

# Un corrigé du sujet 2 du DS4 - Centrale - PC2015

## Mme Sidaner et M. Bourgoïn

### I Première partie.

**I.A -** Si  $F = \text{Vect}(u)$  est stable par  $f$ ,  $f(u) \in \text{Vect}(u)$  donc il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $f(u) = \lambda u$ . Puisque  $F$  est une droite vectorielle engendré par  $u$ ,  $u$  est non nul donc  $u$  est bien un vecteur propre de  $f$ . Réciproquement si  $u$  est un vecteur propre de  $f$  associé à une valeur propre  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $u \neq 0_E$  donc  $\text{Vect}(u)$  est une droite vectorielle. De plus, si  $v \in \text{Vect}(u)$ , il existe  $k \in \mathbb{K}$  tel que  $v = ku$ . Par suite,  $f(v) = \lambda ku$  donc  $f(v) \in \text{Vect}(u)$ .  $\text{Vect}(u)$  est donc stable par  $f$ .

**I.B -**

**I.B.1)** Les sous-espaces  $\{0_E\}$  et  $E$  sont clairement stables par  $F$ , il y a donc au moins deux sous-espaces stables par  $F$ .

Considérons l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  dont la matrice représentative dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  est  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Si  $F$  est un sous-espace vectoriel stable autre que  $\{0_E\}$  et  $E$  alors  $\dim(F) = 1$ . D'après I.A,  $f$  admet alors un vecteur propre associé à une valeur propre réelle.

Le polynôme caractéristique de  $f$  est  $X^2 + 1$ . Celui-ci n'a pas de racines réelles,  $f$  n'admet donc pas de valeurs propres réelles puisqu'elles sont racines du polynôme caractéristique.

$f$  n'a donc que  $\{0_E\}$  et  $E$  comme sous-espaces propres stables.

**I.B.2)** Ici  $n \geq 2$ . Si  $f$  est non nul,  $\text{Ker}(f) \neq E$  et si  $f$  est non injective  $f \neq \{0_E\}$ . De plus,  $f(\text{Ker}(f)) = \{0_E\}$  donc  $\text{Ker}(f)$  est stable par  $f$ . Ainsi  $f$  admet au moins trois sous-espaces stables,  $\{0_E\}$ ,  $E$  et  $\text{Ker}(f)$ .

Remarque :  $n \geq 2$  est nécessaire car sinon on a  $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$  ou  $\text{Ker}(f) = E$ .

Supposons de plus  $n$  impair. On a  $f(\text{Im}(f)) = \{f(f(u)); u \in E\} \subset \text{Im}(f)$ ,  $\text{Im}(f)$  est donc stable par  $f$ . Comme  $f$  est non injective,  $f$  étant un endomorphisme sur un espace de dimension finie  $f$  est non surjective donc  $\text{Im}(f) \neq E$ .  $f$  est non nul donc  $\text{Im}(f) \neq \{0_E\}$ . D'après le théorème du rang  $n = \text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}(f))$ . Par suite, si  $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f)$  on a  $n = 2\text{rg}(f)$  et donc  $n$  est pair. Ce n'est pas le cas donc  $\text{Im}(f) \neq \text{Ker}(f)$ . Ainsi,

$\text{Im}(f)$  est un quatrième sous-espace propre qui s'ajoute au trois autres.

Considérons l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  dont la matrice représentative dans la base canonique  $(e_1, e_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  est  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

$f$  est non nul, non injective car  $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(e_1)$  donc  $f$  admet au moins trois sous-espaces stables. Supposons que  $F$  soit un autre sous-espace stable par  $f$ . On a alors  $\dim(F) = 1$  et de I.A.  $F$  est engendré par un vecteur propre de  $f$ . Le polynôme caractéristique de  $f$  est  $X^2$ .  $f$  admet donc comme seule valeur propre 0 donc  $F = \text{Ker}(f)$ .

Il n'y a donc que trois sous-espaces stables par  $f$ .

**I.C -**

**I.C.1)** Soient  $(u_1, u_2, \dots, u_k)$  une famille de  $k$  vecteurs propres de  $f$  associés respectivement à des valeurs propres  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  et  $F = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_k)$

Soit  $u \in F$ . Il existe  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{K}^k$  tel que  $u = \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i$ . On a alors  $f(u) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \lambda_i u_i$

donc  $f(u) \in F$ . Ainsi  $F$  est stable par  $f$ .

L'endomorphisme induit par  $f$  sur un sous-espace propre  $F$  associé à la valeur propre  $\lambda \in \mathbb{K}$  est

$\lambda Id_F$ .

