M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Devoir surveillé n°6 (4h)

Suites et séries de fonctions, convexité,

familles sommables et théorèmes de Lebesgue

Samedi 22 janvier 2022

David BLOTTIÈRE

Consignes

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, **les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte**. Vous êtes invité à encadrer les résultats de vos calculs.

Si vous êtes amené à repérer ce qui peut vous sembler être une erreur d'énoncé, vous le signalerez sur votre copie et devrez poursuivre votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

Deux sujets sont proposés :

- Sujet CCINP (pages 3–6)
- Sujet Mines-Ponts (pages 7–11).

Vous indiquerez, **au début de votre première copie**, **le sujet choisi**.

Sujet CCINP

EXERCICE I [CCINP–MP–2021]

On note f la fonction définie sur $]0,1[$ par $f(t) = \dfrac{\ln t}{t^2-1}$.

Q1. — Soit $k \in \mathbf{N}$. Justifier l'existence puis calculer l'intégrale $I_k = \displaystyle\int_0^1 t^{2k} \ln t \; \mathrm{d}t$.

Q2. — Justifier que la fonction f est intégrable sur $]0,1[$, puis démontrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t) \; \mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{8}$. On pourra utiliser librement que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

EXERCICE II [CCINP–MP–2021]

Q3. — Justifier que la fonction $\ln$ est concave sur $]0,+\infty[$ et en déduire que

$$\forall\,(a,b,c) \in]0,+\infty[^3, \qquad \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}\,.$$

Q4. — En déduire que la fonction f définie sur $]0,+\infty[^2$ par $f(x,y) = x+y+\dfrac{1}{xy}$ admet un minimum global, atteint au point $(1,1)$.

PROBLÈME - [CCINP–MP–2020]

Objectifs. L'objectif de la **partie I** est de montrer l'existence d'un développement ternaire propre pour certains nombres réels. La **partie II** propose l'étude d'une série de fonctions où les coefficients du développement ternaire sont remplacés par une fonction continue. La **partie III** définit et présente quelques propriétés de la fonction de Cantor-Lebesgue

Notations.
On note T l'ensemble des suites réelles $t = (t_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ à valeurs dans $\{0,1,2\}$.
On désigne par ℓ^∞ l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ bornées et on pose $||\,u\,|| = \displaystyle\sup_{n\in\mathbf{N}^*} |u_n|$.

On note $\lfloor y \rfloor$ la partie entière d'un réel y.

Partie I - Développement ternaire

Étude de l'application σ

Q5. — Démontrer que ℓ^∞ est un espace vectoriel réel et que $u \mapsto ||\,u\,||$ est une norme sur ℓ^∞.

Q6. — Pour $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in \ell^\infty$, montrer que la série de terme général $\dfrac{u_n}{3^n}$ est convergente. On note

$$\sigma(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{3^n}.$$

Q7. — Démontrer que l'application σ est une forme linéaire continue sur ℓ^∞.

Q8. — Démontrer que si $t = (t_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in T$, alors le réel $\sigma(t)$ est dans l'intervalle $[0,1]$.

Q9. — On note $\tau = (\tau_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ l'élément de T défini par par $\tau_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$, $\tau_n = 0$. On introduit également l'élément $\tau' = (\tau'_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de T défini par $\tau'_1 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$, $\tau'_n = 2$. Calculer $\sigma(\tau)$ et $\sigma(\tau')$. L'application σ est-elle injective sur T ?

Développement ternaire propre

On fixe $x \in [0,1[$. On définit une suite $t(x) = (t_n(x))_{n\in\mathbf{N}^*}$ par

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ t_n(x) = \lfloor 3^n x \rfloor - 3\left\lfloor 3^{n-1}x \right\rfloor.$$

Q10. — Démontrer que $t(x) \in T$.

Q11. — On définit deux suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ par

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ x_n = \frac{\lfloor 3^n x \rfloor}{3^n} \text{ et } y_n = x_n + \frac{1}{3^n}.$$

Démontrer que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes de limite x. En déduire que :

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t_n(x)}{3^n}.$$

Que peut-on en conclure concernant l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & [0,1] \\ u & \longmapsto & \sigma(u) \end{array} \right.$?

La suite $t(x) = (t_n(x))_{n\in\mathbf{N}^*}$ est appelée développement ternaire propre de x.

Q12. — *Informatique pour tous.* Écrire en langage Python une fonction `flotVersTern(n,x)` d'arguments un entier naturel n et un flottant x et qui renvoie sous forme d'une liste les n premiers chiffres $t_1(x), \ldots, t_n(x)$ définis dans la question précédente du développement ternaire de x.

