, 2, \dots, p\}$. On remplace la valeur de j_c par celle de j_{c+r} de sorte que : pour tous $k \in \{1, 2, \dots, r\}$, $A_{i_{c+k-1},j_{c+k-1}} \in]0,1[$ et $A_{i_{c+k-1},j_{c+k}} \in]0,1[$ avec $j_{c+r} = j_c$.
Dans chaque cas il suffit d'effectuer un changement d'indice (translation de $1-c$) pour obtenir : un

entier $r > 1$ et deux familles $i_1, i_2, \ldots, i_r$ et $j_1, j_2, \ldots, j_r$ d'indices distincts dans $\{1, 2, \ldots, p\}$ tels que pour tous $k \in \{1, 2, \ldots, r\}$, $A_{i_k, j_k} \in]0, 1[$ et $A_{i_k, j_{k+1}} \in]0, 1[$ avec $j_{r+1} = j_1$.
J'ai imposé $r \geqslant 2$ car avec $r = 1$, le résultat ne permet pas d'introduire la matrice B de l'énoncé.

Q5. — En considérant la matrice $B = (B_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ définie par :

$$\begin{cases} B_{i_k, j_k} = 1 & k \in \{1, 2, \ldots, r\} \\ B_{i_k, j_{k+1}} = -1 & k \in \{1, 2, \ldots, r\} \\ B_{i,j} = 0 & \text{dans les autres cas,} \end{cases}$$

montrer que A n'est pas un élément extrémal de $\mathcal{B}_n$. En déduire l'ensemble des éléments extrémaux de $\mathcal{B}_n$.

On note $m = \min\left(\bigcup_{k=1}^{r} \{A_{i_k,j_k}, A_{i_k,j_{k+1}}, 1 - A_{i_k,j_k}, 1 - A_{i_k,j_{k+1}}\}\right)$. Ainsi les matrices $A - mB$ et $A + mB$ sont à coefficients positifs (ou nuls). La somme des coefficients de chaque rangée de B est nulle. Ainsi

$$\sum_{j=1}^{n} (A - mB)_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} (A + mB)_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} = 1$$

pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. De plus $B \neq 0$. Donc on a $A \neq A - mB \in \mathcal{B}_n$ et $A \neq A + mB \in \mathcal{B}_n$ et $A = \frac{1}{2}(A - mB) + \frac{1}{2}(A + mB)$. Ainsi A n'est pas un élément extrémal de $\mathcal{B}_n$.

On vient d'établir la contraposée de : $\forall M \in \mathcal{B}_n,\ (M \text{ est extrémale dans } \mathcal{B}_n) \Longrightarrow (M \in \mathcal{P}_n)$. On a établi la réciproque en Q3. On en déduit que l'ensemble des éléments extrémaux de $\mathcal{B}_n$ est $\mathcal{P}_n$.

PROBLÈME [CCMP–MP–2016]

Dans tout le problème, I désigne l'intervalle $]0, +\infty[$.

Partie A - Une intégrale généralisée

Q6. — Démontrer que $\psi : u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$ est intégrable sur I.

La fonction $\psi : u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$ est continue sur I par théorèmes généraux.
On a $\psi(u) \underset{u \to 0}{\sim} \dfrac{1}{u^{1/2}}$ or la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{u^{1/2}}$ est intégrable sur $]0, 1]$ car $\frac{1}{2} < 1$. Donc par comparaison à une fonction positive, ψ est intégrable sur $]0, 1]$.
De plus par croissance comparée $u^2 \psi(u) \underset{u \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\psi(u) = \underset{u \to +\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$. Or la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{u^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ car $2 > 1$. Donc par comparaison à une fonction positive, ψ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Ainsi $\psi : u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$ est intégrale sur $]0, +\infty[$.

Q7. — On admet que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. En déduire la valeur de $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \, \mathrm{d}u$.

On effectue le changement de variable $t = \sqrt{u}$, $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \, \mathrm{d}u$, licite car $u \longmapsto \sqrt{u}$ est $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $]0, +\infty[$ sur lui-même.

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \, \mathrm{d}u = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}.$$

La constante K égale donc $\sqrt{\pi}$.

Partie B - Étude de deux séries de fonctions

Dans toute cette partie, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$ et $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n} e^{-nx}$.

Q8. — Montrer que f et g sont définies et continues sur I.