**I.C.2)** Soit  $F$  un sous-espace stable de  $f$  de dimension au moins 2. Soit  $(u, v)$  une famille libre de  $F$ . On vérifie alors que pour tout  $(a, b) \in (K^*)^2$  avec  $a \neq b$ , la famille  $(u + av, u + bv)$  est libre. La famille  $(\text{Vect}(u + av))_{a \in K^*}$  est donc une famille de droites vectorielles deux à deux distinctes, il y en a donc une infinité. De plus,  $u$  et  $v$  sont des vecteurs propres donc, d'après I.C.1)  $\text{Vect}(u + av)$  est stable par  $f$  pour tout  $a \in K^*$ . Ainsi,  $f$  admet une infinité de droites vectorielles stables par  $f$ .

**I.C.3)** Si tout sous-espace vectoriel de  $F$  est stable par  $f$  toute droite vectorielle l'est aussi et donc tout vecteur de  $E$  est vecteur propre de  $f$ . Montrons que  $f$  admet une seule valeur propre.

Soit, pour tout  $u \in E$ ,  $\lambda_u \in K$  tel que  $f(u) = \lambda_u u$ . Soit  $(u, v) \in E^2$ .

Supposons  $(u, v)$  libre. On a  $f(u+v) = \lambda_{u+v}(u+v) = \lambda_u u + \lambda_v v$  donc  $(\lambda_{u+v} - \lambda_u)u + (\lambda_{u+v} - \lambda_v)v = 0_E$ . La liberté de  $(u, v)$  impose  $\lambda_{u+v} = \lambda_u = \lambda_v$ .

Supposons  $(u, v)$  liée. Si  $u = 0_E$ , on a  $f(u) = \lambda_v 0_E$  et on peut convenir que  $\lambda_u = \lambda_v$ . On peut conclure la même chose si  $v = 0_E$ .

Si  $u \neq 0_E$  et  $v \neq 0_E$ , il existe  $\alpha \in K^*$  tel que  $v = \alpha u$ . Par suite,  $f(v) = \alpha f(u) = \alpha \lambda_u u$  et  $f(v) = \lambda_v v = \alpha \lambda_v u$ . Comme  $u \neq 0_E$ ,  $\alpha \lambda_u = \alpha \lambda_v$  et comme  $\alpha \neq 0$ ,  $\lambda_u = \lambda_v$ .

Ainsi,  $f$  n'admet qu'une seule valeur propre et comme tout vecteur de  $E$  est vecteur propre  $f$  est une homothétie vectorielle de rapport cette valeur propre.

## I.D -

**I.D.1)** Soit  $(u_1, \dots, u_n)$  une base de vecteurs propres de  $f$ . Cette famille existe puisque  $f$  est diagonalisable. Soit  $F$  un sous-espace stable par  $f$ . Si  $F = \{0_E\}$  ou  $F = E$ , on a immédiatement des sous espaces stables par  $f$  et supplémentaire de  $F$  à savoir respectivement  $E$  et  $\{0_E\}$ . Supposons  $F \neq \{0_E\}$  et  $F \neq E$ .

Comme  $f$  est diagonalisable, l'endomorphisme  $f|_F$  induit par  $f$  sur  $F$  est aussi diagonalisable. Soit  $(v_1, v_2, \dots, v_k)$  une base de vecteurs propres de  $F$  pour  $f|_F$ ,  $k$  étant donc la dimension de  $F$ . D'après le théorème de la base incomplète, on peut adjoindre des vecteurs de  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  à  $(v_1, v_2, \dots, v_k)$  de sorte à obtenir une base de  $E$ . Soit  $(u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_{n-k}})$  une telle famille de vecteurs. Par suite,  $\text{Vect}((u_{i_1}, \dots, u_{i_2}, \dots, u_{i_{n-k}}))$  est un supplémentaire de  $F$  et d'après I.C.1) est stable par  $f$ .

**I.D.2)** Ici  $K = \mathbb{C}$ . D'après le théorème de De d'Alembert-Gauss, le polynôme caractéristique de  $f$  admet au moins une racine dans  $\mathbb{C}$  donc  $f$  admet au moins un vecteur propre. Soit  $F$  la somme directe des sous-espaces propres de  $f$ .  $F \neq \{0_E\}$  d'après ce qui précède.

Supposons  $F \neq E$ .  $F$  admet un supplémentaire  $G$  stable par  $G$  et  $G \neq \{0_E\}$  car  $F \neq E$ . L'endomorphisme  $f|_G$  a aussi un polynôme caractéristique scindé dans  $\mathbb{C}$  et donc un vecteur propre  $u$ .  $u$  est alors immédiatement vecteur propre de  $f$  et est donc dans  $F$ . Or,  $F$  et  $G$  sont supplémentaires donc  $u = 0_E$  ce qui est contradictoire avec  $u$  vecteur propre. Ainsi  $F = E$  et donc  $f$  est diagonalisable.

Si  $K = \mathbb{R}$ , on ne peut pas conclure que  $f$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ . Prenons par exemple l'endomorphisme de la question I.B.1) pour lequel les seuls sous-espaces stables sont  $\{0_E\}$  et  $E$  et donc tout sous-espace stable admet un supplémentaire stable et cet endomorphisme n'est pas diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ .

