M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Devoir surveillé n°5 (3h)

Réduction des endomorphismes et des matrices

Jeudi 16 décembre 2021

David BLOTTIÈRE

Consignes

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, **les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte**. Vous êtes invité à encadrer les résultats de vos calculs.

Si vous êtes amené à repérer ce qui peut vous sembler être une erreur d'énoncé, vous le signalerez sur votre copie et devrez poursuivre votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

Deux sujets sont proposés :

- Sujet CCINP (pages 2–5)
- Sujet Centrale (pages 6–9).

Vous indiquerez, au début de votre première copie, le sujet choisi.

1 Sujet CCINP - Éléments propres et crochet de Lie (MP2012)

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. Cet entier est quelconque sauf dans la partie I, où il est égal à 2.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, $(E_{i,j})$ sa base canonique ($1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$) et I_n sa matrice unité (tous les coefficients de $E_{i,j}$ sont nuls, sauf celui situé à la i^{e} ligne et à la j^{e} colonne, qui vaut 1).

On note $\mathbf{R}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients réels.

Dans tout le problème, A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A.

Pour tout $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbf{R}[X]$, on note $P(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k A^k$. L'ensemble des matrices $P(A)$ pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$ est noté $\mathbf{R}[A]$.

On dit que P annule A lorsque $P(A) = 0$, ce qui équivaut à $P(u) = 0$. On appelle polynôme minimal de la matrice A le polynôme minimal de l'endomorphisme u ; c'est donc le polynôme unitaire de plus petit degré qui annule A.

On note ϕ_A l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ définie par :

$$\phi_A(M) = AM - MA$$

L'objet du problème est d'étudier quelques propriétés des éléments propres de ϕ_A. Les parties I et II étudient la diagonalisabilité de ϕ_A, les parties III et IV en étudient les vecteurs propres.

Les quatre parties sont indépendantes.

Partie I – Étude du cas $n = 2$

Dans toute cette partie, on prendra $n = 2$.

1. Vérifier que l'application ϕ_A est linéaire et que I_2 et A appartiennent à $\ker \phi_A$.

Dans la suite de cette partie, on pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

2. Donner la matrice de ϕ_A dans la base $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

Dans la suite de cette partie, on suppose que $\phi_A \neq 0$ (c'est-à-dire que $A \neq \lambda I_2$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$).

3. Donner le polynôme caractéristique de ϕ_A sous forme factorisée (on pourra utiliser la calculatrice).

4. En déduire que ϕ_A est diagonalisable si et seulement si $(d - a)^2 + 4bc > 0$.

5. Démontrer que ϕ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Partie II – Étude du cas général

On note $c = (c_1, \ldots, c_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

6. On suppose dans cette question que A est diagonalisable.
On note $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres de u (défini au début du problème) et, pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, λ_i la valeur propre associée au vecteur e_i. On note alors P la matrice de passage de la base c à la base e et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Enfin, pour tout couple (i, j) d'entiers tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, on pose :

$$B_{i,j} = PE_{i,j}P^{-1}$$

6. (a) Exprimer, pour tout couple (i, j), la matrice $DE_{i,j} - E_{i,j}D$ en fonction de la matrice $E_{i,j}$ et des réels λ_i et λ_j.

6. (b) Démontrer que, pour tout couple (i, j), $B_{i,j}$ est un vecteur propre de ϕ_A.

6. (c) En déduire que ϕ_A est diagonalisable.

7. On suppose dans cette question que ϕ_A est diagonalisable en tant qu'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

On note $(P_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ une base de vecteurs propres de ϕ_A et, pour tout couple (i, j), $\lambda_{i,j}$ la valeur propre associée à $P_{i,j}$.

7. (a) Dans cette question, on considère A comme une matrice à coefficients complexes ($A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$) et ϕ_A comme un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ (défini par $\phi_A(M) = AM - MA$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$).

7. (a) .i Justifier que toutes les valeurs propres de ϕ_A sont réelles.

7. (a) .ii Soit $z \in \mathbf{C}$. Justifier que si z est une valeur propre de A, alors z est aussi une valeur propre de $A^\top$.

7. (a) .iii Soit $z \in \mathbf{C}$. On suppose que z et $\overline{z}$ sont deux valeurs propres de la matrice A. On considère alors $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ $(X \neq 0)$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ $(Y \neq 0)$ tels que $AX = zX$ et $A^\top Y = \overline{z}Y$.
En calculant $\phi_A\left(XY^\top\right)$, démontrer que $z - \overline{z}$ est une valeur propre de ϕ_A.

