M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Un corrigé du devoir surveillé n°3

Algèbre linéaire et espaces vectoriels normés

David BLOTTIÈRE

Consignes

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, **les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte**. Vous êtes invité à encadrer les résultats de vos calculs.

Si vous êtes amené à repérer ce qui peut vous sembler être une erreur d'énoncé, vous le signalerez sur votre copie et devrez poursuivre votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

Le sujet comporte six exercices indépendants les uns des autres. Vous êtes libre de les traiter dans l'ordre de votre choix.

1 Endomorphisme de R^3 annulé par $X^3 + X$

Soit f un endormorphisme non nul de $\mathbf{R}^3$ tel que

$$f^3 + f = 0_{\mathcal{L}(\mathbf{R}^3)}$$

où $f^3 = f \circ f \circ f$.

Q1. — Démontrer : $\mathbf{R}^3 = \mathrm{Ker}\,(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f)$.

D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}\,(f)) + \dim(\mathrm{Im}\,(f)) = 3$. Il reste à établir $\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(f) = \{0\}$. Une inclusion est triviale. Démontrons l'autre.
Soit $u \in \mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(f)$. Alors $f(u) = 0$ et il existe $v \in \mathbf{R}^3$ tel que $u = f(v)$. En appliquant f^2 aux deux membres de cette identité, il vient :

$$0 = f^2(u) = f^3(v) = -f(v) = -u\ .$$

Ainsi, $u = 0$.

Q2. — Justifier que $\dim(\mathrm{Ker}\,(f)) \neq 3$.

Nous raisonnons par l'absurde, en supposant $\dim(\mathrm{Ker}\,(f)) = 3$. Alors $\mathrm{Ker}\,(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ et leurs dimensions finies sont les mêmes. On en déduit $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathbf{R}^3$. Mais alors $f = 0_{\mathcal{L}(\mathbf{R}^3)}$, ce qui contredit une des hypothèses faites sur f.

Q3. — Démontrer que $\dim(\mathrm{Ker}\,(f)) \neq 0$.

Nous raisonnons par l'absurde, en supposant $\dim(\mathrm{Ker}\,(f)) = 0$. L'endomorphisme f de $\mathbf{R}^3$ est donc injectif. Comme $\mathbf{R}^3$ est de dimension finie, f est un automorphisme de $\mathbf{R}^3$.
En composant chaque membre de l'identité $f^3 + f = 0$ par f^{-1} (à gauche disons), il vient :

$$f^2 = -\,\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}\ .$$

En appliquant le déterminant à chaque membre de cette dernière identité, on obtient :

$$\det(f)^2 = \det\left(f^2\right) = \det\left(-\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}\right) = (-1)^{\dim\left(\mathbf{R}^3\right)} \det\left(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}\right) = -1 \ .$$

Comme le nombre $\det(f)$ est un réel non nul, $\det(f)^2 > 0$, ce qui contredit le fait qu'il est égal à -1.

Remarque : Ici la dimension impaire de $\mathbf{R}^3$ a joué un rôle crucial.

Q4. — Démontrer que $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ qui est stable par f (pour tout $u \in \mathrm{Im}(f)$, $f(u) \in \mathrm{Im}(f)$) et qui a dimension 1 ou 2.

- Démontrons que $\mathrm{Im}(f)$ est stable par f. Soit $u \in \mathrm{Im}(f)$. Alors $f(u) \in \mathrm{Im}(f)$, par définition même de $\mathrm{Im}(f)$.
- Du théorème du rang (cf. question **Q1**) et des questions **Q2** et **Q3**, on déduit $\dim(\mathrm{Im}(f)) \in \{1, 2\}$.

  Remarque : Nous n'avons utilisé aucune propriété spécifique à f ici. En adaptant les notations, on établit de même que si φ est un endomorphisme quelconque d'un espace vectoriel E quelconque, alors $\mathrm{Im}(\varphi)$ est stable par φ.

