M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Devoir surveillé n°4 (4h)

Intégration sur un intervalle quelconque
Polynômes
Réduction des endomorphismes et des matrices

Samedi 27 novembre 2021

David BLOTTIÈRE

Consignes

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, **les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte**. Vous êtes invité à encadrer les résultats de vos calculs.

Si vous êtes amené à repérer ce qui peut vous sembler être une erreur d'énoncé, vous le signalerez sur votre copie et devrez poursuivre votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

Le sujet comporte cinq exercices indépendants les uns des autres. Vous êtes libre de les traiter dans l'ordre de votre choix.

1 Lemme de Riemann-Lebesgue

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *et intégrable sur* $[0, +\infty[$.

Q1. — Justifier que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ \cos(nt)\ \mathrm{d}t$ converge.

Soit n un nombre entier naturel fixé.

- La fonction
$$\varphi_n \ \left|\ \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & f(t)\ \cos(nt) \end{array}\right.$$
est continue sur $[0, +\infty[$.
- Pour tout $t \in [0, +\infty[$
$$0 \leqslant |\varphi_n(t)| \leqslant |f(t)|\,.$$
L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\ \mathrm{d}t$ est convergente, par hypothèse. Par théorème de domination sur les fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_n(t)\ \mathrm{d}t$ est absolument convergente, donc convergente.

Soit ε *un nombre réel strictement positif.*

Q2. — Justifier qu'il existe un réel $A \geqslant 0$ tel que $\displaystyle\int_A^{+\infty} |f(t)|\ \mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Par hypothèse, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\ \mathrm{d}t$ est convergente et donc

$$\int_a^{+\infty} |f(t)|\ \mathrm{d}t = \underbrace{\int_0^{+\infty} |f(t)|\ \mathrm{d}t}_{\in \mathbf{R}} - \int_0^{a} |f(t)|\ \mathrm{d}t \xrightarrow[a \to +\infty]{} \int_0^{+\infty} |f(t)|\ \mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} |f(t)|\ \mathrm{d}t = 0\,.$$

Par définition de la notion de limite, il existe $A \geqslant 0$ tel que pour tout $a \geqslant A$

$$\int_a^{+\infty} |f(t)| \ \mathrm{d}t = \left| \int_a^{+\infty} |f(t)| \ \mathrm{d}t - 0 \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

En particulier pour $a = A$:

$$\int_A^{+\infty} |f(t)| \ \mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Q3. — Justifier qu'il existe un réel M tel que

$$\forall\, t \in [0, A], \qquad |f'(t)| \leqslant M \ .$$

La fonction f' est continue sur le segment $[0, A]$. D'après le théorème des bornes atteintes, elle est bornée (et elle atteint ses bornes) sur $[0, A]$. Il existe donc un réel M tel que

$$\forall\, t \in [0, A], \qquad |f'(t)| \leqslant M \ .$$

Q4. — Démontrer qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall\, n \geqslant N, \qquad \left| \int_0^A f(t) \ \cos(nt) \ \mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Soit n un nombre entier naturel non nul. Les fonctions $u \colon t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto \dfrac{\sin(nt)}{n}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, A]$. Par intégration par parties

$$\begin{aligned} \int_0^A f(t) \ \cos(nt) \ \mathrm{d}t &= \left[f(t) \ \frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^A - \frac{1}{n} \ \int_0^A f'(t) \sin(nt) \ \mathrm{d}t \\ &= f(A) \ \frac{\sin(nA)}{n} - \frac{1}{n} \ \int_0^A f'(t) \sin(nt) \ \mathrm{d}t \ . \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \left| \int_0^A f(t) \ \cos(nt) \ \mathrm{d}t \right| &\leqslant \left| f(A) \ \frac{\sin(nA)}{n} \right| + \left| \frac{1}{n} \ \int_0^A f'(t) \sin(nt) \ \mathrm{d}t \right| \qquad [\text{inégalité triangulaire}] \\ &\leqslant \left| \frac{f(A)}{n} \right| + \frac{1}{n} \ \int_0^A \underbrace{|f'(t) \sin(nt)|}_{\leqslant M} \ \mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{1}{n} \ (f(A) + MA) \qquad [\text{croissance de l'intégrale}] \ . \end{aligned}$$

Donc pour tout $n \in \mathbf{N}^*$

$$0 \leqslant \left| \int_0^A f(t)\ \cos(nt)\ \mathrm{d}t \right| \leqslant \underbrace{\frac{1}{n}\ \left(f(A) + MA\right)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} .$$

Par théorème d'encadrement, nous en déduisons

$$\int_0^A f(t)\ \cos(nt)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 .$$

D'après la définition de la notion de limite, il existe $N \in \mathbf{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant N$

$$\left| \int_0^A f(t)\ \cos(nt)\ \mathrm{d}t \right| = \left| \int_0^A f(t)\ \cos(nt)\ \mathrm{d}t - 0 \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Q5. — En déduire une démonstration de

$$\int_0^{+\infty} f(t)\ \cos(nt)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 .$$

Ce résultat est appelé *Lemme de Riemann-Lebesgue.*

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la question 2, il existe un réel A tel que

$$\int_A^{+\infty} |f(t)|\ \mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{2} . \tag{1}$$

D'après la question 4, il existe un entier N, dépendant de A *a priori*, tel que

$$\forall\, n \geqslant N, \quad \left| \int_0^A f(t)\ \cos(nt)\ \mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} . \tag{2}$$

Soit n un nombre entier supérieur ou égal à N. Par définition d'une intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} f(t)\ \cos(nt)\ \mathrm{d}t = \int_0^A f(t)\ \cos(nt)\ \mathrm{d}t + \int_A^{+\infty} f(t)\ \cos(nt)\ \mathrm{d}t .$$

L'inégalité triangulaire livre alors

$$\left| \int_0^{+\infty} f(t)\ \cos(nt)\ \mathrm{d}t \right| \leqslant \left| \int_0^A f(t)\ \cos(nt)\ \mathrm{d}t \right| + \left| \int_A^{+\infty} f(t)\ \cos(nt)\ \mathrm{d}t \right| .$$

D'après 2

$$\left| \int_0^{+\infty} f(t)\ \cos(nt)\ \mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \left| \int_A^{+\infty} f(t)\ \cos(nt)\ \mathrm{d}t \right| . \tag{3}$$

Soit B un nombre réel supérieur ou égal à A. On observe

$$\begin{aligned}\left|\int_A^B f(t)\,\cos(nt)\;\mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_A^B \underbrace{|f(t)\,\cos(nt)|}_{\leqslant |f(t)|}\;\mathrm{d}t\\ &\leqslant \int_A^B |f(t)|\;\mathrm{d}t \qquad \text{[croissance de l'intégrale]}\end{aligned}$$

d'où

$$\left|\int_A^B f(t)\,\cos(nt)\;\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_A^B |f(t)|\;\mathrm{d}t. \tag{4}$$

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_A^{+\infty} f(t)\,\cos(nt)\;\mathrm{d}t$ et l'intégrale $\displaystyle\int_A^{+\infty} |f(t)|\;\mathrm{d}t$ sont convergentes, les limites de chacun des termes de 4 existent et sont finies lorsque B tend vers $+\infty$. Par passage à la limite dans une inégalité large

$$\left|\int_A^{+\infty} f(t)\,\cos(nt)\;\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_A^{+\infty} |f(t)|\;\mathrm{d}t.$$

Donc d'après 1

$$\left|\int_A^{+\infty} f(t)\,\cos(nt)\;\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\;. \tag{5}$$

De 3 et 5, nous déduisons alors

$$\left|\int_0^{+\infty} f(t)\,\cos(nt)\;\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon\;.$$

Nous avons donc démontré

$$\forall\,\varepsilon > 0, \quad \exists\,N \in \mathbf{N}, \quad \forall\,n \geqslant N, \quad \left|\int_0^{+\infty} f(t)\,\cos(nt)\;\mathrm{d}t - 0\right| \leqslant \varepsilon$$

ce qui est la définition formelle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\cos(nt)\;\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

Remarques.