Par exemple `flotVersTern(4,0.5)` renvoie `[1,1,1,1]`.

Q13. — *Informatique pour tous.* Si $\ell = [\ell_1, \ldots, \ell_n]$ est une suite finie d'entiers de $\{0;1;2\}$, on la complète avec des 0 pour en faire un élément de T encore noté ℓ.
Écrire en langage Python une fonction `ternVersFlot(`ℓ`)` d'arguments une liste d'entiers ℓ. Cette fonction renvoie en sortie le flottant $\sigma(\ell)$.

Par exemple `ternVersFlot([1,1,1,1])` renvoie 0.493827......

Q14. — *Informatique pour tous.* Si $\ell = [\ell_1, \dots, \ell_n]$ est une suite finie d'entiers de $\{0; 1; 2\}$, on lui ajoute un élément égal à -1 si la somme $l_1 + \ldots + \ell_n$ est paire et un élément égal à -2 sinon. Ce dernier élément permet alors d'essayer de détecter d'éventuelles erreurs de transmission.
Écrire en langage Python une fonction `ajout(ℓ)` qui ajoute à la liste ℓ un élément comme expliqué précédemment et qui renvoie la nouvelle liste.
Écrire en langage Python une fonction `verif(ℓ)` qui renvoie `True` si la valeur du dernier élément de ℓ est correcte et `False` sinon.

Par exemple `ajout([1,0,2,1,0])` renvoie `[1,0,2,1,0,-1]` et `verif([1,0,2,1,0,-2])` renvoie `False`.

Partie II - Étude d'une fonction définie par une série

Dans cette partie, on définit une fonction φ à l'aide d'un développement en série analogue au développement ternaire propre d'un réel, mais où la suite $(t_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est remplacée par une fonction numérique à valeurs dans l'intervalle $[0, 2]$.

Pour tout réel x on pose :

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + \sin(nx)}{3^n}.$$

Étude de l'application φ

Q15. — Démontrer que φ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$.

Q16. — Pour tout x réel, justifier l'écriture : $\varphi(x) = \dfrac{1}{2} + \mathrm{Im}\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{3^n}\right)$. En déduire une expression simple de $\varphi(x)$ en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.

Q17. — Pour $x \in \mathbf{R}$, en déduire une expression simple de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\cos(nx)}{3^n}$ en fonction de $\cos(x)$.

Q18. — Démontrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$.

Q19. — À l'aide de $\displaystyle\int_0^\pi \varphi(x)dx$ démontrer que :

$$\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{10 - 6\cos(x)}dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} + 1}{n3^{n+1}}.$$

Puis en calculant la somme de la série du second membre, en déduire $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{10 - 6\cos(x)}dx$.

Q20. — Retrouver la valeur de cette intégrale par un calcul direct.

Partie III - Fonction de Cantor-Lebesgue

Dans cette partie, on va définir et étudier la fonction de Cantor-Lebesgue.

Étude d'une suite de fonctions

On note f_0 la fonction définie sur $[0,1]$ par $f_0(x) = x$. Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on pose :

$$\forall x \in [0,1],\ f_{n+1}(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(3x)}{2} & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x \in \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[\\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{f_n(3x-2)}{2} & \text{si } x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right] \end{cases}.$$

Q21. — Représenter l'allure graphique des fonctions f_0, f_1 et f_2 sur trois schémas différents (pour f_2 on envisagera sept sous-intervalles de $[0,1]$). Pour tout $n \in \mathbf{N}$, démontrer que f_n est à valeurs dans $[0,1]$.

Q22. — *Informatique pour tous.* Écrire en langage Python une fonction récursive `cantor(n,x)` qui renvoie la valeur de $f_n(x)$.

Q23. — Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, démontrer que :

$$\forall x \in [0,1],\ |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{3 \times 2^{n+1}}.$$

Q24. — En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$.

La limite de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est notée f. *On l'appelle fonction de Cantor-Lebesgue.*

Q25. — Démontrer que la fonction f est à valeurs dans $[0,1]$ et qu'elle est croissante et continue sur $[0,1]$. Démontrer aussi qu'elle est surjective de $[0,1]$ vers $[0,1]$.

La fonction f est aussi nommée « escalier du diable ». Les développements ternaires étudiés en début de problème permettent d'obtenir une expression analytique de $f(x)$.