(i) Pour $n \geqslant 1$, la fonction $x \mapsto \sqrt{n} e^{-nx}$ est continue sur I.

(ii) Soit $a < b$ dans I. On a : $\forall x \in I, \ \forall n \in \mathbf{N}^*, \ |\sqrt{n} e^{-nx}| \leqslant \sqrt{n} e^{-na}$. Or $n^2 \sqrt{n} e^{-na} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée. Donc $\sqrt{n} e^{-na} \underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge. Ainsi par comparaison à une série à termes positifs la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \sqrt{n} e^{-na}$ converge. On en déduit que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \left(x \mapsto \sqrt{n} e^{-nx}\right)$ converge normalement sur tout segment de I.

(iii) Ainsi $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \left(x \mapsto \sqrt{n} e^{-nx}\right)$ converge simplement vers g sur I.

Avec (i), (ii) et (iii), on vient de montrer que g est définie et continue sur I De manière analogue f est définie et continue sur I.

Q9. — Montrer que pour tout $x \in I$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} \, \mathrm{d}u \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} \, \mathrm{d}u$. En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to 0$.

Soit $x \in I$. On pose $l : u \mapsto \dfrac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}$.

Cette fonction est le produit des deux fonctions positives et décroissantes sur I : $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{u}}$ et $u \mapsto e^{-ux}$. Donc la fonction l est décroissante sur I, et comme en Q6, la fonction l est continue et intégrable sur I. Ainsi pour $n \geqslant 1$, on a $\displaystyle\int_n^{n+1} l(u)\ \mathrm{d}u \leqslant l(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} l(u)\ \mathrm{d}u$. En sommant on obtient pour $N \geqslant 1$,

$$\int_1^{N+1} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\ \mathrm{d}u \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}} \leqslant \int_0^{N} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\ \mathrm{d}u.$$

Puis par passage à la limite quand $N \to +\infty$: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\ \mathrm{d}u \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\ \mathrm{d}u$.

On effectue le changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif, strictement croissant : $ux = t$, $x\ \mathrm{d}u = \ \mathrm{d}t$. On obtient $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{xt}}\ \mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{xt}}\ \mathrm{d}t$. Donc par théorème d'encadrement $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sqrt{x} f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t = K = \sqrt{\pi}$. On en déduit l'équivalent $\displaystyle f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{x}}$.

Q10. — Montrer que la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On a $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2(\sqrt{n} - \sqrt{n+1})$. donc $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n(n+1)} + n + 1} \leqslant 0$.

Donc la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante. En utilisant une comparaison série intégrale comme en Q9 on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{1}$. Ainsi

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \geqslant 2\sqrt{n+1} - 2 - 2\sqrt{n} \geqslant -2.$$

La suite $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n\geqslant 1}$ et minorée par -2 (et décroissante). Par le théorème de la limite monotone, $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge.

Q11. — Démontrer que pour tout $x > 0$, la série $\sum_{n \geqslant 1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \right) e^{-nx}$ converge et exprimer sa somme $h(x)$ en fonction de $f(x)$ pour tout $x \in I$.

Soit $x > 0$. On a pour $n \in \mathbf{N}^*$, $0 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \right) e^{-nx} \leqslant n e^{-nx}$. Or $n^3 e^{-nx} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ ce qui prouve que $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \right) e^{-nx} \underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{o} \left(\frac{1}{n^2} \right)$. On peut donc conclure comme en Q8 que la série $\sum_{n \geqslant 1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \right) e^{-nx}$ converge.

On considère les séries de termes généraux $a_k = \frac{e^{-kx}}{\sqrt{k}}$ et $b_k = e^{-kx}$ géométrique de raison $e^{-x} \in]0, 1[$.

Ces séries sont absolument convergentes de sommes $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = f(x)$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k = \frac{b_1}{1 - e^{-x}} = \frac{1}{e^x - 1}$.

On effectue le produit de Cauchy de ces séries absolument convergentes : $c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-kx}}{\sqrt{k}} e^{-(n-k)x}$ donc $h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \right)$. Ainsi $h(x) = \frac{f(x)}{e^x - 1}$ pour tout $x \in I$

Q12. — En déduire un équivalent de $h(x)$ lorsque $x \to 0$. Montrer alors que $g(x)$ est équivalent à $\frac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}}$ lorsque $x \to 0$.