Soit g l'endomorphisme de $\mathrm{Im}(f)$ induit par f, i.e. :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{Im}(f) & \longrightarrow & \mathrm{Im}(f) \\ x & \longmapsto & f(x) \ . \end{array} \right.$$

Q5. — Démontrer que g est un automorphisme de $\mathrm{Im}(f)$.

L'application g est une restriction et une corestriction de l'application linéaire f. Elle est donc elle-même linéaire.
Comme $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie, pour établir que g est bijective, il suffit de prouver son injectivité.
Démontrons donc $\mathrm{Ker}(g) = \{0\}$. Une inclusion est triviale. Prouvons l'autre. Soit $u \in \mathrm{Ker}(g)$. Alors $u \in \mathrm{Im}(f)$ et $g(u) = f(u) = 0$. Donc $u \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$, d'après la question **Q1**.

Q6. — Démontrer que $g^2 + \mathrm{id}_{\mathrm{Im}(f)} = 0$.

De $f^3 + f = 0$, nous déduisons que :

$$\forall\, u \in \mathbf{R}^3, \qquad f^3(u) + f(u) = 0.$$

Soit $u \in \mathrm{Im}(f)$. En spécialisant l'identité précédente à ce vecteur u, il vient :

$$\underbrace{f^3(u)}_{g^3(u)} + \underbrace{f(u)}_{g(u)} = 0.$$

En appliquant g^{-1} à chaque membre de cette identité, on obtient :

$$g^2(u) + u = 0 \ .$$

Ainsi $g^2 + \mathrm{id}_{\mathrm{Im}(f)} = 0$.

Q7. — En déduire que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.

D'après la question **Q6**

$$g^2 = -\mathrm{id}_{\mathrm{Im}(f)} \ .$$

En appliquant le déterminant à chaque membre de cette identité, il vient :

$$\det(g)^2 = \det\left(g^2\right) = \det\left(-\mathrm{id}_{\mathrm{Im}(f)}\right) = (-1)^{\dim(\mathrm{Im}(f))} \det\left(\mathrm{id}_{\mathrm{Im}(f)}\right) = (-1)^{\dim(\mathrm{Im}(f))} \ .$$

Comme le nombre $\det(g)$ est un réel non nul, $\det(g)^2 > 0$. Ainsi le nombre $\dim(\mathrm{Im}(f))$ est nécessairement pair. Puisqu'il est égal à 1 ou 2 (cf. question **Q4**), $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.

Q8. — Soit x un vecteur non nul de $\mathrm{Im}(f)$. Démontrer que la famille $(x, f(x))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

La famille $(x, f(x))$ est une famille de vecteurs de $\mathrm{Im}(f)$, qui est un espace vectoriel de dimension 2 (cf. question **Q7**). Pour prouver que la famille $(x, f(x))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$, il suffit donc de prouver qu'elle est libre.
Notons que comme $x \in \mathrm{Im}(f)$, $f(x) = g(x)$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tels que

$$(L_1) \qquad \lambda x + \mu g(x) = 0 \ .$$

En appliquant g à chaque membre de cette identité, il vient

$$\lambda g(x) + \mu g^2(x) = 0$$

et, d'après **Q6**, cette identité se réécrit

$$(L_2) \qquad -\mu x + \lambda g(x) = 0 \ .$$

Alors $\lambda L_1 - \mu L_2$ livre :

$$\left(\lambda^2 + \mu^2\right) x = 0 \ .$$

Comme $x \neq 0$, on en déduit :

$$\lambda^2 + \mu^2 = 0 \ .$$

Les nombres λ et μ étant réels, les nombres λ^2 et μ^2 sont des réels positifs ou nuls. Ainsi $\lambda^2 = \mu^2 = 0$ et par suite $\lambda = \mu = 0$.