Sujet Mines-Ponts

EXERCICE [CCMP–MP–2016]

Dans tout l'exercice n désigne un entier supérieur ou égal à 2. Soit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et $\mathcal{A}$ un sous ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est ***extrémale dans*** $\mathcal{A}$ si pour tous M, N dans $\mathcal{A}$ et tout $\lambda \in]0,1[$, on a l'implication :

$$A = \lambda M + (1-\lambda)N \Longrightarrow A = M = N.$$

On note $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des matrices ***bistochastiques*** de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $A = (A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls et tels que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} A_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} A_{j,i} = 1$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

On note enfin $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des matrices de permutation $M_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont les coefficients sont de la forme :

$$(M_\sigma)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour tous i, j dans $\{1, 2, \ldots, n\}$, où σ est une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Q1. — Montrer que l'ensemble $\mathcal{B}_n$ est convexe et compact. Est-il un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$?

Q2. — Montrer que $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{B}_n$ et que $\mathcal{P}_n$ est un sous-groupe multiplicatif de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. Tout élément de $\mathcal{P}_n$ est-il diagonalisable sur $\mathbf{C}$? L'ensemble $\mathcal{P}_n$ est-il convexe ?

Q3. — Montrer que toute matrice de $\mathcal{P}_n$ est extrémale dans $\mathcal{B}_n$.

Dans toute la suite de cette partie, on considère une matrice ***bistochastique*** $A = (A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ *qui n'est* ***pas*** *une matrice de permutation.*

Q4. — Montrer qu'il existe un entier $r > 0$ et deux familles $i_1, i_2, \ldots, i_r$ et $j_1, j_2, \ldots, j_r$ d'indices distincts dans $\{1, 2, \ldots, n\}$ tels que pour tous $k \in \{1, 2, \ldots, r\}$, $A_{i_k,j_k} \in]0,1[$ et $A_{i_k,j_{k+1}} \in]0,1[$ avec $j_{r+1} = j_1$.

Q5. — En considérant la matrice $B = (B_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ définie par :

$$\begin{cases} B_{i_k,j_k} = 1 & k \in \{1, 2, \ldots, r\} \\ B_{i_k,j_{k+1}} = -1 & k \in \{1, 2, \ldots, r\} \\ B_{i,j} = 0 & \text{dans les autres cas,} \end{cases}$$

montrer que A n'est pas un élément extrémal de $\mathcal{B}_n$. En déduire l'ensemble des éléments extrémaux de $\mathcal{B}_n$.

PROBLÈME [CCMP–MP–2016]

Dans tout le problème, I désigne l'intervalle $]0, +\infty[$.

Partie A - Une intégrale généralisée

Q6. — Démontrer que $\psi : u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$ est intégrable sur I.

Q7. — On admet que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ \mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. En déduire la valeur de $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\ \mathrm{d}u$.

Partie B - Étude de deux séries de fonctions

Dans toute cette partie, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$ et $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}e^{-nx}$.

Q8. — Montrer que f et g sont définies et continues sur I.

Q9. — Montrer que pour tout $x \in I$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\ \mathrm{d}u \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\ \mathrm{d}u$. En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to 0$.

Q10. — Montrer que la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge.

Q11. — Démontrer que pour tout $x > 0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) e^{-nx}$ converge et exprimer sa somme $h(x)$ en fonction de $f(x)$ pour tout $x \in I$.

Q12. — En déduire un équivalent de $h(x)$ lorsque $x \to 0$. Montrer alors que $g(x)$ est équivalent à $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}}$ lorsque $x \to 0$.

Partie C - Séries de fonctions associées à des ensembles d'entiers

À tout ensemble $A \subseteq \mathbf{N}$ on associe la suite (a_n) définie par

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit I_A l'ensemble des réels $x \geqslant 0$ pour lesquels la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n e^{-nx}$ converge. On pose $f_A(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx}$ pour tout $x \in I_A$. Enfin, sous réserve d'existence, on pose $\Phi(A) = \lim\limits_{x \to 0} x f_A(x)$ et on note S l'ensemble des parties $A \subseteq \mathbf{N}$ pour lesquelles $\Phi(A)$ existe.

Q13. — Quel est l'ensemble I_A si A est fini ? Si A est infini, montrer que l'on peut extraire une suite (b_n) de la suite (a_n) telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $b_n = 1$. Déterminer I_A dans ce cas.

Q14. — Soit $A \in S$ et (a_n) la suite associée. Pour tout entier naturel n, on note $A(n)$ l'ensemble des éléments de A qui sont inférieurs ou égaux à n. Vérifier que pour tout $x > 0$ la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \mathrm{Card}(A(n)) e^{-nx}$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Card}(A(n)) e^{-nx} = \frac{f_A(x)}{1 - e^{-x}}$$

.

Dans la question suivante, $A = A_1$ désigne l'ensemble des carrés d'entiers naturels non nuls.