## II Deuxième partie.

### II.A -)

**II.A.1)** Soit  $u \in F$ . Il existe  $(u_i)_{i \in \{1, \dots, p\}} \in \prod_{i=1}^p F \cap E_i$  tel que  $u = \sum_{i=1}^p u_i$ .

Par suite,  $f(u) = \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i$ . Comme, pour tout  $i \in \{1, \dots, p\}$ ,  $F$  et  $E_i$  sont des sous-espaces vectoriels  $F \cap E_i$  l'est aussi et donc  $\lambda_i u_i \in F \cap E_i$ .

Ainsi  $f(u) \in \bigoplus_{i=1}^p F \cap E_i$ .  $F = \bigoplus_{i=1}^p F \cap E_i$  est donc stable par  $f$ .

**II.A.2)** Les valeurs propres  $(\lambda_i)_{i \in \{1, \dots, p\}}$  sont deux à deux distinctes donc les sous-espaces vectoriels  $(E_i)_{i \in \{1, \dots, p\}}$  sont en somme directe. De plus,  $f$  est diagonalisable donc  $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$ . Par

conséquent, il existe  $(x_i)_{1 \leq i \leq p} \in \prod_{i=1}^p E_i$  unique tel que  $x = \sum_{i=1}^p x_i$ .

**II.A.3)**  $(x_1, \dots, x_r)$  est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes donc c'est une famille libre. De plus,  $(x_1, \dots, x_r)$  est immédiatement une famille génératrice de  $\text{Vect}(x_1, \dots, x_r)$  donc  $(x_1, \dots, x_r)$  est une base de  $V_x$ .

**II.A.4)** On a, pour tout  $j \in \{1, \dots, r\}$ ,  $f^{j-1}(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i^{j-1} x_i \in V_x$ . La matrice de  $(f^{j-1}(x))_{j \in \{1, \dots, r\}}$

dans la base  $\mathcal{B}_x$  est

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{r-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{r-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_r & \lambda_r^2 & \dots & \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix}.$$

**II.A.5)** Le déterminant de la matrice de  $(f^{j-1}(x))_{j \in \{1, \dots, r\}}$  dans la base  $\mathcal{B}_x$  est un déterminant de Vandermonde qui vaut :  $\prod_{1 \leq i < j \leq r} (\lambda_j - \lambda_i)$ . Comme  $(\lambda_i)_{i \in [1, r]}$  est une famille de scalaires deux

à deux distincts, ce déterminant est non nul. Par suite, la famille  $(f^{j-1}(x))_{j \in \{1, \dots, r\}}$  est libre et étant de cardinal à égal à  $r$ , dimension de  $V_x$ , c'est une base de  $V_x$ .

**II.A.6)** Soit  $i \in [1, p]$ . D'après II.A.5) il existe  $(\alpha_{i,j})_{j \in \{1, \dots, r\}}$  tel que  $x_i = \sum_{j=1}^r \alpha_{i,j} f^{j-1}(x)$ . Comme

$F$  est stable par  $f$ ,  $F$  est de façon immédiate stable par  $f^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Comme  $x \in F$ , on a donc  $f^{j-1}(x) \in F$  pour tout  $j \in \{1, \dots, r\}$ . Par suite,  $\sum_{j=1}^r \alpha_{i,j} f^{j-1}(x) \in F$  et donc

$x_i \in F$ , ceci pour tout  $i \in \{1, \dots, p\}$ . On a donc  $x \in \bigoplus_{i=1}^p F \cap E_i$ , ceci étant aussi immédiatement

vrai pour  $0_E$ , on déduit que  $F \subset \bigoplus_{i=1}^p F \cap E_i$  puis par double inclusion immédiate on a  $F = \bigoplus_{i=1}^p F \cap E_i$

## II.B -)

**II.B.1)** Soit  $i \in \{1, \dots, p\}$ . Comme  $p = n$  et que  $(\lambda_j)_{j \in [1, p]}$  sont deux à deux distincts,  $\lambda_i$  est une valeur propre d'ordre de multiplicité un. Par suite,  $\dim(E_i) = 1$ .

**II.B.2)** D'après II.B.1), pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $E_i$  est engendré par un vecteur propre et donc d'après I.A  $E_i$  est stable par  $f$ . De plus, si  $D$  est une droite vectorielle stable par  $f$ , elle est engendrée par un vecteur propre d'après encore I.A et est donc l'un des sous-espaces propres  $E_i$  puisque pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\dim(E_i) = \dim(D) = 1$ . Par conséquent,  $E_1, E_2, \dots, E_n$  sont les seules droite vectorielles stables par  $f$ . Il y en a donc  $n$ .

**II.B.3)** Montrons que  $F$  est stable par  $f$  et  $\dim(F) = k$  si et seulement si il existe  $H \subset \{1, \dots, n\}$  avec  $\text{card}(H) = k$  tel que  $F = \bigoplus_{i \in H} E_i$ .