7. (b) En déduire que la matrice A a au moins une valeur propre réelle.

On note λ une valeur propre réelle de A et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ $(X \neq 0)$ une matrice colonne telle que $AX = \lambda X$.

7. (c) Démontrer que, pour tout couple (i, j), il existe un réel $\mu_{i,j}$, que l'on exprimera en fonction de λ et $\lambda_{i,j}$, tel que $AP_{i,j}X = \mu_{i,j}P_{i,j}X$.

7. (d) En déduire que A est diagonalisable.

Partie III – Étude des vecteurs propres de ϕ_A associés à la valeur propre 0

Soit m le degré du polynôme minimal de A.

8. Démontrer que la famille $(I_n, A, \dots, A^{m-1})$ est une base de $\mathbf{R}[A]$.

9. Vérifier que $\mathbf{R}[A]$ est inclus dans $\ker \phi_A$ et en déduire une minoration de $\dim \ker \phi_A$.

10. *Un cas d'égalité*

On suppose que l'endomorphisme u (défini au début du problème) est nilpotent d'indice n (c'est-à-dire que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$). On considère un vecteur y de $\mathbf{R}^n$ tel que $u^{n-1}(y) \neq 0$ et, pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, on pose $e_i = u^{n-i}(y)$.

10.(a) Démontrer que la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbf{R}^n$.

10.(b) Soient $B \in \ker \phi_A$ et v l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ canoniquement associé à B.
Démontrer que si $v(y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ ($\alpha_i \in \mathbf{R}$) alors $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-i}$.

10.(c) En déduire $\ker \phi_A$.

11. *Cas où u est diagonalisable*

On suppose que u est diagonalisable. On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ ($1 \leqslant p \leqslant n$) les p valeurs propres distinctes de u et, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant p$, $E_u(\lambda_k)$ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_k. On note m_k la dimension de cet espace propre.

11.(a) Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et v l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ canoniquement associé à B. Démontrer que $B \in \ker \phi_A$ si et seulement si, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant p$, $E_u(\lambda_k)$ est stable par v (c'est-à-dire $v(E_u(\lambda_k)) \subset E_u(\lambda_k)$).

11.(b) En déduire que $B \in \ker \phi_A$ si et seulement si la matrice de v, dans une base adaptée à la décomposition de $\mathbf{R}^n$ en somme directe des sous-espaces propres de u, a une forme que l'on précisera.

11.(c) Préciser la dimension de $\ker \phi_A$.

11.(d) Lorsque $n = 7$, donner toutes les valeurs possibles pour cette dimension en envisageant les différentes valeurs possibles de p et des m_k (on ne demande pas de justification).

2 Sujet Centrale - Sous-espaces stables (PC2015)

Dans ce problème, $\mathbf{K}$ désigne le corps $\mathbf{R}$ ou le corps $\mathbf{C}$ et E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel non nul.

Si f est un endomorphisme de E, pour tout sous-espace F de E stable par f on note f_F l'endomorphisme de F induit par f, c'est-à-dire défini sur F par $f_F(x) = f(x)$ pour tout x dans F.

Pour tout endomorphisme f d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E on définit la suite $(f^n)_{n\in\mathbf{N}}$ des puissances de f par

$$\begin{cases} f^0 = \mathrm{id}_E, \\ f^{k+1} = f \circ f^k = f^k \circ f \quad \text{pour tout } k \text{ dans } \mathbf{N}. \end{cases}$$

On note $\mathbf{K}[X]$ l'espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ des polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$ et, pour tout n de $\mathbf{N}$, $\mathbf{K}_n[X]$ le sous-espace de $\mathbf{K}[X]$ des polynômes de degré au plus égal à n.

Pour $n \geqslant 1$, $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est l'espace des matrices carrées à n lignes et à éléments dans $\mathbf{K}$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ est l'espace des matrices colonnes à n lignes et à éléments dans $\mathbf{K}$.

I – Première partie

Dans cette partie, f est un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E.

I.A Montrer qu'une droite F engendrée par un vecteur u est stable par f si et seulement si u est un vecteur propre de f.

I.B.1) Montrer qu'il existe au moins deux sous-espaces de E stables par f et donner un exemple d'un endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ qui n'admet que deux sous-espaces stables.