1. La méthode de « découpage » appliquée ici n'est pas sans rappeler la démonstration du théorème de Césàro présentée en classe. L'analogie est même frappante. On commence par contrôler la queue de l'intégrale (ou la queue de la somme) et on fait ensuite tendre n vers $+\infty$ pour rendre aussi petite que l'on souhaite la première portion d'aire (ou la somme des premiers termes).

2. Le lemme de Riemann-Lebesgue vaut en fait pour toute fonction intégrale sur $[0,+\infty[$. L'hypothèse de régularité $\mathcal{C}^1$ n'est pas nécessaire pour la validité du résultat (mais elle nous a permis de donner une preuve simple, par intégrations par parties). Pour le démontrer sans l'hypothèse de régularité $\mathcal{C}^1$, on peut utiliser un résultat de densité des fonctions en escalier sur un segment. Nous y reviendrons.
3. Le lemme de Riemann-Lebesgue a un lien très étroit avec la transformée de Fourier et les séries de Fourier, donnant une information sur l'asymptotique en $+\infty$.

2 Reste d'une division euclidienne et diagonalisablité

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soient A, B deux éléments de $\mathbf{R}_n[X]$ premiers entre eux. On suppose, en outre, que le polynôme B de degré $p \in \mathbf{N}^*$ est scindé à racines simples sur $\mathbf{R}$ et on note $x_1, \ldots, x_p$ ses racines. Soit l'application Φ définie par

$$\Phi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & \text{le reste de la division euclidienne de } AP \text{ par } B \end{array} \right. .$$

Q6. — Démontrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$. Est-ce un automorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$?

- Soit $P \in \mathbf{R}_n[X]$. Le reste de la division euclidienne de AP par B est un polynôme de degré strictement plus petit que $\deg(B) = p$. Comme $\deg(B) \leqslant n$, le polynôme $\Phi(P)$ est de degré inférieur ou égal à n. Donc l'application Φ est bien définie.
- Soient P_1 et P_2 deux polynômes de $\mathbf{R}_n[X]$. Soient λ_1 et λ_2 dans $\mathbf{R}$. Les divisions euclidiennes de AP_1 et AP_2 par B s'écrivent

  $$AP_1 = BQ_1 + R_1 \qquad \text{et} \qquad AP_2 = BQ_2 + R_2$$

  où $Q_1, Q_2, R_1 = \Phi(P_1), R_2 = \Phi(P_2) \in \mathbf{R}[X]$ et $\deg(R_1) < \deg(B)$ et $\deg(R_2) < \deg(B)$. Nous en déduisons

  $$A(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = B\,\underbrace{(\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2)}_{Q} + \underbrace{\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2}_{R}\,. \tag{6}$$

  Clairement Q et R appartiennent à $\mathbf{R}[X]$. De plus

  $$\deg(R) \leqslant \max\left(\deg(\lambda_1) + \deg(R_1), \deg(\lambda_2) + \deg(R_2)\right)\ .$$

  Comme pour $k \in \{1,2\}$, $\deg(\lambda_k) \leqslant 0$ et $\deg(R_k) < \deg(B)$, nous en déduisons que $\deg(R)$ est strictement inférieur à $\deg(B)$. L'identité 6 est donc la division euclidienne de $A(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)$. Ainsi :

  $$\Phi(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = R = \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 = \lambda_1 \Phi(P_1) + \lambda_2 \Phi(P_2).$$

  L'application Φ est donc linéaire.
- L'application Φ n'est pas un automorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$ car $\Phi(B) = 0$ (AB est divisible par B) et $B \neq 0$. Son noyau n'est pas trivial et donc l'application n'est pas injective.

Q7. — Démontrer que 0 est une valeur propre de Φ et déterminer une base du sous-espace propre $E_0(\Phi)$ associé.

- Nous avons déjà remarqué que $\Phi(B)=0$ et que $B\neq 0$. Donc 0 est valeur propre de Φ (et B est un vecteur propre associé à cette valeur propre).
- Le sous-espace propre $E_0(\Phi)$ coïncide avec $\mathrm{Ker}(\Phi)$. Nous déterminons ce sous-espace vectoriel, en raisonnant par analyse-synthèse.
  — ***Analyse.*** Soit $P\in\mathbf{R}_n[X]$ tel que $\Phi(P)=0$. Alors il existe $Q\in\mathbf{R}[X]$ tel que $AP=BQ$. Comme A et B sont premiers entre eux, le théorème de Gauß nous permet d'en déduire que B divise P. Il existe donc un polynôme $P_1\in\mathbf{R}[X]$ tel que $P=BP_1$. En considérant les degrés, il vient
  $$\deg(P_1)=\underbrace{\deg(P)}_{\leqslant n}-\underbrace{\deg(B)}_{=p}\leqslant n-p\ .$$
  Ainsi existe-t-il des nombres réels $a_0,a_1,\ldots,a_{n-p}$ tels que $P_1=\sum_{k=0}^{n-p}a_kX^k$, d'où $P=\sum_{k=0}^{n-p}a_kBX^k$.
  Nous avons donc établi
  $$E_0(\Phi)\subset\mathrm{Vect}\left(B,BX,\ldots,BX^{n-p}\right)\ .$$
  — ***Synthèse.*** Les polynômes $AB,ABX,\ldots,ABX^{n-p}$ sont multiples de B. Ils ont donc un reste nul dans la division euclidienne par B. Par suite les polynômes $B,BX,\ldots,BX^{n-p}$ appartiennent au sous-espace vectoriel $E_0(\Phi)=\mathrm{Ker}(\Phi)$. Par minimalité d'un sous-espace vectoriel engendré, il vient
  $$\mathrm{Vect}\left(B,BX,\ldots,BX^{n-p}\right)\subset E_0(\Phi)\ .$$
  — ***Conclusion.*** $E_0(\Phi)=\mathrm{Vect}(B,BX,\ldots,BX^{n-p})$.
- D'après ce qui précède, la famille $(B,BX,\ldots,BX^{n-p})$ engendre le sous-espace vectoriel $E_0(\Phi)$. Les polynômes $B,BX,\ldots,BX^{n-p}$ ont pour degrés respectifs $p<p+1<\ldots<n$. Comme ils sont échelonnés en degré, ils forment une famille libre. Ainsi a-t-on établi que la famille $(B,BX,\ldots,BX^{n-p})$ est une base de $E_0(\Phi)$. Ce sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_n[X]$ est donc de dimension $(n-p+1)$.

Q8. — Démontrer que, pour chaque $k\in[\![1,p]\!]$

$$P_k=\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant p\\ j\neq k}}(X-x_j)$$

est un vecteur propre de Φ, associé à une valeur propre α_k non nulle que l'on explicitera.