Q9. — Démontrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^3$ telle que :

$$\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

- D'après la question **Q7** et le théorème du rang (cf. question **Q1**), $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$. Soit (u) une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
- Soit $x \in \mathrm{Im}(f) \setminus \{0\}$. D'après la question **Q8**, $(x, f(x))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.
- Puisque $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbf{R}^3$ (cf. question **Q1**), la famille $\mathcal{B} = (u, x, f(x))$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
- On calcule :

$$\begin{array}{l} f(u) = 0 = 0.u + 0.x + 0.f(x) \\ f(x) = 0.u + 0.x + 1.f(x) \\ f(f(x)) \underset{x \in \mathrm{Im}(f)}{=} g^2(x) \underset{\mathbf{Q6}}{=} -x = 0.u + (-1).x + 0.f(x) \ . \end{array}$$

Ainsi :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

2 Sous-espaces vectoriels de $\mathrm{K}[X]$ stables par dérivation

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{K}_n[X]$ *désigne la partie de* $\mathbf{K}[X]$ *définie par :*

$$\mathbf{K}_n[X] = \{P \in \mathbf{K}[X] \ : \ \deg(P) \leqslant n\} \ .$$

Un sous-espace vectoriel F *de* $\mathbf{K}[X]$ *est dit* **stable par dérivation** *si pour tout* $P \in F$, $P' \in F$.

Q10. — Soit $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que $\mathbf{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$ stable par dérivation.

- Démontrons que $\mathbf{K}_n[X] = \mathrm{Vect}\left((X^i)_{0 \leqslant i \leqslant n}\right)$.

  Soit $P \in \mathbf{K}_n[X]$. Comme P de degré inférieur ou égal à n, pour tout $i > n$, $[P]_i = 0$. Donc :

$$P = \sum_{i=0}^{n} [P]_i \, X^i \in \mathrm{Vect}\left((X^i)_{0 \leqslant i \leqslant n}\right) \ .$$

  Ainsi a-t-on établi l'inclusion : $\mathbf{K}_n[X] \subset \mathrm{Vect}\left((X^i)_{0 \leqslant i \leqslant n}\right)$.

  Soit $P \in \mathrm{Vect}\left((X^i)_{0 \leqslant i \leqslant n}\right)$. Alors il existe $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbf{K}^{n+1}$ tel que :

$$P = \sum_{i=0}^{n} a_i \, X^i$$

  Donc :

$$\begin{array}{rcl} \deg(P) & \leqslant & \max\{\deg(a_i \, X^i) \ : \ 0 \leqslant i \leqslant n\} \\ & \leqslant & \max\{\deg(a_i) + i \ : \ 0 \leqslant i \leqslant n\} \\ & \leqslant & \max\{i \ : \ 0 \leqslant i \leqslant n\} \qquad [\deg(a_i) \in \{-\infty, 0\} \text{ pour tout } i \in [\![0, n]\!]] \\ & \leqslant & n \end{array}$$

  d'où $P \in \mathbf{K}_n[X]$. On en déduit : $\mathrm{Vect}\left((X^i)_{0 \leqslant i \leqslant n}\right) \subset \mathbf{K}_n[X]$.

- De l'identité $\mathbf{K}_n[X] = \operatorname{Vect}\left((X^i)_{0\leqslant i\leqslant n}\right)$, on déduit que $\mathbf{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$, comme sous-espace vectoriel engendré.
- Soit $P \in \mathbf{K}_n[X]$. Comme :

$$\deg(P') = \begin{cases} \deg(P) - 1 & \text{si } \deg(P) \geq 1 \\ -\infty & \text{si } \deg(P) \leqslant 0 \end{cases}$$

  il vient : $\deg(P') \leqslant \deg(P) \leqslant n$. Donc $P' \in \mathbf{K}_n[X]$.
  Le sous-espace vectoriel $\mathbf{K}_n[X]$ de $\mathbf{K}[X]$ est donc stable par dérivation.

Q11. — Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$ stable par dérivation. On suppose que F contient un polynôme P non nul et on pose $n = \deg(P) \in \mathbf{N}$. Démontrer $\mathbf{K}_n[X] \subset F$.