Quand $x \to 0$, on a $e^x - 1 \sim x$ donc avec Q9, on a $h(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{x^{3/2}}$.

On a $2g(x) + 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \right) e^{-nx} = h(x)$ donc

$$g(x) = \frac{1}{2} \left(h(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \right) e^{-nx} \right).$$

Toute suite convergente étant bornée, Q10 nous fournit $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}^*$,

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \right| \leqslant M.$$

Ainsi $\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n}\right)e^{-nx}\right| \leqslant M\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-nx}=\frac{M}{e^x-1}\sim\frac{M}{x}$. Donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n}\right)e^{-nx}=\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(h(x))$$

et $g(x)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{1}{2}h(x)$. Ainsi $g(x)$ est équivalent à $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}}$ lorsque $x\to 0$

Partie C - Séries de fonctions associées à des ensembles d'entiers

À tout ensemble $A\subseteq\mathbf{N}$ on associe la suite (a_n) définie par

$$a_n=\begin{cases}1 & \text{si } n\in A,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Soit I_A l'ensemble des réels $x\geqslant 0$ pour lesquels la série $\sum_{n\geqslant 0}a_ne^{-nx}$ converge. On pose $f_A(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_ne^{-nx}$ pour tout $x\in I_A$. Enfin, sous réserve d'existence, on pose $\Phi(A)=\lim_{x\to 0}xf_A(x)$ et on note S l'ensemble des parties $A\subseteq\mathbf{N}$ pour lesquelles $\Phi(A)$ existe.

Q13. — Quel est l'ensemble I_a si A est fini ? Si A est infini, montrer que l'on peut extraire une suite (b_n) de la suite (a_n) telle que pour tout $n\in\mathbf{N}$, $b_n=1$. Déterminer I_A dans ce cas.

Si A est finie alors $f_A : x\mapsto\sum_{n\in A}e^{-nx}$ est bien définie sur $\mathbf{R}^+$ donc si A est fini, alors $I_A=[0,+\infty[$.

On suppose désormais que A est infini. On définit φ par récurrence par $\varphi(0)=\min A$ et

$$\varphi(n+1)=\min\left(A\setminus\{\varphi(k)\,/\,0\leqslant k\leqslant n\}\right).$$

Par construction la suite φ est strictement croissante à valeurs dans A donc telle que $\forall n\in\mathbf{N},\ a_{\varphi(n)}=1$. on peut extraire une suite $(b_n)=\left(a_{\varphi(n)}\right)$ de la suite (a_n) telle que pour tout $n\in\mathbf{N}$, $b_n=1$.
Soit $x=0$, la suite (a_ne^{-nx}) ne converge pas vers 0 avec la suite extraite $\left(b_ne^{-\varphi(n)x}\right)=(1)_{n\geqslant 0}$. Donc la série $\sum_{n\geqslant 0}a_ne^{-nx}$ diverge grossièrement. Si $x>0$, on a $|a_ne^{-nx}|\leqslant e^{-nx}$ ce qui donne la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0}a_ne^{-nx}$. Ainsi si A est infini, alors $I_A=]0,+\infty[$.

Q14. — Soit $A\in S$ et (a_n) la suite associée. Pour tout entier naturel n, on note $A(n)$ l'ensemble des éléments de A qui sont inférieurs ou égaux à n. Vérifier que pour tout $x>0$ la série $\sum_{n\geqslant 0}\mathrm{Card}(A(n))e^{-nx}$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{Card}(A(n))e^{-nx}=\frac{f_A(x)}{1-e^{-x}}$$

Soit $x>0$, on a : $f_A(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k e^{-kx}$ et $\dfrac{1}{1-e^{-x}}=\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-kx}$. On remarque que pour $n\in\mathbf{N}$,on a $\mathrm{Card}(A(n))=\sum_{k=0}^{n}a_k$, on peut donc faire le produit de Cauchy de ces deux séries absolument convergentes pour obtenir : $\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{Card}(A(n))e^{-nx}=\dfrac{f_A(x)}{1-e^{-x}}$.

.

Dans la question suivante, $A=A_1$ désigne l'ensemble des carrés d'entiers naturels non nuls.

Q15. — Montrer que si $x>0$, $\dfrac{f_{A_1}(x)}{1-e^{-x}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\lfloor\sqrt{n}\rfloor e^{-nx}$ où $\lfloor\cdot\rfloor$ désigne la partie entière.