Q15. — Montrer que si $x > 0$, $\dfrac{f_{A_1}(x)}{1 - e^{-x}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lfloor \sqrt{n} \rfloor e^{-nx}$ où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière.

En déduire un encadrement de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n} e^{-nx} - \dfrac{f_{A_1}(x)}{1 - e^{-x}}$, puis un équivalent de f_{A_1} en 0. Prouver alors que $A_1 \in S$ et donner $\Phi(A_1)$.

Dans la question suivante, $A = A_2$ désigne l'ensemble constitués des entiers qui sont la sommes des carrés de deux entiers naturels non nuls. On admet que A_2 appartient à S, et on désire majorer $\Phi(A_2)$.

Soit $v(n)$ le nombre de couple d'entiers naturels non nuls (p, q) pour lesquels $n = p^2 + q^2$.

Q16. — Montrer que pour tout réel $x > 0$, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} v(n) e^{-nx}$ converge et établir que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v(n) e^{-nx} = (f_{A_1}(x))^2.$$

Montrer alors que pour tout $x > 0$, $f_{A_2}(x) \leqslant (f_{A_1}(x))^2$. En déduire un majorant de $\Phi(A_2)$.

.

Partie D - Étude de deux séries de fonctions

Soit $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels positifs tels que pour tout réel $x > 0$, la série $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n e^{-nx}$ converge. On suppose que

$$\lim_{x\to 0}\left(x\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n e^{-nx}\right) = \ell \in [0,+\infty[.$$

On note F l'espace vectoriel des fonctions de $]0,+\infty[$ dans $\mathbf{R}$, E l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ et E_0 le sous-espace de E des fonctions continues sur $[0,1]$. On munit E de la norme $\|\ \|_\infty$ définie par la formule $\|\psi\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |\psi(t)|$.

Si $\psi \in E$, on note $L(\psi)$ l'application qui à $x > 0$ associe

$$(L(\psi))(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx}\psi(e^{-nx}).$$

Q17. — Montrer que $L(\psi)$ est bien définie pour tout $\psi \in E$ et que l'application L est une application linéaire de E dans F. Vérifier que pour tous ψ_1, ψ_2 dans E, $\psi_1 \leqslant \psi_2$ entraîne $L(\psi_1) \leqslant L(\psi_2)$.

On note E_1 l'ensemble des $\psi \in E$ pour lesquels $\lim_{x\to 0} x(L(\psi))(x)$ existe et si $\psi \in E_1$, on pose

$$\Delta(\psi) = \lim_{x\to 0} x(L(\psi))(x)$$

Q18. — Vérifier que E_1 est un sous espace vectoriel de E et que l'application Δ est une forme linéaire continue de $(E_1, \|\ \|_\infty)$.

Q19. — Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}$, $e_p : t \in [0,1] \mapsto t^p$ appartient à E_1 et calculer $\Delta(e_p)$. En déduire que $E_0 \subseteq E_1$ et calculer $\Delta(\psi)$ pour tout $\psi \in E_0$.

Pour tous $a, b \in [0,1]$ tel que $a < b$, on note $1_{[a,b]} : [0,1] \to \{0,1\}$ la fonction définie par

$$1_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $a \in]0,1[$ et $\varepsilon \in]0, \min(a, 1-a)[$. On note

$$g_-(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, a-\varepsilon] \\ \dfrac{a-x}{\varepsilon} & \text{si } x \in]a-\varepsilon, a[\\ 0 & \text{si } x \in [a,1] \end{cases}$$

et

$$g_+(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, a] \\ \dfrac{a+\varepsilon-x}{\varepsilon} & \text{si } x \in]a, a+\varepsilon[\\ 0 & \text{si } x \in [a+\varepsilon, 1]. \end{cases}$$

Q20. — Vérifier que g_- et g_+ appartiennent à E_0 et calculer $\Delta(g_-)$ et $\Delta(g_+)$. Montrer alors que $1_{[0,a]} \in E_1$ et calculer $\Delta(1_{[0,a]})$. En déduire que $E_1 = E$ et donner $\Delta(\psi)$ pour tout $\psi \in E$.

On considère maintenant la fonction ψ définie sur $[0,1]$ par la formule :

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{e}[\\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in [\frac{1}{e}, 1]. \end{cases}$$

Q21. — Calculer $(L(\psi))(\frac{1}{N})$ pour tout entier $N > 0$ et en déduire la limite

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N} \alpha_k$$

(théorème taubérien).

On rappelle que $v(n)$ est le nombre de couples d'entiers naturels non nuls (p, q) tels que $n = p^2 + q^2$.

Q22. — Si $A \in S$, que vaut $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Card}(A(n))$? Déterminer alors $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} v(k)$.