- D'après la réponse apportée à la question **Q10**, la famille $(X^i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est génératrice de $\mathbf{K}_n[X]$. Comme elle est également libre, elle forme une base de $\mathbf{K}_n[X]$. L'espace vectoriel $\mathbf{K}_n[X]$ est donc de dimension finie et $\dim(\mathbf{K}_n[X])) = n + 1$.
- Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Le degré du polynôme $P^{(i)}$ vaut $\deg(P) - i \in [\![0, n]\!]$. La famille $\left(P^{(i)}\right)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est échelonnée en degré donc libre. Ainsi $\dim\left(\operatorname{Vect}\left(\left(P^{(i)}\right)_{0\leqslant i\leqslant n}\right)\right) = n + 1$.
  La famille $\left(P^{(i)}\right)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est donc une famille de polynômes de $\mathbf{K}_n[X]$. D'après la propriété de minimalité d'un sous-espace vectoriel engendré, $\operatorname{Vect}\left(\left(P^{(i)}\right)_{0\leqslant i\leqslant n}\right)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}_n[X]$.
  Par égalité des dimensions finies :

$$\operatorname{Vect}\left(\left(P^{(i)}\right)_{0\leqslant i\leqslant n}\right) = \mathbf{K}_n[X] \; .$$

- Comme P appartient à F qui est stable par dérivation, la famille $\left(P^{(i)}\right)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une famille de polynômes du sous-espace vectoriel F de $\mathbf{K}[X]$. D'après la propriété de minimalité d'un sous-espace vectoriel engendré :

$$F \supset \operatorname{Vect}\left(\left(P^{(i)}\right)_{0\leqslant i\leqslant n}\right) = \mathbf{K}_n[X]$$

Q12. — Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$ stable par dérivation. On suppose que F est distinct de $\left\{0_{\mathbf{K}[X]}\right\}$ et de $\mathbf{K}[X]$. Démontrer qu'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $F = \mathbf{K}_n[X]$.

- On introduit l'ensemble A des degrés des polynômes non nuls de F, i.e. :

$$A := \left\{\deg(P) \;:\; P \in F \setminus \left\{0_{\mathbf{K}[X]}\right\}\right\}$$

  L'ensemble A est une partie de $\mathbf{N}$, qui est non vide puisque F n'est pas égal à $\left\{0_{\mathbf{K}[X]}\right\}$.
- Comme F n'est pas égal à $\mathbf{K}[X]$, il existe un polynôme Q de $\mathbf{K}[X]$ qui n'appartient pas à dans F. Comme F contient $0_{\mathbf{K}[X]}$, $Q \neq 0_{\mathbf{K}[X]}$. Le degré de Q est donc un entier naturel. Démontrons que A est majorée par $\deg(Q)$, en raisonnant par l'absurde.
  Supposons que $\deg(Q)$ ne majore pas A. Alors il existe $m \in A$ tel que $\deg(Q) < m$. Puisque $m \in A$, il existe $P \in F \setminus \left\{0_{\mathbf{K}[X]}\right\}$ tel que $\deg(P) = m$. D'après la question **Q11**, $\mathbf{K}_m[X] \subset F$. Or $Q \in \mathbf{K}_m[X]$ et donc $Q \in F$. Contradiction.

- L'ensemble A est une partie non vide et majorée de $\mathbf{N}$. Elle admet donc un maximum. Posons $n_0 := \max(A)$. Comme $n_0 \in A$, il existe $P_0 \in F \setminus \{0_{\mathbf{K}[X]}\}$ tel que $\deg(P_0) = n_0$.
- Le polynôme P_0 appartenant à F, la question **Q11** livre :

$$\mathbf{K}_{n_0}[X] \subset F$$

- Démontrons l'inclusion réciproque, ce qui achèvera l'étude. Soit $P \in F$. Si $P = 0$, alors son degré est $-\infty$ et donc $P \in \mathbf{K}_{n_0}[X]$. Sinon $\deg(P)$ est un élément de A et donc $\deg(P) \leqslant \max(A) =: n_0$. Dans ce cas aussi $P \in \mathbf{K}_{n_0}[X]$.

Q13. — Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{K}[X]$ stables par dérivation.