En déduire un encadrement de $\sum_{n=0}^{+\infty}\sqrt{n}e^{-nx}-\dfrac{f_{A_1}(x)}{1-e^{-x}}$, puis un équivalent de f_{A_1} en 0. Prouver alors que $A_1\in S$ et donner $\Phi(A_1)$.

Soit $n\in\mathbf{N}$. On a $A_1(n)=\{k^2\,/\,k\in\mathbf{N}^*\text{ et }k^2\leqslant n\}=\{k^2\,/\,k\in\mathbf{N}^*\text{ et }k\leqslant\sqrt{n}\}$. Donc $A_1(n)=\{k^2\,/\,1\leqslant k\leqslant\lfloor\sqrt{n}\rfloor\}$ de cardinal $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$.

Soit $x>0$. À l'aide de la question précédente $\dfrac{f_{A_1}(x)}{1-e^{-x}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\lfloor\sqrt{n}\rfloor e^{-nx}$.

Pour $n\in\mathbf{N}$, on a $\sqrt{n}-\lfloor\sqrt{n}\rfloor\in[0,1]$ donc $0\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}\sqrt{n}e^{-nx}-\dfrac{f_{A_1}(x)}{1-e^{-x}}\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-nx}=\dfrac{1}{1-e^{-x}}$. Donc $(1-e^{-x})g(x)-1\leqslant f_{A_1}(x)\leqslant(1-e^{-x})g(x)$ car $1-e^{-x}>0$. Or d'après Q12, $(1-e^{-x})g(x)$ équivaut à $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$ quand $x\to 0$. Donc $\dfrac{2\sqrt{x}f_{A_1}(x)}{\sqrt{\pi}}$ tend vers 1 par théorème d'encadrement. Ainsi $f_{A_1}(x)\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$ donc $xf_{A_1}(x)\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{\sqrt{x\pi}}{2}$ donc $A_1\in S$ et $\Phi(A_1)=0$.

Dans la question suivante, $A=A_2$ désigne l'ensemble constitués des entiers qui sont la sommes des carrés de deux entiers naturels non nuls. On admet que A_2 appartient à S, et on désire majorer $\Phi(A_2)$.

Soit $v(n)$ le nombre de couple d'entiers naturels non nuls (p,q) pour lesquels $n=p^2+q^2$.

Q16. — Montrer que pour tout réel $x>0$, la série $\sum_{n\geqslant 0}v(n)e^{-nx}$ converge et établir que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}v(n)e^{-nx}=(f_{A_1}(x))^2.$$

Montrer alors que pour tout $x>0$, $f_{A_2}(x)\leqslant(f_{A_1}(x))^2$. En déduire un majorant de $\Phi(A_2)$.

Soit $x > 0$. On note la suite (a_n) associée à l'ensemble $A = A_1$. Soit $n \in \mathbf{N}^*$.
On a $v(n) = \text{Card}\left(\{(\alpha, \beta) \in A_1^2 \,/\, \alpha + \beta = n\}\right) = \text{Card}\left(\{(k, n-k) \,/\, k \in A_1 \text{ et } n-k \in A_1\}\right)$.
Donc $v(n) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$ car $a_0 = 0$ et aussi $v(0) = 0 = \sum_{k=0}^{0} a_k a_{0-k}$. On effectue ensuite le produit de Cauchy de la série $\sum_{k \geqslant 0} a_k e^{-kx}$ absolument convergente par elle-même pour obtenir : la série $\sum_{n \geqslant 0} v(n) e^{-nx}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} v(n) e^{-nx} = (f_{A_1}(x))^2$.
Pour $n \in \mathbf{N}$. On note $a^{(2)}(n)$ le terme de la suite (a_n) associée à l'ensemble A_2. On a $a^{(2)}(n) \leqslant v(n)$ ainsi pour tout $x > 0$, $f_{A_2}(x) \leqslant (f_{A_1}(x))^2$. Donc $x f_{A_2}(x) \leqslant (\sqrt{x} f_{A_1}(x))^2$ d'où $\Phi(A_2) \leqslant \frac{\pi}{4}$

.