Soit $k\in[\![1,p]\!]$. Le polynôme P_k étant non nul, il reste à démontrer qu'il existe un réel α_k tel que $\Phi(P_k)=\alpha_k\,P_k$. Nous procédons par analyse-synthèse.

- ***Analyse.*** Supposons qu'un tel α_k existe. Alors il existe $Q_k\in\mathbf{R}[X]$ tel que

$$AP_k=Q_kB+\alpha_k\,P_k\ . \tag{7}$$

Comme B est scindé à racines simples sur $\mathbf{R}$ et que ses racines réelles sont $x_1, \ldots, x_p$

$$B = \mathrm{Dom}(B) \prod_{1 \leqslant j \leqslant p} (X - x_j) = \mathrm{Dom}(B) \ (X - x_k) \ P_k \ .$$

Alors 7 s'écrit

$$AP_k = Q_k \, \mathrm{Dom}(B) \ (X - x_k) \ P_k + \alpha_k \ P_k \ . \tag{8}$$

Comme $\mathbf{R}[X]$ est un anneau intègre, c'est un anneau régulier. Donc 8 livre

$$A = Q_k \ \mathrm{Dom}(B) \ (X - x_k) + \alpha_k \ .$$

En spécialisant cette identité en $X \leftarrow x_k$, il vient $A(x_k) = \alpha_k$. Puisque x_k est racine de B et $A \wedge B = 1$, x_k n'est pas racine de A et donc $A(x_k) \neq 0$.

- *Synthèse.* Démontrons que $\Phi(P_k) = A(x_k) \ P_k$. Le nombre réel x_k est racine du polynôme $A - A(x_k)$. Le polynôme $X - x_k$ divise donc le polynôme $A - A(x_k)$, i.e. il existe un polynôme $Q_k \in \mathbf{R}[X]$ tel que

$$A - A(x_k) = Q_k \ (X - x_k) \ .$$

Nous en déduisons

$$AP_k = \underbrace{\frac{Q_k}{\mathrm{Dom}(B)}}_{\in \mathbf{R}[X]} \underbrace{\mathrm{Dom}(B) \ (X - x_k) \ P_k}_{B} + A(x_k) \ P_k \ . \tag{9}$$

Comme $A(x_k) \ P_k$ est un polynôme à coefficients réels de degré $p - 1 < p = \deg(B)$, 9 est la division euclidienne de AP_k par B et donc $\Phi(P_k) = A(x_k) \ P_k$.

Nous avons démontré que P_k est un vecteur propre de Φ, pour la valeur propre $\alpha_k := A(x_k) \neq 0$.

Q9. — Démontrer que $(P_1, \ldots, P_p)$ est une base de $\mathbf{R}_{p-1}[X]$.

La famille $(P_1, \ldots, P_p)$ comporte $p = \dim(\mathbf{R}_{p-1}[X]) < \infty$ éléments de $\mathbf{R}_{p-1}[X]$ (les polynômes $P_1, \ldots, P_p$ ont tous degré $p - 1$). Il suffit donc de prouver que la famille $(P_1, \ldots, P_p)$ est libre pour établir qu'elle forme une base de $\mathbf{R}_{p-1}[X]$.

Nous remarquons que les polynômes $P_1, \ldots, P_p$ sont, au coefficient dominant près, des polynômes interpolateurs de Lagrange aux points $x_1, \ldots, x_p$, ce qui nous fournit une approche pour établir la liberté de la famille $(P_1, \ldots, P_p)$.

Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des nombres réels tels que

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \ P_k = 0 \ . \tag{10}$$

Soit $\ell \in [\![1, p]\!]$. On remarque que

$$P_k(x_\ell) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant p \\ j \neq k}} (x_\ell - x_j) = 0 & \text{si } k \neq \ell \\ \displaystyle\prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant p \\ j \neq \ell}} (x_\ell - x_j) \neq 0 & \text{si } k = \ell\ . \end{cases}$$

En spécialisant 10 en $X \leftarrow x_\ell$, il vient

$$\lambda_\ell \underbrace{P_\ell(x_\ell)}_{\neq 0} = 0$$

puis $\lambda_\ell = 0$.

Puisque $\lambda_\ell = 0$ pour tout $\ell \in [\![1, p]\!]$, la famille $(P_1, \ldots, P_p)$ est libre.

Q10. — Justifier que $E_0(\Phi) \oplus \mathrm{Vect}(P_1, \ldots, P_p) = \mathbf{R}_n[X]$ et en déduire que Φ est diagonalisable.

- Démontrons que les deux espaces $E_0(\Phi)$ et $\mathrm{Vect}(P_1, \ldots, P_p)$ sont en somme directe.

  Soit $Q \in E_0(\Phi) \cap \mathrm{Vect}(P_1, \ldots, P_p)$. Comme Q appartient à $\mathrm{Vect}(P_1, \ldots, P_p)$, il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que

  $$Q = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k P_k\ . \tag{11}$$

  Comme $Q \in E_0(\Phi) = \mathrm{Ker}(\Phi)$, $\Phi(Q) = 0$. Ensuite, d'après 11 et la question **Q8**

  $$0 = \Phi(Q) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \Phi(P_k) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k A(x_k)\ P_k\ .$$

  D'après la question **Q9**, la famille $(P_1, \ldots, P_p)$ est libre et donc

  $$\forall k \in [\![1, p]\!], \qquad \lambda_k A(x_k) = 0\ .$$

  Comme pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $A(x_k) \neq 0$ nous en déduisons

  $$\forall k \in [\![1, p]\!], \qquad \lambda_k = 0\ .$$

  Donc $Q = 0$. Les deux espaces $E_0(\Phi)$ et $\mathrm{Vect}(P_1, \ldots, P_p)$ sont donc en somme directe.
- D'après la formule de Grassmann, le sous-espace vectoriel $E_0(\Phi) \oplus \mathrm{Vect}(P_1, \ldots, P_p)$ de $\mathbf{R}_n[X]$ a pour dimension

  $$\begin{aligned} \dim(E_0(\Phi) \oplus \mathrm{Vect}(P_1, \ldots, P_p)) &= \underbrace{\dim(E_0(\Phi))}_{=n-p+1 \text{ d'après } \mathbf{Q7}} + \underbrace{\dim(\mathrm{Vect}(P_1, \ldots, P_p))}_{=p \text{ d'après } \mathbf{Q9}} \\ &= n+1 \\ &= \dim(\mathbf{R}_n[X]) < \infty\ . \end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$E_0(\Phi) \oplus \mathrm{Vect}(P_1, \ldots, P_p) = \mathbf{R}_n[X] \,. \tag{12}$$

- Nous savons que $(B, BX, \ldots, BX^{n-p})$ est une base de $E_0(\Phi)$ (**Q7**) et que $(P_1, \ldots, P_p)$ est une base de $\mathrm{Vect}(P_1, \ldots, P_p)$ (**Q9**). D'après 12, la famille

$$\left(B, BX, \ldots, BX^{n-p}, P_1, \ldots, P_p\right)$$

est une base de $\mathbf{R}_n[X]$. Comme tous les vecteurs $B, BX, \ldots, BX^{n-p}, P_1, \ldots, P_p$ sont propres pour Φ (questions **Q7** et **Q8**), nous en déduisons que Φ est diagonalisable.
Dans cette base la matrice de Φ est la matrice diagonale

$$\mathrm{Diag}\left(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-p+1}, \underbrace{A(x_1)}_{\neq 0}, \ldots, \underbrace{A(x_p)}_{\neq 0}\right) .$$

3 Polynômes de Tchebychev

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit la fonction f_n par :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [-1\,;\,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \cos(n\ \arccos(x)) \end{array} \right. .$$

Q11. — Calculer f_0, f_1, f_2 et f_3.

