M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Devoir surveillé n°4 (4h)

Intégration sur un intervalle quelconque
Polynômes
Réduction des endomorphismes et des matrices

Samedi 27 novembre 2021

David BLOTTIÈRE

Consignes

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, **les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte**. Vous êtes invité à encadrer les résultats de vos calculs.

Si vous êtes amené à repérer ce qui peut vous sembler être une erreur d'énoncé, vous le signalerez sur votre copie et devrez poursuivre votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

Le sujet comporte cinq exercices indépendants les uns des autres. Vous êtes libre de les traiter dans l'ordre de votre choix.

1 Lemme de Riemann-Lebesgue

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *et intégrable sur* $[0, +\infty[$.

Q1. — Justifier que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\cos(nt)\,\,\mathrm{d}t$ converge.

Soit ε *un nombre réel strictement positif.*

Q2. — Justifier qu'il existe un réel $A \geqslant 0$ tel que $\displaystyle\int_A^{+\infty} |f(t)|\,\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Q3. — Justifier qu'il existe un réel M tel que

$$\forall\, t \in [0, A], \qquad |f'(t)| \leqslant M\ .$$

Q4. — Démontrer qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall\, n \geqslant N, \qquad \left| \int_0^A f(t)\,\cos(nt)\,\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Q5. — En déduire une démonstration de

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\cos(nt)\,\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0\ .$$

Ce résultat est appelé *Lemme de Riemann-Lebesgue.*

2 Reste d'une division euclidienne et diagonalisablité

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soient A, B deux éléments de $\mathbf{R}_n[X]$ premiers entre eux. On suppose, en outre, que le polynôme B de degré $p \in \mathbf{N}^*$ est scindé à racines simples sur $\mathbf{R}$ et on note $x_1, \ldots, x_p$ ses racines. Soit l'application Φ définie par

$$\Phi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & \textit{le reste de la division euclidienne de } AP \textit{ par } B \end{array} \right. .$$

Q6. — Démontrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$. Est-ce un automorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$?

Q7. — Démontrer que 0 est une valeur propre de Φ et déterminer une base du sous-espace propre $E_0(\Phi)$ associé.

Q8. — Démontrer que, pour chaque $k \in [\![1, p]\!]$

$$P_k = \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant p \\ j \neq k}} (X - x_j)$$

est un vecteur propre de Φ, associé à une valeur propre α_k non nulle que l'on explicitera.

Q9. — Démontrer que $(P_1, \ldots, P_p)$ est une base de $\mathbf{R}_{p-1}[X]$.

Q10. — Justifier que $E_0(\Phi) \oplus \operatorname{Vect}(P_1, \ldots, P_p) = \mathbf{R}_n[X]$ et en déduire que Φ est diagonalisable.

3 Polynômes de Tchebychev

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit la fonction f_n par :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [-1\ ;\ 1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \cos(n\ \arccos(x)) \end{array} \right. .$$

Q11. — Calculer f_0, f_1, f_2 et f_3.

Q12. — Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in [-1\ ;\ 1]$. Exprimer $f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x)$ en fonction de $f_n(x)$.

Q13. — Soient $n \in \mathbf{N}$. Démontrer qu'il existe un unique polynôme T_n de $\mathbf{R}[X]$ dont la fonction polynomiale associée coïncide avec f_n sur $[-1\ ;\ 1]$.

Q14. — Soient $n \in \mathbf{N}$. Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme T_n.

Q15. — Soient $n \in \mathbf{N}^*$. Démontrer que le polynôme T_n possède n racines réelles deux-à-deux distinctes, toutes dans $]-1\ ;\ 1[$. On explicitera ces n racines.

4 Calcul de $\zeta(2)$ à l'aide de cotangentes [E3A-PSI-2016]

Soit n un entier naturel non nul.

Q16. — Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. Déterminer, s'ils existent, module et argument du nombre complexe $u = 1+e^{i\theta}$.

On note P_n le polynôme de $\mathbf{C}[X]$ défini par :

$$P_n(X) = \frac{1}{2i}\left((X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}\right) .$$

Q17. — Déterminer les polynômes P_1 et P_2.

Q18. — Vérifier que $P_1 \in \mathbf{R}_2[X]$ et que $P_2 \in \mathbf{R}_4[X]$. Sont-il irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$?

Q19. — Montrer que $P_n \in \mathbf{C}_{2n}[X]$. Donner son degré et son coefficient dominant.

Q20. — Soit $N \in \mathbf{N}^*$. Donner l'expression des racines N-ièmes de l'unité.

Q21. — Calculer $P_n(i)$.

Q22. — Prouver par un argument géométrique que les racines de P_n sont réelles.