Partie D - Étude de deux séries de fonctions

Soit $(\alpha_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de nombres réels positifs tels que pour tout réel $x > 0$, la série $\sum_{n \geqslant 0} \alpha_n e^{-nx}$ converge. On suppose que

$$\lim_{x \to 0} \left(x \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} \right) = \ell \in [0, +\infty[.$$

On note F l'espace vectoriel des fonctions de $]0, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$, E l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$ et E_0 le sous-espace de E des fonctions continues sur $[0, 1]$. On munit E de la norme $\| \ \|_\infty$ définie par la formule $\|\psi\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |\psi(t)|$.

Si $\psi \in E$, on note $L(\psi)$ l'application qui à $x > 0$ associe

$$(L(\psi))(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} \psi(e^{-nx}).$$

Q17. — Montrer que $L(\psi)$ est bien définie pour tout $\psi \in E$ et que l'application L est une application linéaire de E dans F. Vérifier que pour tous ψ_1, ψ_2 dans E_1, $\psi_1 \leqslant \psi_2$ entraîne $L(\psi_1) \leqslant L(\psi_2)$.

Soit $\psi_1, \psi_2 \in E$. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Soit $x > 0$. On a $|\alpha_n e^{-nx} \psi_1(e^{-nx})| \leqslant \|\psi_1\|_\infty \alpha_n e^{-nx}$ donc la série $\sum_{n \geqslant 0} \alpha_n e^{-nx} \psi_1(e^{-nx})$ converge par comparaison entre séries à termes positifs. Donc $L(\psi_1)(x)$ existe dans $\mathbf{R}$. On a

$$L(\lambda\psi_1 + \psi_2)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\alpha_n e^{-nx} \left(\lambda\psi_1(e^{-nx}) + \psi_2(e^{-nx}) \right) \right) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} \psi_1(e^{-nx}) + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} \psi_2(e^{-nx})$$

donc $L(\lambda\psi_1 + \psi_2)(x) = \lambda L(\psi_1)(x) + L(\psi_2)(x)$. Ainsi $L(\lambda\psi_1 + \psi_2) = \lambda L(\psi_1) + L(\psi_2)$. Ainsi L est bien définie sur E et l'application L est une application linéaire de E vers $F = \mathcal{F}(]0, +\infty[, \mathbf{R})$.

On suppose que $\psi_1 \leqslant \psi_2$. On a pour tout $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\alpha_n e^{-nx}\psi_1(e^{-nx}) \leqslant \alpha_n e^{-nx}\psi_2(e^{-nx})$ car $\alpha_n e^{-nx} \geqslant 0$. Donc $L(\psi_1)(x) \leqslant L(\psi_2)(x)$ par comparaison de séries. donc pour tous ψ_1, ψ_2 dans E, $\psi_1 \leqslant \psi_2$ entraîne $L(\psi_1) \leqslant L(\psi_2)$.

On note E_1 l'ensemble des $\psi \in E$ pour lesquels $\lim\limits_{x\to 0} x(L(\psi))(x)$ existe et si $\psi \in E_1$, on pose

$$\Delta(\psi) = \lim_{x\to 0} x(L(\psi))(x)$$

Q18. — Vérifier que E_1 est un sous espace vectoriel de E et que l'application Δ est une forme linéaire continue de $(E_1, \|\ \|_\infty)$.

On a bien $\underline{E_1 \subset E \text{ (i)}}$ et $\underline{E_1 \neq \emptyset \text{ (ii)}}$ car $\theta : x \in [0,1] \mapsto 0$ vérifie $\theta \in E$ et $\lim\limits_{x\to 0} x(L(\theta))(x) = 0$.

Soit $\psi_1, \psi_2 \in E_1$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Pour $x > 0$, on a $x(L(\lambda\psi_1 + \psi_2))(x) = \lambda x(L(\psi_1))(x) + x(L(\psi_2))(x)$. Donc par combinaison linéaire de limites on a

$$\lim_{x\to 0} x(L(\lambda\psi_1 + \psi_2))(x) = \lambda \lim_{x\to 0} x(L(\psi_1))(x) + \lim_{x\to 0} x(L(\psi_2))(x).$$

Ceci prouve que $\lambda\psi_1 + \psi_2 \in E_1$ donc $\underline{E_1 \text{ est stable par combinaison linéaire (iii)}}$.
Avec (i), (ii) et (iii), E_1 est un sous espace vectoriel de E.
De plus $\Delta(\lambda\psi_1 + \psi_2) = \lambda\Delta(\psi_1) + \Delta(\psi_2)$ et $\Delta : E_1 \longrightarrow \mathbf{R}$ donc Δ est une forme linéaire de E_1.
De plus $|x(L(\psi_1))(x)| \leqslant \|\psi_1\|_\infty\ x \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx}$. Par passage à la limite en 0, on a $|\Delta(\psi_1)| \leqslant \ell \|\psi_1\|_\infty$.
D'où, l'application Δ est une forme linéaire continue de $(E_1, \|\ \|_\infty)$.