- On commence par rappeler que la fonction $\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi]$ est la fonction réciproque de la fonction bijective :

$$\cos_{|[0,\pi]}^{[-1,1]} \left| \begin{array}{ccc} [0,\pi] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array} \right. .$$

Donc pour tout $y \in [-1,1]$:

$$\arccos(y) \text{ est l'unique } x \in [0,\pi] \text{ tel que } \cos(x) = y.$$

En particulier, pour tout $y \in [-1,1]$, $\cos(\arccos(y)) = y$.
- Soit $y \in [-1,1]$.

$$f_0(y) = \cos(0 \times \arccos(y)) = \cos(0) = 1$$

$$f_1(y) = \cos(1 \times \arccos(y)) = \cos(\arccos(y)) = y$$

$$f_2(y) = \cos(2\arccos(y)) = 2\cos^2(\arccos(y)) - 1 = 2y^2 - 1$$

- Pour calculer f_2, nous avons exprimé $\cos(2x)$ à l'aide d'un polynôme en $\cos(x)$, pour $x \in \mathbf{R}$. Pour le calcul de f_3, nous allons d'abord chercher à exprimer $\cos(3x)$ à l'aide d'un polynôme en $\cos(x)$, pour $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}
\cos(3x) &= \mathbf{Re}\left(e^{i3x}\right) \\
&= \mathbf{Re}\left(\left(e^{ix}\right)^3\right) \\
&= \mathbf{Re}\left((\cos(x) + i\sin(x))^3\right) \\
&= \mathbf{Re}\left(\cos^3(x) + 3i\cos^2(x)\sin(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) - i\sin^3(x)\right) \\
&= \cos^3(x) - 3\cos(x)\left(1 - \cos^2(x)\right) \\
&= 4\cos^3(x) - 3\cos(x)
\end{aligned}$$

Soit $y \in [-1, 1]$.

$$f_3(y) = \cos(3\arccos(y)) = 4\cos^3(\arccos(y)) - 3\cos(\arccos(y)) = 4y^3 - 3y$$

- Conclusion : pour tout $y \in [-1, 1]$:

$$f_0(y) = 1 \qquad f_1(y) = y \qquad f_2(y) = 2y^2 - 1 \qquad f_3(y) = 4y^3 - 3y\ .$$

Q12. — Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in [-1\ ;\ 1]$. Exprimer $f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x)$ en fonction de $f_n(x)$.

- Commençons par quelques rappels de trigonométrie. Pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2$:

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad \text{et} \quad \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

d'où :

$$2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b).$$

Soit $(u, v) \in \mathbf{R}^2$. Appliquons la dernière identité avec $a = \dfrac{u+v}{2}$ et $b = \dfrac{u-v}{2}$.

$$(\star) \qquad \cos(u) + \cos(v) = 2\cos\left(\frac{u+v}{2}\right)\cos\left(\frac{u-v}{2}\right).$$

- Nous déduisons de $(\star)$:

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) &= \cos((n+1)\arccos(x)) + \cos((n-1)\arccos(x)) \\
&= 2\cos(n\arccos(x))\cos(\arccos(x)) \\
&= 2x f_n(x).
\end{aligned}$$

Donc $f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) = 2x f_n(x)$.

Q13. — Soient $n \in \mathbf{N}$. Démontrer qu'il existe un unique polynôme T_n de $\mathbf{R}[X]$ dont la fonction polynomiale associée coïncide avec f_n sur $[-1\ ;\ 1]$.

- *1ère solution pour l'existence*
  Nous raisonnons par récurrence à deux pas, en exploitant la relation de récurrence obtenue en **Q12**.
  — *Définition du prédicat.* Pour tout $n \in \mathbf{N}$, nous définissons le prédicat $\mathcal{P}(n)$ en la variable n

par :

$$\mathcal{P}(n) \quad : \quad \text{il existe un polynôme } T_n \text{ de } \mathbf{R}[X] \text{ dont la fonction polynomiale associée coïncide avec } f_n \text{ sur } [-1\,;\,1]$$

— ***Initialisation à*** $n=0$ ***et à*** $n=1$. D'après **Q11**, pour tout $x \in [-1,1]$, $f_0(x)=1$ et $f_1(x)=x$. Donc en posant $T_0=1$ et $T_1=X$, nous établissons que $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.

— Hérédité
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1 tel que $\mathcal{P}(n-1)$ et $\mathcal{P}(n)$ sont vraies. Ainsi existe-t-il $T_{n-1}, T_n \in \mathbf{R}[X]$ tels que :

$$\forall\, x \in [-1,1], \quad f_{n-1}(x) = T_{n-1}(x) \ \text{ et } \ f_n(x) = T_n(x).$$

D'après **Q12** et l'hypothèse de récurrence,

$$\forall\, x \in [-1,1], \quad f_{n+1}(x) = 2xf_n(x) - f_{n-1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Donc si nous posons :

$$T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1} \in \mathbf{R}[X]$$

alors :

$$\forall\, x \in [-1,1], \quad f_{n+1}(x) = T_{n+1}(x).$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

— *Conclusion.* D'après l'initialisation à $n=0$ et $n=1$, l'hérédité et l'axiome de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe un polynôme T_n de $\mathbf{R}[X]$ dont la fonction polynomiale associée coïncide avec f_n sur $[-1\,;\,1]$.

- ***2ème solution pour l'existence***
Nous généralisons l'approche choisie pour expliciter f_3 en **Q11**.
— Rappel sur la décomposition d'une somme suivant les termes d'indices pairs et les termes d'indices impairs
Si n est un entier naturel non nul, si $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des éléments d'un groupe abélien $(G,+)$:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{E(n/2)} a_{2k} + \sum_{k=0}^{E((n-1)/2)} a_{2k+1}.$$

— D'après **Q11**, $T_0 = 1 \in \mathbf{R}[X]$ convient. Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\cos(nx) &= \mathbf{Re}\left(e^{inx}\right) \\
&= \mathbf{Re}\left(\left(e^{ix}\right)^n\right) \\
&= \mathbf{Re}\left((\cos(x) + i\sin(x))^n\right) \\
&= \mathbf{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \sin^k(x)\cos^{n-k}(x)\right)
\end{aligned}$$

Ce dernier terme égale la partie réelle de :

$$\sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k} i^{2k} \sin^{2k}(x) \cos^{n-2k}(x) + \sum_{k=0}^{E((n-1)/2)} \binom{n}{2k+1} i^{2k+1} \sin^{2k+1}(x) \cos^{n-2k-1}(x)$$

qui est aussi la partie réelle de :

$$\sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k} (-1)^k \sin^{2k}(x) \cos^{n-2k}(x) + i \sum_{k=0}^{E((n-1)/2)} \binom{n}{2k+1} (-1)^k \sin^{2k+1}(x) \cos^{n-2k-1}(x)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \cos(nx) &= \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k} (-1)^k \sin^{2k}(x) \cos^{n-2k}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k} (-1)^k (1-\cos^2(x))^k \cos^{n-2k}(x) \end{aligned}$$

Donc si on pose :

$$T_n := \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k} (-1)^k (1-X^2)^k X^{n-2k} \in \mathbf{R}[X]$$

il vient, pour tout $x \in [-1, 1]$:

$$\begin{aligned} T_n(y) &= \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k} (-1)^k (1-y^2)^k y^{n-2k} \\ &= \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k} (-1)^k (1-\cos^2(\arccos(y))^k \cos^{n-2k}(\arccos(y)) \\ &= \cos(n\ \arccos(y)) \\ &= f_n(y). \end{aligned}$$

Donc le polynôme T_n précédemment défini convient.