Q23. — Soit $a \in \mathbf{C}$. Prouver l'équivalence :

$$a \text{ est racine de } P_n \iff \exists\, k \in [\![1, 2n]\!],\ a\left(e^{2ik\pi/(2n+1)} - 1\right) = i\left(e^{2ik\pi/(2n+1)} + 1\right).$$

Q24. — Déterminer les racines du polynôme P_n. Vérifier alors le résultat de **Q22**.

Q25. — En développant P_n, démontrer qu'il existe un unique polynôme Q_n de degré n et à coefficients réels tel que :

$$P_n(X) = Q_n\left(X^2\right).$$

Q26. — Expliciter Q_1 et Q_2 et déterminer leurs racines respectives.

Q27. — Déterminer les racines de Q_n en fonction de celles de P_n.

Q28. — On pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}.$$

En utilisant des résultats obtenus à la question précédente, montrer que $S_n = \dfrac{n(2n-1)}{3}$.

Q29. — Démontrer les inégalités suivantes :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,\ 0 \leqslant \sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x).$$

En déduire :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \frac{1}{\tan^2(x)} \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant 1 + \frac{1}{\tan^2(x)}$$

Q30. — Justifier la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{k^2}$ et calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

5 Résultant de deux polynômes [CCP-MP-2009]

Soient p et q deux entiers naturels non nuls, soit :

$$P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \qquad \textit{et} \qquad Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$$

deux polynômes de $\mathbf{C}[X]$ avec $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$. Le résultant des polynômes P et Q est le nombre complexe noté Res(P,Q) défini par :

$$\textit{Res}(P,Q) := \begin{vmatrix} a_0 & & & b_0 & & \\ a_1 & \ddots & & b_1 & \ddots & \\ \vdots & & a_0 & \vdots & & b_0 \\ a_p & & a_1 \quad a_0 & \vdots & & b_1 \\ & \ddots & \vdots \quad a_1 & b_q & & \vdots \\ & & a_p \quad \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & \quad a_p & & & b_q \end{vmatrix}.$$

C'est un déterminant $q+p$ colonnes, dont les q premières colonnes représentent les coefficients du polynôme P et les p suivantes représentent les coefficients du polynôme Q ; les positions non remplies étant des zéros.
Par exemple, si $P = 1 + 2X + 3X^2$ et $Q = 4 + 5X + 6X^2 + 7X^3$,

$$\textit{Res}(P,Q) := \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

La matrice servant à définir Res(P,Q) pourra être notée $M_{P,Q}$:

$$\textit{Res}(P,Q) = \det(M_{P,Q}).$$

On note $E = \mathbf{C}_{q-1}[X] \times \mathbf{C}_{p-1}[X]$ et $F = \mathbf{C}_{p+q-1}[X]$.
Soit u l'application de E vers F définie pour $(A,B) \in E$ par : $u(A,B) = PA + QB$.

Q31. — Démontrer que u est une application bien définie, qui est linéaire.

Q32. — Si on suppose que u est bijective, démontrer P et Q sont premiers entre eux.

Q33. — Si on suppose que P et Q sont premiers entre eux, déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ et en déduire que u est bijective.

On note $\mathcal{B} = ((1,0),(X,0),\ldots,(X^{q-1},0),(0,1),(0,X),\ldots,(0,X^{p-1}))$ une base de E et $\mathcal{B}' = (1,X,\ldots,X^{p+q-1})$ la base canonique de F.

Q34. — Déterminer la matrice de u par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

Q35. — Démontrer que P et Q sont premiers entre eux si et seulement si P et Q n'ont pas de racine complexe commune.

Q36. — Démontrer que $\mathrm{Res}(P, Q) \neq 0$ si et seulement si P et Q sont premiers entre eux (donc $\mathrm{Res}(P, Q) = 0$ si et seulement si P et Q ont au moins une racine complexe commune).

Q37. — Démontrer qu'un polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ admet une racine multiple dans $\mathbf{C}$ si et seulement si $\mathrm{Res}(P, P') = 0$.

Q38. — Application : déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme $X^3 + aX + b$ admette une racine complexe multiple.

Dans la suite, on note $P = X^4 + X^3 + 1$ ***et*** $Q = X^3 - X + 1$.

Q39. — Démontrer, en utilisant la première partie, que les polynômes P et Q sont premiers entre eux.

Q40. — On cherche un couple (A_0, B_0) de polynômes de $\mathbf{C}[X]$ tel que :

$$PA_0 + QB_0 = 1.$$

Expliquer comment on peut trouver un tel couple en utilisant la matrice de u, puis donner un couple solution.

Q41. — Déterminer tous les couples (A, B) de polynômes de $\mathbf{C}[X]$ vérifiant

$$PA + QB = 1.$$