Q19. — Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}$, $e_p : t \in [0,1] \mapsto t^p$ appartient à E_1 et calculer $\Delta(e_p)$. En déduire que $E_0 \subseteq E_1$ et calculer $\Delta(\psi)$ pour tout $\psi \in E_0$.

Soit $p \in \mathbf{N}$. On a $e_p \in E$ car continue par morceaux sur $[0,1]$.
Soit $x > 0$. On a $L(e_p)(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-n(p+1)x}$ donc

$$xL(e_p)(x) = \frac{[(p+1)x] \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-n[(p+1)x]}}{p+1}$$

et $(p+1)x > 0$. Par composition de limites, on a $\Delta(e_p) = \dfrac{\ell}{p+1}$ et $e_p \in E_1$. On remarque que $\Delta(e_p) = \ell \displaystyle\int_0^1 e_p$. Donc par combinaison linéaire , pour toute fonction polynomiale P, on a $\Delta(P) = \ell \displaystyle\int_0^1 P$.

Soit $\psi \in E_0$. Le théorème d'approximation polynomiale de Weierstrass nous fournit une suite de fonction polynomiale (P_k) qui converge uniformément vers ψ sur $[0,1]$. Soit $x > 0$. Soit $k \in \mathbf{N}$. On a $|xL(\psi)(x) - xL(P_k)(x)| = x\,|L(\psi - P_k)(x)|$. Comme $-\|\psi - P_k\|_\infty e_0 \leqslant \psi - P_k \leqslant \|\psi - P_k\|_\infty e_0$, on a

$-\|\psi-P_k\|_\infty L(e_0) \leqslant L(\psi-P_k) \leqslant \|\psi-P_k\|_\infty L(e_0)$ en utilisant Q17. Ainsi $|xL(\psi)(x) - xL(P_k)(x)| \leqslant \|\psi - P_k\|_\infty xL(e_0)(x)$. La fonction $x \mapsto xL(e_0)(x)$ est continue sur $]0, 1]$ et admet comme limite ℓ en 0. Donc $x \mapsto xL(e_0)(x)$ est prolongeable par continuité sur le segment $[0, 1]$. Le théorème des bornes atteintes nous fournit un majorant $M > 0$. Donc $\forall x \in]0, 1]$, $|xL(\psi)(x) - xL(P_k)(x)| \leqslant \|\psi - P_k\|_\infty M$ or $\lim\limits_{k\to+\infty} \|\psi - P_k\|_\infty M = 0$. Donc la suite de fonction $(x \mapsto xL(P_k)(x))_{k\geqslant 0}$ converge uniformément sur $]0, 1]$ vers $x \mapsto xL(\psi)(x)$. En notant $\delta_k = \lim\limits_{x\to 0} xL(P_k)(x) = \Delta(P_k)$, le théorème de la double limite nous donne alors que la suite (δ_k) converge vers un certain $L \in \mathbf{R}$ et $L = \lim\limits_{x\to 0} xL(\psi)(x)$. Ainsi $\psi \in E_1$. On en déduit que $E_0 \subseteq E_1$.

La fonction : $\psi \in E_0 \mapsto \ell \displaystyle\int_0^1 \psi$ est une forme linéaire continue de $(E_0, \| \|_\infty)$ car $\forall \psi \in E_0$, $\left|\ell \displaystyle\int_0^1 \psi\right| \leqslant \ell\|\psi\|_\infty$. Les applications Δ et $\psi \mapsto \ell \displaystyle\int_0^1 \psi$ sont continues sur E et coïncident sur la partie des dense des fonctions polynomiales donc pour tout $\psi \in E_0$, on a $\Delta(\psi) = \ell \displaystyle\int_0^1 \psi$.