- ***Unicité***
  Soit $n \in \mathbf{N}$. Soient $P_n, Q_n \in \mathbf{R}[X]$ tels que :

$$\forall\, x \in [-1, 1], \quad P_n(x) = f_n(x) = Q_n(x).$$

Alors tout élément de $[-1, 1]$ est racine du polynôme $P_n - Q_n$. Le polynôme $P_n - Q_n$ possède une infinité de racines ; il est donc nul. Ainsi $P_n = Q_n$.
Le polynôme T_n est donc unique.

- *Conclusion.* Pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe un unique polynôme T_n de $\mathbf{R}[X]$ dont la fonction polynomiale associée coïncide avec f_n sur $[-1\ ;\ 1]$. En outre, il ressort de notre démonstration que :
$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$$
et
$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \qquad T_n = \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k} (-1)^k (1-X^2)^k X^{n-2k}$$
cette dernière identité valant aussi pour $n = 0$.

Q14. — Soient $n \in \mathbf{N}$. Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme T_n.

- Comme $T_0 = 1$, le polynôme T_0 est de degré 0 et de coefficient dominant 1.
- *Conjecture*
Nous déduisons de **Q11**
$$T_1 = X \qquad T_2 = 2X^2 - 1 \qquad T_3 = 4X^3 - 3X.$$
Ainsi, conjecturons nous :
$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \qquad \deg(T_n) = n \ \text{ et } \ \mathrm{Dom}(T_n) = 2^{n-1}.$$
- *1ère solution*
Nous exploitons la relation de récurrence :
$$(\star) \qquad \forall n \in \mathbf{N}^*, \qquad T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$$
établie à la question précédente pour démontrer la conjecture. Nous raisonnons par récurrence à deux pas.
— ***Définition du prédicat.***
Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, nous définissons le prédicat $\mathcal{P}(n)$ en la variable n par :
$$\mathcal{P}(n) \quad : \quad \deg(T_n) = n \ \text{ et } \ \mathrm{Dom}(T_n) = 2^{n-1}.$$
— ***Initialisation à $n = 1$ et à $n = 2$.***
Nous savons $T_1 = X$ et $T_2 = 2X^2 - 1$. Donc $\deg(T_1) = 1$, $\mathrm{Dom}(T_1) = 1$, $\deg(T_2) = 2$, $\mathrm{Dom}(T_1) = 2$. Donc $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies.
— ***Hérédité.***
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 tel que $\mathcal{P}(n-1)$ et $\mathcal{P}(n)$ sont vraies. Ainsi :
$$\deg(T_{n-1}) = n-1 \qquad \mathrm{Dom}(T_{n-1}) = 2^{n-2} \qquad \deg(T_n) = n \qquad \mathrm{Dom}(T_n) = 2^{n-1}.$$
Donc il existe $R_{n-1} \in \mathbf{R}_{n-2}[X]$ et $R_n \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$ tels que :
$$T_{n-1} = 2^{n-2}X^{n-1} + R_{n-1} \qquad T_n = 2^{n-1}X^n + R_n.$$

D'après la relation de récurrence $(\star)$:

$$T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1} = 2^n X^{n+1} + \underbrace{2XR_n}_{\deg \leqslant n < n+1} - \underbrace{2^{n-2}X^{n-1}}_{\deg = n-1 < n+1} - \underbrace{R_{n-1}}_{\deg \leqslant n-2 < n+1}.$$

Nous en déduisons : $\deg(T_{n+1}) = n+1$ et $\mathrm{Dom}(T_{n+1}) = 2^n$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

— *Conclusion.*
D'après l'initialisation à $n=1$ et $n=2$, l'hérédité et l'axiome de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\deg(T_n) = n$ et $\mathrm{Dom}(T_n) = 2^{n-1}$.

- $2^{\text{ème}}$ solution
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Nous nous appuyons sur l'identité :

$$T_n = \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k} (-1)^k \underbrace{(1-X^2)^k X^{n-2k}}_{\deg = n\,,\, \mathrm{Dom} = (-1)^k}$$

établie à la question **Q13**. Nous en déduisons que $\deg(T_n) \leqslant n$ et que le coefficient de degré n de T_n est :

$$c_n := \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k} (-1)^k (-1)^k = \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k}.$$

D'après le rappel sur la décomposition d'une somme suivant les termes d'indices pairs et les termes d'indices impairs :

$$\begin{aligned}
2^n = (1+1)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k} + \sum_{k=0}^{E((n-1)/2)} \binom{n}{2k+1} \\
0^n = (1+(-1))^n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{E(n/2)} (-1)^{2k} \binom{n}{2k} + \sum_{k=0}^{E((n-1)/2)} (-1)^{2k+1} \binom{n}{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k} - \sum_{k=0}^{E((n-1)/2)} \binom{n}{2k+1}
\end{aligned}$$

En sommant membre à membre ces deux identités, il vient :

$$2^n = 2 \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k} = 2c_n.$$

Comme $c_n \neq 0$ et $\deg(T_n) \leqslant n$, $\deg(T_n) = n$ et son coefficient dominant est $\dfrac{2^n}{2} = 2^{n-1}$.

- *Conclusion.* Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\deg(T_n) = n$ et $\mathrm{Dom}(T_n) = 2^{n-1}$.

Q15. — Soient $n \in \mathbf{N}^*$. Démontrer que le polynôme T_n possède n racines réelles deux-à-deux distinctes, toutes dans $]-1\,;\,1[$. On explicitera ces n racines.

- Le polynome T_n est de degré n. Il possède donc au plus n racines réelles.
- Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, posons :
$$x_k := \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}.$$
Nous observons :
$$0 < x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < \pi.$$
La fonction $\cos$ étant strictement décroissante sur l'intervalle $[0; \pi]$, nous en déduisons :
$$-1 < \cos(x_{n-1}) < \ldots < \cos(x_1) < \cos(x_0) < 1.$$
Les nombres $\cos(x_k)$, $k \in [\![0, n-1]\!]$, sont donc deux-à-deux distincts.

- Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$.
$$\begin{array}{rcll} T_n(\cos(x_k)) & = & f_n(\cos(x_k)) & [\cos(x_k) \in [-1,1]] \\ & = & \cos(n\ \arccos(\cos(x_k))) & \\ & = & \cos(n\ x_k) & [\forall\, x \in [0,\pi],\ \arccos(\cos(x)) = x \text{ et } x_k \in [0,\pi]] \\ & = & \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right) & \\ & = & 0. & \end{array}$$
Donc les n réels $\cos(x_0), \ldots, \cos(x_{n-1}), \cos(x_n)$ deux-à-deux distincts, appartenant à $]-1; 1[$, sont racines de T_n.
- *Conclusion.* Le polynôme T_n possède n racines réelles distinctes, toutes comprises dans l'intervalle $]-1; 1[$. Il s'agit des nombres $\cos\left(\dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}\right)$ où $k \in [\![0, n-1]\!]$.