Soit  $H \subset \{1, \dots, n\}$  avec  $\text{card}(H) = k$ . Soit, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , un vecteur propre  $u_i \in E$

tel que  $E_i = \text{Vect}(u_i)$ . On a donc  $\bigoplus_{i \in H} E_i = \text{Vect}((u_i)_{i \in H})$ . D'après I.C-1),  $\text{Vect}((u_i)_{i \in H})$  est stable par  $f$  donc  $\bigoplus_{i \in H} E_i$  l'est aussi.

Soit  $F$  un sous-espace de dimension  $k$  et stable par  $f$ . D'après II.A.6),  $F = F \subset \bigoplus_{i=1}^p F \cap E_i$ .

Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Comme  $\dim(E_i) = 1$ , on a ou bien  $F \cap E_i = E_i$  ou bien  $F \cap E_i = \{0_E\}$ . Soit  $H = \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket; F \cap E_i = E_i\}$ . On a donc  $F = \bigoplus_{i \in H} E_i$ . De plus,  $\dim(F) = \dim(\bigoplus_{i \in H} E_i) =$

$\sum_{i \in H} \dim(E_i) = \text{card}(H)$ , donc  $\text{card}(H) = k$ .  $F$  est donc stable par  $f$  et  $\dim(F) = k$  si et seulement

si il existe  $H \subset \{1, \dots, n\}$  avec  $\text{card}(H) = k$  tel que  $F = \bigoplus_{i \in H} E_i$ .

On déduit que le nombre de sous-espaces stables par  $f$  et de dimension  $k$  est le nombre de  $k$ -combinaisons de  $\{1, \dots, n\}$  c'est-à-dire,  $\binom{n}{k}$ .

**II.B.4)** Si  $n = 2$ , d'après II.B.2), Les sous-espaces stables sont  $\{0_E\}$ ,  $E$ ,  $E_1$  et  $E_2$ .

Si  $n \geq 3$ , d'après II.B.2) et II.B.3), il y a  $1 + \binom{n}{1} + \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n}{k} + 1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ , cette formule étant d'ailleurs valable pour  $n = 2$  et  $n = 1$ .

Les sous-espaces stables de  $f$  sont  $\{0_E\}$ ,  $E_i$ ,  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $\bigoplus_{i \in H} E_i$ , avec  $H \subset \{1, \dots, n\}$   
 $2 \leq \text{card}(H) \leq n - 1$ .

### III Troisième partie.

#### III.A -)

**III.A.1)** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $P \in \mathbb{K}_n[X]$ . Si  $\deg(P) \leq 0$ ,  $P' = 0$  et donc  $D(P) \in \mathbb{K}_n[X]$ . Si  $\deg(P) \geq 1$ ,  $\deg(P') = \deg(P) - 1$  donc  $D(P) \in \mathbb{K}_n[X]$ .  $\mathbb{K}_n[X]$  est donc stable par  $D$ .

On a  $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ .

#### III.A.2)

a) Soit  $L = \{p \in \mathbb{N}; \exists P \in F \text{ avec } \deg(P) = p\}$ . Cet ensemble est non vide vu que  $F$  est de dimension non nulle, il contient un polynôme non nul dont le degré est dans  $L$ . Supposons  $L$  non majorée.

En ce cas, il existe une suite  $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de polynômes tous non nuls de  $F$  et de degré strictement croissant. Cette famille est donc de degré échelonné donc est libre. Ce qui impose  $F$  de dimension infinie. Or,  $\dim(F)$  est finie, donc  $L$  est majorée.  $L \subset \mathbb{N}$  donc  $L$  admet un plus grand élément. Soit  $n$  celui-ci. Par suite, il existe  $R \in F$  tel que  $\deg(R) = n$ . De plus, pour tout  $P \in F$ ,  $\deg(P) \leq n$  donc  $F \subset \mathbb{K}_n[X]$ .

Remarquons que  $n \neq 0$  car  $F$  possède des polynômes non nuls.

b) Pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$ , on montre par récurrence que  $\deg(D^i(R)) = n - i$ . Or, pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$ ,  $0 \leq n - i \leq n$ . Par suite,  $(D^i(R))_{0 \leq i \leq n}$  est une famille de polynômes tous non nuls et de degré échelonné donc  $(D^i(R))_{0 \leq i \leq n}$  est libre.

c) La famille  $(D^i(R))_{0 \leq i \leq n}$  est libre d'après la question précédente. Elle possède  $n + 1$  éléments qui sont tous dans  $\mathbb{K}_n[X]$  et  $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$  donc c'est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$  donc  $\mathbb{K}_n[X] = \text{Vect}(D^i(R))_{0 \leq i \leq n}$ . Par suite,  $\mathbb{K}_n[X] \subset F$ . De l'inclusion de III.A.1.a), on a  $F = \mathbb{K}_n[X]$ .