I.B.2) Montrer que si E est de dimension finie $n \geqslant 2$ et si f est non nul et non injectif, alors il existe au moins trois sous-espaces de E stables par f et au moins quatre lorsque n est impair.
Donner un exemple d'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ qui n'admet que trois sous-espaces stables.

I.C.1) Montrer que tout sous-espace engendré par une famille de vecteurs propres de f est stable par f. Préciser l'endomorphisme induit par f sur tout sous-espace propre de f.

I.C.2) Montrer que si f admet un sous-espace propre de dimension au moins égale à 2 alors il existe une infinité de droites de E stables par f.

I.C.3) Que dire de f si tous les sous-espaces de E sont stables par f ?

I.D – Dans cette sous-partie, E est un espace de dimension finie.

I.D.1) Montrer que si f est diagonalisable alors tout sous-espace de E admet un supplémentaire dans E stable par f. On pourra partir d'une base de F et d'une base de E constituée de vecteurs propres de f.

I.D.2) Montrer que si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ et si tout sous-espace de E stable par f admet un supplémentaire dans E stable par f, alors f est diagonalisable. Qu'en est-il si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$?

II – Deuxième partie

Dans cette partie, n et p sont deux entiers naturels au moins égaux à 2, f est un endomorphisme diagonalisable d'un K-espace vectoriel E de dimension n, qui admet p valeurs propres distinctes $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ et, pour tout i dans $[\![1, p]\!]$, on note E_i le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_i.

II.A – Il s'agit ici de montrer qu'un sous-espace F de E est stable par f si et seulement si $F = \bigoplus_{i=1}^{p} (F \cap E_i)$.

II.A.1) Montrer que tout sous-espace F de E tel que $F = \bigoplus_{i=1}^{p} (F \cap E_i)$ est stable par f.

II.A.2) Soit F un sous-espace de E stable par f et x un vecteur non nul de F. Justifier l'existence et l'unicité de $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ dans $E_1 \times \cdots \times E_p$ tel que $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$.

II.A.3) Si on pose $H_x = \{i \in [\![1, p]\!] \mid x_i \neq 0\}$, H_x est non vide et, quitte à renuméroter les valeurs propres (et les sous-espaces propres), on peut supposer que $H_x = [\![1, r]\!]$ avec $1 \leqslant r \leqslant p$. Ainsi on a $x = \sum_{i=1}^{r} x_i$ avec $x_i \in E_i \setminus \{0\}$ pour tout i de $[\![1, r]\!]$.

On pose $V_x = \mathrm{Vect}\,(x_1, \dots, x_r)$.

Montrer que $\mathcal{B}_x = (x_1, \dots, x_r)$ est une base de V_x.

II.A.4) Montrer que pour tout j de $[\![1, r]\!]$, $f^{j-1}(x)$ appartient à V_x et donner la matrice de la famille $(f^{j-1}(x))_{1 \leqslant j \leqslant r}$ dans la base $\mathcal{B}_x$.

II.A.5) Montrer que $(f^{j-1}(x))_{1 \leqslant j \leqslant r}$ est une base de V_x.

II.A.6) En déduire que pour tout i de $[\![1, r]\!]$, x_i appartient à F et conclure.

II.B – Dans cette sous-partie, on se place dans le cas où $p = n$.

II.B.1) Préciser la dimension de E_i pour tout i dans $[\![1, p]\!]$.

II.B.2) Combien y a-t-il de droites de E stables par f ?

II.B.3) Si $n \geqslant 3$ et $k \in [\![2, n-1]\!]$, combien y a-t-il de sous-espaces de E de dimension k et stables par f ?

II.B.4) Combien y a-t-il de sous-espaces de E stables par f dans ce cas ? Les donner tous.

III – Troisième partie

III.A – On considère l'endomorphisme D de dérivation sur $\mathbf{K}[X]$ défini par $D(P) = P'$ pour tout P dans $\mathbf{K}[X]$.

III.A.1) Vérifier que pour tout n de $\mathbf{N}$, $\mathbf{K}_n[X]$ est stable par D et donner la matrice A_n de l'endomorphisme induit par D sur $\mathbf{K}_n[X]$ dans la base canonique de $\mathbf{K}_n[X]$.

III.A.2) – Soit F un sous-espace de $\mathbf{K}[X]$, de dimension finie non nulle, stable par D.

III.A.2).a) Justifier l'existence d'un entier naturel n et d'un polynôme R de degré n tels que $R \in F$ et $F \subset \mathbf{K}_n[X]$.