4 Calcul de $\zeta(2)$ à l'aide de cotangentes [E3A-PSI-2016]

Soit n un entier naturel non nul.

Q16. — Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. Déterminer, s'ils existent, module et argument du nombre complexe $u = 1 + e^{i\theta}$.

On écrit :
$$u = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$$
On distingue alors trois cas.
- Si $\theta \in [0, \pi[$ alors $\cos(\theta/2) > 0$. On a alors $|u| = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\arg(u) = \frac{\theta}{2}$.
- Si $\theta = \pi$ alors $u = 0$. Le module est nul et la notion argument non définie.
- Si $\theta \in]\pi, 2\pi[$ alors $\cos(\theta/2) < 0$. On a alors $|u| = -2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\arg(u) = \pi + \frac{\theta}{2}$.

On note P_n le polynôme de $\mathbf{C}[X]$ défini par :
$$P_n(X) = \frac{1}{2i}\left((X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}\right)\ .$$

Q17. — Déterminer les polynômes P_1 et P_2.

Le calcul donne :
$$P_1 = 3X^2 - 1 \ \text{ et } \ P_2 = 5X^4 - 10X^2 + 1.$$

Q18. — Vérifier que $P_1 \in \mathbf{R}_2[X]$ et que $P_2 \in \mathbf{R}_4[X]$. Sont-il irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$?

Il est immédiat que P_1 est de degré 2 et P_2 de degré 4. A fortiori, on a $P_1 \in \mathbf{R}_2[X]$ et $P_2 \in \mathbf{R}_4[X]$. Les irréductibles de $\mathbf{R}[X]$ étant les polynômes de degré 1 et ceux de degré 2 sans racine réelle (ou encore à discriminant négatif), ni P_1 (qui admet $\frac{1}{\sqrt{3}}$ comme racine) ni P_2 (qui est de degré 4) ne sont irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$.

Q19. — Montrer que $P_n \in \mathbf{C}_{2n}[X]$. Donner son degré et son coefficient dominant.

P_n est différence de deux polynômes de degré $2n+1$ et est donc dans $C_{2n+1}[X]$. Le coefficient de X^{2n+1} dans P_n est :
$$\frac{1}{2i}(1-1) = 0$$
et donc $P \in \mathbf{C}_{2n}[X]$. Le coefficient de X^{2n} dans P_n est :
$$\frac{1}{2i}\left((2n+1)i - (2n+1)(-i)\right) = 2n+1 \neq 0$$
Ainsi, P_n est de degré $2n$ et son coefficient dominant est $2n+1$.

Q20. — Soit $N \in \mathbf{N}^*$. Donner l'expression des racines N-ièmes de l'unité.

Les racines N-ièmes de l'unité sont les complexes :
$$e^{\frac{2ik\pi}{N}} \ \text{ pour } \ k = 0, \ldots, N-1.$$

Q21. — Calculer $P_n(i)$.

On a :
$$P_n(i) = \frac{(2i)^{2n+1}}{2i} = 2^{2n}(-1)^n.$$

Q22. — Prouver par un argument géométrique que les racines de P_n sont réelles.

Soit a une racine de P_n. De $P_n(a)=0$, on déduit :

$$|a+i| = |a-i|\,.$$

Les racines de P_n sont à égale distance de i et $-i$, donc sur la médiatrice du segment $[-i,i]$, i.e. l'axe des réels.

Q23. — Soit $a \in \mathbf{C}$. Prouver l'équivalence :

$$a \text{ est racine de } P_n \iff \exists\, k \in [\![1,2n]\!],\ a\left(e^{2ik\pi/(2n+1)}-1\right) = i\left(e^{2ik\pi/(2n+1)}+1\right).$$

Supposons que a soit racine de P_n. On a alors $a \neq i$ et $\left(\frac{a+i}{a-i}\right)^{2n+1} = 1$. Il existe donc $k \in [\![0,2n+1]\!]$ tel que :

$$\frac{a+i}{a-i} = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}$$

et donc (produit en croix) :

$$a(e^{2ik\pi/(2n+1)}-1) = i(e^{2ik\pi/(2n+1)}+1).$$

On remarque alors que $k \neq 0$ car pour $k=0$ la relation précédente est fausse ($0 \neq i$).
Réciproquement, si $a(e^{2ik\pi/(2n+1)}-1) = i(e^{2ik\pi/(2n+1)}+1)$ avec $k \in [\![1,2n]\!]$, on a $(a+i) = (a-i)e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}$. En élevant à la puissance $2n+1$ on trouve que $(a+i)^{2n+1} = (a-i)^{2n+1}$ et donc que $P_n(a)=0$.

Q24. — Déterminer les racines du polynôme P_n. Vérifier alors le résultat de **Q22**.

Les racines de P_n sont donc les

$$a_k = \frac{i(e^{2ik\pi/(2n+1)}+1)}{(e^{2ik\pi/(2n+1)}-1)} = i\frac{2\cos(k\pi/(2n+1))}{2i\sin(k\pi/(2n+1))} = \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

pour $k = 1,\dots,2n$. On trouve bien des récines toutes réelles.

Remarque : cotan *étant bijective de* $]0,\pi[$ *dans* $\mathbf{R}$ *et les* $2k\pi/(2n+1)$ *étant dans* $]0,\pi[$*, les* a_k *sont 2 à 2 distincts. Il y en a* $2n$ *et* P_n *est de degré* $2n$*. On a donc* $2n$ *racines simples et* P_n *est scindé simple sur* $\mathbf{R}[X]$.

Q25. — En développant P_n, démontrer qu'il existe un unique polynôme Q_n de degré n et à coefficients réels tel que :

$$P_n(X) = Q_n\left(X^2\right).$$

Prouvons d'abord l'existence d'un tel polynôme Q_n. On développe les deux puissances par formule du binôme et on regroupe les termes :

$$2iP_n(X) = \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}X^k i^{2n+1-k}(1-(-1)^{2n+1-k})$$

Les termes d'indice k pairs sont nuls. Il reste donc :

$$2iP_n(X) = 2\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}X^{2k}i^{2n+1-2k} = 2i\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}(-1)^{n-k}X^{2k}$$

On en déduit que :

$$P_n(X) = Q_n(X^2) \text{ avec } Q_n(X) = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}(-1)^{n-k}X^k.$$

Passons à l'unicité. Soient $Q_{n,1}(X)$ et $Q_{n,2}(X)$ deux polynômes de degré n à coefficients réels tels que $P_n(X) = Q_{n,1}(X^2)$ et $P_n(X) = Q_{n,2}(X^2)$. Soit $x \in \mathbf{R}^+$.

$$Q_{n,1}(x) - Q_{n,2}(x) = P_n(\sqrt{x}) - P_n(\sqrt{x}) = 0.$$

Le polynôme $Q_{n,1}(X) - Q_{n,2}(X)$ possède une infinité de racines. Il est donc nul.

Q26. — Expliciter Q_1 et Q_2 et déterminer leurs racines respectives.