**III.A.3)** D'après III.A.1) et III.A.2)  $F$  est un sous-espace de dimension finie stable par  $D$  si et seulement si  $F = \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$  ou bien il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $F = \mathbb{K}_n[X]$ . Soit à présent  $F$  un sous-espace stable par  $D$  de dimension infinie. Montrons que  $D = \mathbb{K}[X]$ .

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ . Si  $P$  est nul,  $P \in D$ . Supposons  $P$  non nul. Comme  $F$  est de dimension infinie il existe  $Q \in F$  avec  $\deg(Q) > \deg(P)$ . En effet, dans le cas contraire, on aurait  $F \subset K_p[X]$ , où  $p = \deg(P)$  et  $F$  serait de dimension finie. Soit  $q = \deg(Q)$ . Comme  $F$  et  $\mathbb{K}_q[X]$  sont stables,  $F \cap \mathbb{K}_q[X]$  l'est aussi. De plus,  $\mathbb{K}_q[X] \cap F$  est de dimension finie donc il existe  $r \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathbb{K}_q[X] \cap F = \mathbb{K}_r[X]$ . On a donc  $\mathbb{K}_r[X] \subset \mathbb{K}_q[X]$  donc  $r \leq q$ . De plus,  $Q \in \mathbb{K}_q[X] \cap F$  donc  $Q \in \mathbb{K}_r[X]$  donc  $q \leq r$ . Ainsi  $r = q$  donc  $\mathbb{K}_q[X] \cap F = \mathbb{K}_q[X]$ . Or,  $\deg(P) < \deg(Q)$  donc  $P \in \mathbb{K}_q[X]$  donc  $P \in F$ . Ainsi  $\mathbb{K}[X] \subset F$  et par double inclusion immédiate,  $F = \mathbb{K}[X]$ .

Les sous espaces stables de  $\mathbb{K}[X]$  par  $D$  sont donc les sous-espaces  $0_{\mathbb{K}[X]}$ ,  $\mathbb{K}_n[X]$ ,  $n \in \mathbb{N}$  et  $\mathbb{K}[X]$ .

### III.B. -

**III.B.1)** Soit  $M = \{u \in E; \mathcal{B}_{f,u} \text{ est un base de } E\}$ . Montrons que  $M = E \setminus \text{Ker}(f^{n-1})$ .

Si  $\mathcal{B}_{f,u}$  est une base de  $E$ ,  $f^{n-1}(u) \neq 0_E$  donc  $u \in E \setminus \text{Ker}(f^{n-1})$ . L'inclusion  $M \subset E \setminus \text{Ker}(f^{n-1})$  s'en déduit. Soit  $u \in E \setminus \text{Ker}(f^{n-1})$ . Montrons que  $\mathcal{B}_{f,u}$  est libre.

Soit  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$  tel que  $\sum_{i=1}^n a_i f^{n-i}(u) = 0_E$ . Supposons  $a_1, \dots, a_n$  non tous nuls. Soit

alors  $i_0 = \max\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket; a_i \neq 0\}$ . On a donc  $\sum_{i=1}^{i_0} a_i f^{n-i}(u) = 0_E$ . Comme  $f^n = 0$ ,  $f^k = 0$

pour tout  $k \geq n$ , en composant par  $f^{i_0-1}$  à chaque membre de l'égalité précédente, on obtient donc  $a_{i_0} f^{n-1}(u) = 0_E$ . Comme  $f^{n-1}(u) \neq 0_E$ ,  $a_{i_0} = 0$  ce qui contredit  $a_{i_0} \neq 0$ . Par suite, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $a_i = 0$  et donc  $\mathcal{B}_{f,u}$  est libre. Il s'agit d'une famille de  $n$  vecteurs et comme  $\dim(E) = n$ ,  $\mathcal{B}_{f,u}$  est une base de  $E$ . Ainsi  $E \setminus \text{Ker}(f^{n-1}) \subset M$  et par double inclusion

$M = E \setminus \text{Ker}(f^{n-1})$ .

**III.B.2)** La matrice de  $f$  dans  $\mathcal{B}_{f,u}$  est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

**III.B.3)** Soit  $u \in E$  tel que  $\mathcal{B}_{f,u}$  soit une base de  $E$ .

Soit  $\mathcal{B}'_{f,u} = ((i-1)!f^{n-i}(u))_{1 \leq i \leq n}$ .  $\mathcal{B}'_{f,u}$  est alors clairement aussi une base de  $E$ . De plus, pour tout  $i \in \{2, \dots, n\}$ ,  $f((i-1)!f^{n-i}(u)) = (i-1)((i-1)-1)!f^{n-(i-1)}(u)$  et pour  $i = 1$ ,  $f((i-1)!f^{n-i}(u)) = 0_E$ . Par conséquent, la matrice de  $f$  dans  $\mathcal{B}'_{f,u}$  est bien  $A_{n-1}$ .