Pour tous $a, b \in [0, 1]$ tel que $a < b$, on note $1_{[a,b]} : [0, 1] \to \{0, 1\}$ la fonction définie par

$$1_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $a \in]0, 1[$ et $\varepsilon \in]0, \min(a, 1 - a)[$. On note

$$g_-(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, a - \varepsilon] \\ \dfrac{a - x}{\varepsilon} & \text{si } x \in]a - \varepsilon, a[\\ 0 & \text{si } x \in [a, 1] \end{cases}$$

et

$$g_+(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, a] \\ \dfrac{a + \varepsilon - x}{\varepsilon} & \text{si } x \in]a, a + \varepsilon[\\ 0 & \text{si } x \in [a + \varepsilon, 1]. \end{cases}$$

Q20. — Vérifier que g_- et g_+ appartiennent à E_0 et calculer $\Delta(g_-)$ et $\Delta(g_+)$. Montrer alors que $1_{[0,a]} \in E_1$ et calculer $\Delta(1_{[0,a]})$. En déduire que $E_1 = E$ et donner $\Delta(\psi)$ pour tout $\psi \in E$.

La fonction g_- est continue en tous points de $[0, 1]\setminus\{a-\varepsilon, a\}$. De plus $\lim\limits_{x\to(a-\varepsilon)^-} g_(x) = \lim\limits_{x\to(a-\varepsilon)^-} g_(x) = g_(a - \varepsilon) = 1$ de même en a. Donc g_- et g_+ (analogue) sont continues sur $[0, 1]$ ainsi g_- et $g_+ \in E_0$.

On a $\Delta(g_-) = \ell \displaystyle\int_0^1 g_- = \ell \left(\int_0^{a-\varepsilon} g_- + \int_{a-\varepsilon}^a g_- + \int_a^1 g_-\right)$.

On a $\displaystyle\int_0^{a-\varepsilon} g_- = a - \varepsilon$ et $\displaystyle\int_{a-\varepsilon}^a g_- = \frac{\varepsilon \cdot 1}{2}$ (aire d'un triangle) et $\displaystyle\int_a^1 g_- = 0$.

On a $\Delta(g_+) = \ell \left(\displaystyle\int_0^a g_+ + \int_a^{a+\varepsilon} g_+ + \int_{a+\varepsilon}^1 g_+\right)$ et $\displaystyle\int_0^a g_+ = a$ et $\displaystyle\int_a^{a+\varepsilon} g_+ = \frac{\varepsilon \cdot 1}{2}$ et $\displaystyle\int_{a+\varepsilon}^1 g_+ = 0$.

Donc $\Delta(g_-) = \ell \left(a - \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ et $\Delta(g_+) = \ell \left(a + \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$.

On a $1_{[0,a]} \in E$ et $g_- \leqslant 1_{[0,a]} \leqslant g_+$. donc pour tout $x > 0$, $xL(g_-)(x) \leqslant xL(1_{[0,a]})(x) \leqslant xL(g_+)(x)$.

On a $\lim_{x\to 0} xL(g_-)(x) = \ell\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ ceci nous fournit $\alpha_1 > 0$ tel que $\forall x \in]0, \alpha_1],\ xL(g_-)(x) \geqslant \ell\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \ell\frac{\varepsilon}{2}$. Donc $\forall x \in]0, \alpha_1],\ xL(g_-)(x) \geqslant \ell\,(a - \varepsilon)$. De même on peut trouver $\alpha_2 > 0$, on a $\forall x \in]0, \alpha_2],\ xL(g_+)(x) \leqslant \ell\,(a + \varepsilon)$. Donc en prenant $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$ on a $\forall x \in]0, \alpha],\ \left|xL(1_{[0,a]})(x) - \ell a\right| \leqslant \ell\varepsilon$. On vient de montrer que $\lim_{x\to 0} xL(1_{[0,a]})(x) = \ell a$ car $\ell\varepsilon$ est aussi petit que l'on veut. Ainsi $1_{[0,a]} \in E_1$ et $\Delta(1_{[0,a]}) = \ell a = \ell \int_0^1 1_{[0,a]}$.

Pour $1_{[0,a[}$, les calcul sont identiques ce qui donne : $1_{[0,a[} \in E_1$ et $\Delta(1_{[0,a[}) = \ell a = \ell \int_0^1 1_{[0,a[}$.