D'après **Q19** et la question précédente :

$$Q_1 = 3\left(X - \frac{1}{3}\right) \text{ et } Q_2 = 5X^2 - 10X + 1 = 5\left(X - \frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right)\left(X - \frac{5-2\sqrt{5}}{5}\right).$$

La factorisation donne les racines.

Q27. — Déterminer les racines de Q_n en fonction de celles de P_n.

Si a est racine de P_n alors a^2 est racine de Q_n. En particulier, on a les racines

$$\mathrm{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

pour $k = 1, \ldots, n$. Ces racines sont distinctes car les a_k sont distincts et positifs pour ces valeurs de k (les carrés sont donc aussi distincts). Ceci donne n racines distinctes de Q_n qui est de degré n et donc toutes les racines.

Q28. — On pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}.$$

En utilisant des résultats obtenus à la question précédente, montrer que $S_n = \dfrac{n(2n-1)}{3}$.

S_n est la somme des racines b_k de Q_n qui est scindé à racines simples et s'écrit (son coefficient dominant est celui de P_n) :

$$Q_n = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}(X-b_k) = (2n+1)\left(X^n - \sum_{k=1}^{n} b_k X^{n-1} + \cdots + (-1)^n b_1 \ldots b_n\right).$$

On voit que l'on a besoin du coefficient de X^{n-1} dans Q_n qui vaut $-\binom{2n+1}{2n-2}$. On a ainsi :

$$S_n = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{2n-2} = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{3} = \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{6(2n+1)} = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

Q29. — Démontrer les inégalités suivantes :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,\ 0 \leqslant \sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x).$$

En déduire :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \frac{1}{\tan^2(x)} \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant 1 + \frac{1}{\tan^2(x)}$$

Prouvons d'abord l'inégalité de gauche. Soit la fonction $f\colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbf{R}\ ;\ x \mapsto x - \sin(x)$. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$f'(x) = 1 - \cos(x) \geqslant 0.$$

La fonction f est donc croissante sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Donc pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$f(x) = x - \sin(x) \geqslant f(0) = 0$$

d'où :

$$\sin(x) \leqslant x.$$

Passons à l'inégalité de droite. Soit la fonction $g\colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbf{R}\ ;\ x \mapsto \tan(x) - x$. La fonction g est dérivable sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$g'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 \geqslant 0.$$

La fonction g est donc croissante sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Donc pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$g(x) = \tan(x) - x \geqslant g(0) = 0$$

d'où :

$$x \leqslant \tan(x).$$

Ainsi :

$$(\star) \qquad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x).$$

Enfin établissons la dernière double inégalité. Comme la fonction $y \mapsto \dfrac{1}{y^2}$ décroît sur $\mathbf{R}^{+*}$, on déduit de $(\star)$:

$$\forall x \in]0, \pi/2[, \ \frac{1}{\tan^2(x)} \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant \frac{1}{\sin^2(x)} = 1 + \frac{1}{\tan^2(x)}$$

Q30. — Justifier la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{k^2}$ et calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Pour $k = 1, \ldots, n$, $\frac{k\pi}{2n+1} \in]0, \pi/2[$ et donc :

$$S_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2} \leqslant n + S_n$$

ce qui donne :

$$\frac{\pi^2 S_n}{(2n+1)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{\pi^2(n+S_n)}{(2n+1)^2}$$

Avec l'expression de S_n, majorant et minorant ont pour limite $\dfrac{\pi^2}{6}$. Par théorème d'encadrement, il en est de même pour le terme du milieu de notre double inégalité. La série proposée converge (ce que l'on sait car c'est une série de Riemann convergente) et :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

5 Résultant de deux polynômes [CCP-MP-2009]

Soient p et q deux entiers naturels non nuls, soit :

$$P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \qquad \textit{et} \qquad Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$$

deux polynômes de $\mathbf{C}[X]$ avec $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$. Le résultant des polynômes P et Q est le nombre complexe noté $\mathit{Res}(P,Q)$ défini par :

$$\mathit{Res}(P,Q) := \begin{vmatrix} a_0 & & & & b_0 & & \\ a_1 & \ddots & & & b_1 & \ddots & \\ \vdots & & a_0 & & \vdots & & b_0 \\ a_p & & a_1 & a_0 & \vdots & & b_1 \\ & \ddots & \vdots & a_1 & b_q & & \vdots \\ & & a_p & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & a_p & & & b_q \end{vmatrix}.$$

C'est un déterminant $q+p$ colonnes, dont les q premières colonnes représentent les coefficients du polynôme P et les p suivantes représentent les coefficients du polynôme Q ; les positions non remplies étant des zéros.
Par exemple, si $P = 1 + 2X + 3X^2$ et $Q = 4 + 5X + 6X^2 + 7X^3$,

$$\textit{Res}(P,Q) := \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

La matrice servant à définir Res(P,Q) pourra être notée $M_{P,Q}$:

$$\textit{Res}(P,Q) = \det(M_{P,Q}).$$

On note $E = \mathbf{C}_{q-1}[X] \times \mathbf{C}_{p-1}[X]$ et $F = \mathbf{C}_{p+q-1}[X]$.
Soit u l'application de E vers F définie pour $(A,B) \in E$ par : $u(A,B) = PA + QB$.

Q31. — Démontrer que u est une application bien définie, qui est linéaire.

Soit $(A,B) \in E$.

$$\begin{array}{rcl} \deg(u(A,B)) & = & \deg(PA+QB) \\ & \leqslant & \max(\deg(PA), \deg(QB)) \\ & = & \max(\deg(P) + \deg(A), \deg(Q) + \deg(B)) \\ & \leqslant & \max(p+q-1, p-1+q) \\ & = & p+q-1. \end{array}$$

Donc $u(A,B) \in F$ et l'application u bien définie.
Soit (A,B), (C,D) deux éléments de E et λ, μ deux nombres complexes. Alors, vu que $\mathbf{C}[X]$ est une algèbre,

$$\begin{array}{rcl} u\big(\lambda(A,B) + \mu(C,D)\big) & = & u\big((\lambda A + \mu C, \lambda B + \mu D)\big) \\ & = & P(\lambda A + \mu C) + Q(\lambda B + \mu D) \\ & = & \lambda(PA + QB) + \mu(PC + QD) \\ & = & \lambda u(A,B) + \mu u(C,D) \end{array}$$

donc u est linéaire.

Q32. — Si on suppose que u est bijective, démontrer P et Q sont premiers entre eux.

Si u est bijective, le polynôme constant égal à 1 possède un antécédent pour u *i.e.* il existe $(A,B) \in E \subset \mathbf{C}[X] \times \mathbf{C}[X]$ tel que $1 = PA + QB$.
D'après le théorème de Bézout, on en déduit que P et Q sont premiers entre eux.

Q33. — Si on suppose que P et Q sont premiers entre eux, déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ et en déduire que u est bijective.

Supposons P et Q premiers entre eux et soit (A, B) appartenant à $\mathrm{Ker}\,(u)$. Alors $AP = -BQ$ donc P divise BQ et comme P et Q sont premiers entre eux, P div ise B d'après le théorème de Gauß ; or $\deg B \leq p-1 < \deg P$ donc nécessairement $B = 0$. De même, Q divise A et $\deg A < \deg Q$ donc $A = 0$. Le noyau de u est donc réduit au vecteur nul de E, et comme $\dim E = p + q = \dim F$, on en déduit que l'application linéaire u est bijective.