**III.B.4)** Soit  $u \in E$  tel que  $\mathcal{B}_{f,u}$  soit une base de  $E$ . D'après III.B.3),  $f$  et  $D_{|\mathbb{K}_{n-1}[X]}$  ont la même matrice représentative dans respectivement les bases  $(X^{i-1})_{1 \leq i \leq n}$  et  $\mathcal{B}'_{f,u} = (u_{i-1})_{1 \leq i \leq n}$ , où on a noté,  $u_{i-1} = (i-1)!f^{n-i}(u)$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Soit  $g$  l'unique application linéaire de  $E$  dans  $\mathbb{K}_{n-1}[X]$  telle que pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $g(X^{i-1}) = u_{i-1}$ .  $g$  est un isomorphisme puisque  $g$  transforme une base en une base et la matrice de  $g$  dans la base  $\mathcal{B}'_{f,u}$  et la base canonique de  $\mathbb{K}_{n-1}[X]$  est la matrice identité  $I_n$ . De plus,  $g^{-1}of = D_{|\mathbb{K}_{n-1}[X]}og^{-1}$  puisque la matrice représentative de ces deux applications linéaires est  $A_{n-1}$ .

Si  $F$  est un sous-espace de  $E$  stable par  $f$ ,  $g^{-1}(f(F)) \subset g^{-1}(F)$ . Et donc  $D_{|\mathbb{K}_{n-1}[X]}(g^{-1}(F)) \subset g^{-1}(F)$  donc  $g^{-1}(F)$  est stable par  $D_{|\mathbb{K}_{n-1}[X]}$ . Réciproquement si  $F$  est un sous-espace de  $E$  tel que  $g^{-1}(F)$  soit stable par  $D_{|\mathbb{K}_{n-1}[X]}$ , on a  $D_{|\mathbb{K}_{n-1}[X]}(g^{-1}(F)) \subset g^{-1}(F)$  donc  $g^{-1}(f(F)) \subset g^{-1}(F)$  donc  $gog^{-1}(f(F)) \subset g(g^{-1}(F))$  donc  $f(F) \subset F$  donc  $F$  est stable par  $f$ . Ainsi  $F$  est un sous-espace stable par  $f$  si et seulement si  $g^{-1}(F)$  est stable par  $D_{|\mathbb{K}_{n-1}[X]}$ . D'après III.A.3),  $F$  est un sous-espace stable par  $f$  si et seulement si  $g^{-1}(F) = \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$  ou  $g^{-1}(F) = \mathbb{K}_r[X]$ , où  $r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . Par définition de  $g$ ,

$F$  est donc un sous-espace stable par  $f$  équivaut à  $F = \{0_E\}$  ou  $F = \text{Vect}((u_{i-1})_{i \in \{1, \dots, r\}})$ , où  $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

Il y a donc  $n + 1$  sous-espaces stables par  $f$ .

Pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$   $\text{Ker}(f^i)$  est un sous-espace stable par  $f$ . En effet, si  $u \in \text{Ker}(f^i)$ ,  $f^i(u) = 0_E$  donc  $f(f^i(u)) = 0_E$  donc  $f^i(f(u)) = 0_E$  donc  $f(u) \in \text{Ker}(f^i)$ .

De plus, clairement  $\text{Ker}(f^i) \subset \text{Ker}(f^{i+1})$ . Montrons que cette inclusion est stricte pour tout  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ . Soit  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ . Supposons que  $\text{Ker}(f^i) = \text{Ker}(f^{i+1})$ . Soit  $u \in E$  tel que  $f^{n-1}(u) \neq 0_E$ . On a  $f^n(u) = f^{i+1}(f^{n-i-1}(u))$  et  $f^n(u) = 0_E$ . Par conséquent  $f^{n-i-1}(u) \in \text{Ker}(f^{i+1})$ . Comme  $\text{Ker}(f^{i+1}) = \text{Ker}(f^i)$ ,  $f^{n-i-1}(u) \in \text{Ker}(f^i)$  donc  $f^i(f^{n-i-1}(u)) = 0_E$  donc  $f^{n-1}(u) = 0_E$ . Or,  $f^{n-1}(u) \neq 0_E$ . On a donc une contradiction, ainsi l'inclusion  $\text{Ker}(f^i) \subset \text{Ker}(f^{i+1})$  est stricte. Les sous-espaces  $\text{Ker}(f^i)$  sont donc deux à deux distincts pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$ , il y en a donc  $n + 1$  et ils sont tous stables par  $f$ .

Par suite, les sous-espaces stables par  $f$  sont les sous-espaces  $\text{Ker}(f^i)$ , où  $i \in \{0, \dots, n\}$ .