Pour $\alpha \in [0,1]$, on note $\delta_\alpha = 1_{\{\alpha\}}$. On a donc $\delta_a = 1_{[0,a]} - 1_{[0,a[}$ ainsi par linéarité $\delta_a \in E_1$ et $\Delta(\delta_a) = 0 = \ell \int_0^1 \delta_a$. On remarque que $L(\delta_0) : x \mapsto 0$ donc on a encore : $\delta_0 \in E_1$ et $\Delta(\delta_0) = 0 = \ell \int_0^1 \delta_0$.

En ce qui concerne $1_{[a,b]} = 1_{[0,b]} - 1_{[0,a[}$, on a $1_{[a,b]} \in E_1$ et $\Delta(1_{[a,b]}) = \ell(b-a) = \ell \int_0^1 1_{[a,b]}$. C'est analogue pour $1_{]a,b]}$, $1_{]a,b[}$ et $1_{[a,b[}$ et cela reste valable même si $a = 0$. On sait que $E_1 \subset E$.

Soit maintenant $\psi \in E$. On peut écrire $\psi = \varphi + \mathcal{E}$ où φ est continue sur $[0,1]$ et $\mathcal{E}$ est une fonction en escalier. On peut écrire $\mathcal{E} = \sum_{i\in I} \lambda_i 1_{J_i}$ où $(\lambda_i)_{i\in I}$ est une famille finie de réels et $(J_i)_{i\in I}$ est une famille finie d'intervalles de $[0,1]$ (éventuellement singleton). Or $\varphi \in E_1$ d'après 18 et les $1_{J_i} \in E_1$ d'après ce qui précède et on a $\Delta(\varphi) = \ell \int_0^1 \varphi$ et $\Delta(1_{J_i}) = \ell \int_0^1 1_{J_i}$. Comme Δ est linéaire sur le sous-espace vectoriel E_1, on en déduit $\psi \in E_1$ et $\Delta(\psi) = \Delta(\varphi) + \sum_{i\in I} \lambda_i \Delta(1_{J_i}) = \ell \int_0^1 (\varphi + \mathcal{E})$.

On en déduit que $\boxed{E_1 = E \text{ et } \Delta(\psi) = \ell \int_0^1 \psi \text{ pour tout } \psi \in E}$.

On considère maintenant la fonction ψ définie sur $[0,1]$ par la formule :

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{e}[\\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in [\frac{1}{e}, 1]. \end{cases}$$

Q21. — Calculer $(L(\psi))(\frac{1}{N})$ pour tout entier $N > 0$ et en déduire la limite

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N} \alpha_k$$

(théorème taubérien).

On a

$$(L(\psi))(\frac{1}{N}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-n/N} \psi(e^{-n/N}) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n e^{-n/N} \psi(e^{-n/N}) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n e^{-n/N} e^{n/N}.$$

Donc $(L(\psi))(\frac{1}{N}) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k$.

On a $\lim_{x\to 0} x(L(\psi))(x) = \Delta(\psi) = \ell \int_0^1 \psi = \ell \int_{1/e}^1 \psi = \ell(\ln(1) - \ln(1/e))$. Donc par composition de limites $\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N} \alpha_k = \ell = \lim_{x\to 0} \left(x \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} \right)$.

On rappelle que $v(n)$ est le nombre de couples d'entiers naturels non nuls (p, q) tels que $n = p^2 + q^2$.

Q22. — Si $A \in S$, que vaut $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Card}(A(n))$? Déterminer alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} v(k)$.

En reprenant les notations de la partie **C**. On a $\operatorname{Card}(A(n)) = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Comme $A \in S$,

$$\lim_{x\to 0} \left(x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx} \right) = \lim_{x\to 0} x f_A(x) = \Phi(A).$$

On peut appliquer donc le résultat précédent à la suite (a_n). Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Card}(A(n)) = \lim_{x\to 0} \left(x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx} \right) = \lim_{x\to 0} x f_A(x)$$

Si $A \in S$, alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Card}(A(n)) = \Phi(A)$.

Pour tout $x > 0$, la série $\sum_{n\geqslant 0} v(n) e^{-nx}$ converge ayant pour somme $(f_{A_1}(x))^2$ (Q16) et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v(n) \geqslant 0$. De plus $\lim_{x\to 0} x\,(f_{A_1}(x))^2 = \frac{\pi}{4}$ d'après Q15. On peut donc appliquer les résultats de cette partie et alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} v(k) = \frac{\pi}{4}$