On note $\mathcal{B} = ((1, 0), (X, 0), \ldots, (X^{q-1}, 0), (0, 1), (0, X), \ldots, (0, X^{p-1})$ ***une base de*** E ***et*** $\mathcal{B}' = (1, X, \ldots, X^{p+q-1})$ ***la base canonique de*** F.

Q34. — Déterminer la matrice de u par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

Notons M la matrice de u par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et montrons que $M = M_{P,Q}$ (définie par l'énoncé). Remarquons que ces deux matrices sont carrées d'ordre $p + q$.
Soit $j \in [\![1, q]\!]$, alors $u(X^{j-1}, 0) = X^{j-1}P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^{j-1+k}$: donc la colonne numéro j de M est le vecteur colonne commençant par $j-1$ zéros et se terminant par $q-j$ zéros

$$(0, \cdots, 0, a_0, a_1, \cdots, a_p, 0, \cdots, 0)^\top$$

qui est également la colonne numéro j de $M_{P,Q}$.
De même, si $j \in [\![1, p]\!]$, alors $u(0, X^{j-1}) = X^{j-1}Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^{j-1+k}$: donc la colonne numéro $j + q$ de M est le vecteur colonne commençant par $j-1$ zéros et se terminant par $p-j$ zéros

$$(0, \cdots, 0, b_0, b_1, \cdots, b_q, 0, \cdots, 0)^\top$$

qui est également la colonne numéro $j + q$ de $M_{P,Q}$.

Q35. — Démontrer que P et Q sont premiers entre eux si et seulement si P et Q n'ont pas de racine complexe commune.

- $\boxed{\Rightarrow}$ On raisonne par contraposée. Supposons que P et Q ont une racine complexe α commune. Alors le polynôme $X - \alpha$ divise P et Q. Ces deux polynômes ne sont donc pas premiers entre eux.
- $\boxed{\Leftarrow}$ On raisonne à nouveau par contraposée. Supposons que P et Q ne sont pas premiers entre eux. Alors il existe un polynôme $D \in \mathbf{C}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1, qui divise P et Q. D'après le théorème de d'Alembert-Gauß, D possède une racine complexe α. Comme D divise P et Q, le nombre complexe α est également racine de P et Q.

Q36. — Démontrer que $\mathrm{Res}(P, Q) \neq 0$ si et seulement si P et Q sont premiers entre eux (donc $\mathrm{Res}(P, Q) = 0$ si et seulement si P et Q ont au moins une racine complexe commune).

On raisonne par équivalences.

$$\begin{aligned} P \text{ et } Q \text{ sont premiers entre eux} &\iff u \text{ est bijective} \qquad [\textbf{Q32} \text{ et } \textbf{Q33}] \\ &\iff 0 \neq \det(u) = \det(M) = \det(M_{P,Q}) =: \mathrm{Res}(P,Q) \qquad [\textbf{Q34}] \end{aligned}$$

Q37. — Démontrer qu'un polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ admet une racine multiple dans $\mathbf{C}$ si et seulement si $\mathrm{Res}(P, P') = 0$.

Rappelons qu'un nombre complexe a est racine multiple de P si et seulement si $P(a) = P'(a) = 0$. On en déduit que P admet une racine multiple si et seulement si les polynômes P et P' admettent une racine complexe commune c'est-à-dire ne sont pas premiers entre eux ce qui équivaut d'après la question précédente à $\mathrm{Res}(P, P') = 0$.

Q38. — Application : déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme $X^3 + aX + b$ admette une racine complexe multiple.

Si $P = X^3 + aX + b$, $P'(X) = 3X^2 + a$ d'où $\mathrm{Res}(P, P') = \begin{vmatrix} b & 0 & a & 0 & 0 \\ a & b & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 3 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 27b^2 + 4a^3$

(*on se ramène au calcul du déterminant d'une matrice triangulaire par blocs pour le partage 3-2 en effectuant les opérations élémentaires* $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{a}{3}L_4$ *et* $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a}{3}L_5$)
Donc $X^3 + aX + b$ admet une racine multiple si et seulement si $4a^3 + 27b^2 = 0$.

Dans la suite, on note $P = X^4 + X^3 + 1$ *et* $Q = X^3 - X + 1$.

Q39. — Démontrer, en utilisant la première partie, que les polynômes P et Q sont premiers entre eux.

Pour montrer que P et Q sont premiers entre eux, il suffit d'après **Q35** de vérifier que leur résultant n'est pas nul. Or $\mathrm{Res}(P, Q) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

Q40. — On cherche un couple (A_0, B_0) de polynômes de $\mathbf{C}[X]$ tel que :

$$PA_0 + QB_0 = 1.$$

Expliquer comment on peut trouver un tel couple en utilisant la matrice de u, puis donner un couple solution.

Notons u l'application de $\mathbf{C}_2[X] \times \mathbf{C}_3[X]$ qui à (A,B) associe $PA+QB$ et posons $A_0 = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ et $B_0 = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + b_3 X^3$. Alors,

$$PA_0 + QB_0 = 1 \iff u(A_0,B_0) = 1 \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En effectuant les opérations élémentaires suivantes : $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$, $L_5 \leftarrow L_5 - L_1 - L_2$, $L_6 \leftarrow L_6 - L_2 - L_3$, $L_7 \leftarrow L_7 - L_3$ on obtient le système équivalent suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccccc} a_0 & & & + & b_0 & & & & & & & = & 1 \\ & a_1 & & - & b_0 & + & b_1 & & & & & = & 0 \\ & & a_2 & & & - & b_1 & + & b_2 & & & = & 0 \\ & & & & & & & - & b_2 & + & b_3 & = & -1 \\ & & & & & & & & & - & b_3 & = & -1 \\ & & & & b_0 & & & & & & & = & 0 \\ & & & & & & b_1 & - & b_2 & + & b_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

qui admet pour unique solution : $(a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, b_3) = (1, -1, -1, 0, 1, 2, 1)$ ce qui fournit la solution $(A_0, B_0) = (1 - X - X^2, X + 2X^2 + X^3)$.

Q41. — Déterminer tous les couples (A,B) de polynômes de $\mathbf{C}[X]$ vérifiant

$$PA + QB = 1.$$

Dans ces conditions, $PA+QB = 1$ équivaut à $PA + QB = PA_0 + QB_0$ ou encore à $P(A - A_0) = Q(B_0 - B)$.

- Analyse
  Donc, si (A,B) est solution, Q divise $P(A - A_0)$ et vu que P et Q sont premiers entre eux, Q divise $A - A_0$ d'après le théorème de Gauß. Il existe donc $R \in \mathbf{C}[X]$ tel que $A = A_0 + QR$; dans ces conditions $PA + QB = PA_0 + QB_0$ équivaut à $PQR + QB = QB_0$ soit compte-tenu de l'intégrité de $\mathbf{C}[X]$ et du fait que $Q \neq 0$ à $B = B_0 - PR$.
- Synthèse
  $P(A_0 + QR) + Q(B_0 - PR) = PA_0 + QB_0 = 1$, car (A_0, B_0) est solution de l'équation considérée.
- Conclusion
  Les solutions de $PA + QB = 1$ sont donc les couples de la forme $(A_0 + QR, B_0 - PR)$ avec $R \in \mathbf{C}[X]$.