## Partie IV :

1.  $MX_i$  étant la colonne  $i$  de  $M$ , par définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base, la matrice de  $f$  dans  $\mathcal{B}_n$  est  $M$ .
2. Le polynôme caractéristique  $\chi_f$  de  $f$  étant unitaire de degré  $n$ , il tend vers  $-\infty$  en  $-\infty$  et  $+\infty$  en  $+\infty$ ; comme il change de signe et est une fonction continue réelle, il admet au moins une racine réelle donc  $f$  a au moins une valeur propre.
3. (a)  $X$  et  $Y$  sont bien des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  puisque pour tout  $i$ ,  $x_i = \Re(z_i)$  et  $y_i = \Im(z_i)$ . Soient  $(a, b)$  un couple de réels tels que  $aX + bY = 0$  ce qui équivaut à  $(a - ib)Z + (a + ib)\bar{Z} = 0$ . comme  $MZ = \lambda Z$ ,  $M\bar{Z} = \bar{\lambda}\bar{Z}$ .  $Z$  et  $\bar{Z}$  sont des vecteurs propres de  $M$  associés à deux valeurs propres distinctes (car  $\lambda \notin \mathbb{R}$ ), ils forment une famille libre donc  $a - ib = a + ib = 0$  ce qui équivaut à  $a = b = 0$  ce qui prouve que  $(X, Y)$  est libre.
- (b) On a immédiatement :

$$\begin{cases} 2MX = MZ + M\bar{Z} = 2\Re((\alpha + i\beta)(X + iY)) = 2(\alpha X - \beta Y) \\ 2MY = \frac{1}{i}(MZ - M\bar{Z}) = 2\Im((\alpha + i\beta)(X + iY)) = 2(\beta X + \alpha Y) \end{cases}$$

ce qui prouve que le plan vectoriel  $F$  est stable par  $f$  et la matrice de  $f_F$  dans la base  $(X, Y)$

est  $M_F = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$

4. Soit  $E$  un espace vectoriel de **dimension  $n$  non nulle** et un endomorphisme  $f$  de  $E$  admet de matrice  $M$  dans une base  $\mathcal{B}$  donnée de  $E$ . Si  $f$  a une valeur propre réelle  $\lambda$ , tout vecteur propre de  $f$  associé à  $\lambda$  engendre une droite stable par  $f$ .

Si  $f$  n'a pas de valeur propre réelle, sa matrice  $M$  admet au moins une valeur propre complexe  $\lambda$  ( $n \neq 0$ ). En reprenant les notations de la question C, les vecteurs  $x$  et  $y$  de  $E$  de matrices  $X$  et  $Y$  dans la base  $\mathcal{B}$  engendrent un plan stable par  $E$ . Ainsi :

tout endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension finie non nulle admet une droite ou un plan stable.

5. Soit l'endomorphisme de  $\mathbb{R}[X]$  défini par  $f(P) = PX$ . Si  $P$  est non nul,  $\deg(f(P)) = \deg(P) + 1$  donc  $f(P)$  ne peut pas être colinéaire à  $P$ ; de plus  $P, f(P), f^2(P)$  est une famille libre (car étagée en degré) donc  $P$  ne peut pas appartenir à un plan stable.

L'endomorphisme de  $\mathbb{R}[X]$  défini par  $f(P) = PX$  n'admet ni droite ni plan stable.

6. (a) Par un calcul (à la machine par exemple),  $\chi_A(x) = (x - 1)((x + 1)^2 + 4)$  admet comme racines  $1, -1 - 2i$  et  $-1 + 2i$ .

$AX = X \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$ . L'espace propre associé à la valeur propre 1 est la droite  $G$

engendrée par  $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$AZ = (-1 + 2i)Z \iff \begin{cases} x = (1 + i)y \\ z = -iy \end{cases}$ . Choisissons  $Z = \begin{pmatrix} (1 + i) \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$ . Introduisons comme

en question  $C$  :

$$u = \frac{Z + \bar{Z}}{2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v = \frac{Z - \bar{Z}}{2i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Par la question  $C.2$ , le plan  $F$  engendré par  $(u, v)$  est stable et :

$$Au = -u - 2v, \quad Av = 2u - v.$$

$f_F$  n'admet pas de valeur propre réelle donc  $F$  ne contient pas de droite stable ce qui prouve que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires. La matrice  $P$  est la matrice de passage de la base

canonique à la base  $(u, v, w)$  soit  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- (b)  $X : t \mapsto e^t U$  vérifie  $X'(t) = e^t U = A(e^t U) = AX$  puisque  $U$  appartient à  $G$  le sous-espace propre de  $A$  associé à 1. De plus,  $X(0) = U$ .

$t \mapsto e^t U$  est donc solution de  $\mathcal{P}_U$  et c'est la seule par l'unicité de ce problème de Cauchy.