III.A.2).b) Montrer que la famille $(D^i(R))_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille libre de F.

III.A.2).c) En déduire que $F = \mathbf{K}_n[X]$.

III.A.3) Donner tous les sous-espaces de $\mathbf{K}[X]$ stables par D.

III.B – On considère un endomorphisme f d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 2$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

III.B.1) Déterminer l'ensemble des vecteurs u de E tels que la famille $\mathcal{B}_{f,u} = (f^{n-i}(u))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ soit une base de E.

III.B.2) Dans le cas où $\mathcal{B}_{f,u}$ est une base de E, quelle est la matrice de f dans $\mathcal{B}_{f,u}$?

III.B.3) Déterminer une base de E telle que la matrice de f dans cette base soit A_{n-1}.

III.B.4) Donner tous les sous-espaces de E stables par f. Combien y en a-t-il ? Donner une relation simple entre ces sous-espaces stables et les noyaux $\ker(f^i)$ pour i dans $[\![0, n]\!]$.

IV – Quatrième partie

Dans cette partie, n est un entier naturel non nul, M est dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et f est l'endomorphisme de $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ défini par $f(X) = MX$ pour tout X de E.

IV.A Si on pose $X_i = \begin{pmatrix} \delta_{1,i} \\ \vdots \\ \delta_{n,i} \end{pmatrix}$ où $\delta_{k,\ell} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = \ell, \\ 0 & \text{si } k \neq \ell \end{cases}$ et $\mathcal{B}_n = (X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la base canonique de E, quelle est la matrice de f dans $\mathcal{B}_n$?

IV.B Montrer que si n est impair, alors f admet au moins une valeur propre réelle.

IV.C – Dans cette question, $\lambda = \alpha + i\beta$, avec (α, β) dans $\mathbf{R}^2$, est une valeur propre non réelle de M et Z de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$, non nul est tel que $MZ = \lambda Z$.

Si $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on pose $\overline{M} = (m'_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $m'_{i,j} = \overline{m_{i,j}}$ (conjugué du nombre complexe $m_{i,j}$) pour tout (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$ et si $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$, on pose $\overline{Z} = \begin{pmatrix} z'_1 \\ \vdots \\ z'_n \end{pmatrix}$ avec $z'_i = \overline{z_i}$ pour tout i de $[\![1,n]\!]$.

On pose $X = \frac{1}{2}(Z + \overline{Z})$ et $Y = \frac{1}{2i}(Z - \overline{Z})$.

IV.C.1) Vérifier que X et Y sont dans E et montrer que la famille (X,Y) est libre dans E.

IV.C.2) Montrer que le plan vectoriel F engendré par X et Y est stable par f et donner la matrice de f_F dans la base (X,Y).

IV.D Que penser de l'affirmation : « tout endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension finie admet au moins une droite ou un plan stable » ?

IV.E Existe-t-il un endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$ n'admettant ni droite ni plan stable ?

IV.F – Dans cette question on considère le système différentiel linéaire $\mathcal{S} : X' = AX$ associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On appelle trajectoires de $\mathcal{S}$ les arcs de l'espace $\mathbf{R}^3$ paramétrés par les solutions de $\mathcal{S}$. On veut déterminer les trajectoires rectilignes et les trajectoires planes de $\mathcal{S}$.

IV.F.1) Construire une matrice P inversible et une matrice $T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ avec (α,β,γ) dans $(\mathbf{R}^*)^3$ telles que $P^{-1}AP = T$, et déterminer un plan F et une droite G stables par l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à A et supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.

IV.F.2) Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_U : \begin{cases} X' = AX \\ X(0) = U \end{cases}$ lorsque U appartient à G.

IV.F.3) Pour tout $\sigma = (a,b)$ de $\mathbf{R}^2$, on considère le problème de Cauchy $\mathcal{C}_\sigma : \begin{cases} x' = -x + 2y, \\ y' = -2x - y, \\ x(0) = a,\ y(0) = b, \end{cases}$ et $\varphi = (x,y)$ dans $\mathcal{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R}^2)$ l'unique solution de $\mathcal{C}_\sigma$.

Préciser $x'(0)$ et $y'(0)$; montrer que x et y sont solutions d'une même équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants et ainsi en déduire φ en fonction de a et de b.

IV.F.4) Déterminer les trajectoires rectilignes et les trajectoires planes du système différentiel $X' = AX$.