- (c) On a immédiatement  $x'(0) = -x(0) + 2y(0) = -a + 2b$  et  $y'(0) = -2x(0) - y(0) = -2a - b$ .  $x$  et  $y$  étant  $\mathcal{C}^1$ , par combinaison linéaire, il en est de même de  $x'$  et  $y'$  et :

$$\begin{cases} x'' = -x' + 2y' = -x' + 2(-2x - y) = -x' - 4x - (x' + x) = -2x' - 5x \\ y'' + y' = -2x' = 2x - 4y = -5y - y' \end{cases}$$

$x$  et  $y$  sont solutions de  $z'' + 2z' + 5z = 0$ .

Les solutions de cette équation différentielle d'équation caractéristique  $s^2 + 2s + 5 = 0$  de racines  $-1 \pm 2i$  sont de la forme  $z : t \mapsto e^{-t}(\lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t))$  avec  $\lambda = z(0)$  et  $z'(0) = -\lambda + 2\mu$ .

Pour  $x$ ,  $\lambda = a$  et  $-a + 2\mu = -a + 2b$  soit  $\mu = b$  et  $x(t) = e^{-t}(a \cos(2t) + b \sin(2t))$ .

Pour  $y$ ,  $\lambda = b$  et  $-b + 2\mu = -b - 2a$  soit  $\mu = -a$  et  $y(t) = e^{-t}(b \cos(2t) - a \sin(2t))$ .

Ainsi  $\varphi(t) = e^{-t}(a \cos(2t) + b \sin(2t), b \cos(2t) - a \sin(2t))$

- (d) Si  $X$  est une solution autre que la solution nulle de  $\mathcal{S}$ ,  $X$  ne s'annule pas sinon  $X$  et  $X'$  s'annulent simultanément et  $X$  est la solution nulle par unicité de la solution d'un problème

de Cauchy.

Soit  $\Gamma$  une trajectoire rectiligne de  $\mathcal{S}$ . Il existe un vecteur  $V$  et une fonction  $\gamma$  ne s'annulant pas tels que  $X(t) = \gamma(t)V$  d'où

$$X'(t) = \gamma'(t)V = \gamma(t)AV$$

Comme  $\gamma$  ne s'annule pas,  $AV$  est colinéaire à  $V$  donc  $V$  est élément de  $G$  : on se retrouve dans le cas étudié en F.2 avec  $U = \gamma(0)V$ .

Les trajectoires rectilignes sont les trajectoires incluses dans  $G$  et sont paramétrées sous la forme  $X(t) = \begin{pmatrix} ae^t \\ 0 \\ ae^t \end{pmatrix}$  avec  $a$  réel non nul.

Soit  $\Gamma$  une trajectoire plane de  $\mathcal{S}$ . Il existe deux vecteurs  $V_1$  et  $V_2$  et deux fonction  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  non identiquement nulles tel que  $X(t) = \gamma_1(t)V_1 + \gamma_2(t)V_2$ . La trajectoire n'étant pas rectiligne, il existe un  $t_0$  tel que  $(X(t_0), X(0))$  est libre soit  $\Delta(t_0) = \begin{vmatrix} \gamma_1(t_0) & \gamma_1(0) \\ \gamma_2(t_0) & \gamma_2(0) \end{vmatrix} \neq 0$ . De plus :

$$\forall t, X'(t) = \gamma_1(t)AV_1 + \gamma_2(t)AV_2 = (\gamma_1)'(t)V_1 + (\gamma_2)'(t)V_2$$

$A$  étant inversible,  $(AV_1, AV_2)$  engendrent un plan  $\Pi'$  contenant tous les vecteurs  $X'(t)$ .  $\Delta(t_0)$  étant non nuls, ce plan est engendré par  $X'(t_0)$  et  $X'(0)$ , or ces deux éléments appartiennent à  $\text{Vect}(V_1, V_2) = \Pi$  :  $\pi$  et  $\Pi'$  sont donc confondus :  $\Pi$  est un plan stable par  $A$ .

Si  $\Pi \neq F$ ,  $\pi \cap F$  est une droite stable donc engendrée par un vecteur propre de  $A$ , c'est donc  $G$  ce qui est impossible car  $F$  et  $G$  sont supplémentaires ; d'où  $\Pi = F$  et  $X = P \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = PY$ .

$P$  étant une matrice constante,  $Y' = P^{-1}X' = PAX = P^{-1}APY = TY$  et on retrouve le fait que  $(x, y)$  est solution de  $\mathcal{C}_\sigma$ . D'où il existe  $(a, b)$  tels que

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t}(a \cos(2t) + b \sin(2t)) \\ e^{-t}(b \cos(2t) - a \sin(2t)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les trajectoires planes sont les trajectoires incluses dans  $F$  et sont paramétrées sous la forme  $X(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}((a+b) \cos(2t) + (b-a) \sin(2t)) \\ e^{-t}(a \cos(2t) + b \sin(2t)) \\ e^{-t}(-b \cos(2t) + a \sin(2t)) \end{pmatrix}$  avec  $(a, b)$  réels non tous deux nuls.