- D'après la question **Q12**, si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$ stable par dérivation, alors $F = \{0_{\mathbf{K}[X]}\}$ ou $F = \mathbf{K}[X]$ ou il existe $n \in \mathbf{N}$, tel que $F = \mathbf{K}_n[X]$.

- Réciproquement, $\{0_{\mathbf{K}[X]}\}$ et $\mathbf{K}[X]$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{K}[X]$ stables par dérivation. Enfin, nous avons établi à la question **Q10** que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$ qui est stable par dérivation.

- Ainsi l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{K}[X]$ stables par dérivation est :

$$\{0_{\mathbf{K}[X]}\,,\, \mathbf{K}[X]\} \,\cup\, \{\mathbf{K}_n[X] \;:\; n \in \mathbf{N}\}\ .$$

3 Réduction des endomorphismes nilpotents

Soit $\mathbf{K}$ *un sous-corps de* $\mathbf{C}$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. *Une matrice de* $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ *est dite* **triangulaire supérieure stricte** *si elle est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux nuls. L'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes de* $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ *est noté* $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbf{K})$. *Ainsi :*

$$\mathcal{T}_n^{++}(\mathbf{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \;:\; \forall\, 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n,\; [M]_{i,j} = 0\}\ .$$

Q14. — Démontrer que $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbf{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. En donner une base et préciser sa dimension.

- Notons $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
- Soit $M \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbf{K})$. Alors :

$$M = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} [M]_{i,j}.E_{i,j} = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} [M]_{i,j}.E_{i,j} \in \mathrm{Vect}\left((E_{i,j})_{1\leqslant i<j\leqslant n}\right)\ .$$

  Ainsi $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbf{K}) \subset \mathrm{Vect}\left((E_{i,j})_{1\leqslant i<j\leqslant n}\right)$.
- Réciproquement, soit $M \in \mathrm{Vect}\left((E_{i,j})_{1\leqslant i<j\leqslant n}\right)$. Alors il existe une famille de scalaires

$(\lambda_{i,j})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ telle que :

$$M=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\lambda_{i,j}.E_{i,j}=\begin{pmatrix}0 & \lambda_{1,2} & \dots & \lambda_{1,n}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \lambda_{n-1,n}\\ 0 & \dots & \dots & 0\end{pmatrix}\in\mathcal{T}_n^{++}(\mathbf{K})\ .$$

- Nous déduisons des deux points précédents que :

$$\mathcal{T}_n^{++}(\mathbf{K})=\mathrm{Vect}\left((E_{i,j})_{1\leqslant i<j\leqslant n}\right)\ .$$

Ainsi $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbf{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. La famille $(E_{i,j})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ est génératrice de $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbf{K})$. Elle est par ailleurs libre comme sous-famille de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, qui est libre. Ainsi :

$$(E_{i,j})_{1\leqslant i<j\leqslant n}\ \text{est une base de}\ \mathcal{T}_n^{++}(\mathbf{K})$$

et

$$\dim\left(\mathcal{T}_n^{++}(\mathbf{K})\right)=\mathrm{Card}\left((E_{i,j})_{1\leqslant i<j\leqslant n}\right)=\frac{n(n-1)}{2}\ .$$

Q15. — Démontrer que $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbf{K})$ est stable par produit, i.e. que :

$$\forall\,(A,B)\in\mathcal{T}_n^{++}(\mathbf{K})\times\mathcal{T}_n^{++}(\mathbf{K}),\quad AB\in\mathcal{T}_n^{++}(\mathbf{K})\ .$$

Soit $(A,B)\in\mathcal{T}_n^{++}(\mathbf{K})\times\mathcal{T}_n^{++}(\mathbf{K})$. Soit $1\leqslant j\leqslant i\leqslant n$. Démontrons $[AB]_{i,j}=0$.
Par définition du produit matriciel :

$$(\star)\qquad [AB]_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}[A]_{i,k}[B]_{k,j}\ .$$

- Cas où $i=n$. L'identité $(\star)$ se réécrit :

$$[AB]_{n,j}=\sum_{k=1}^{n}[A]_{n,k}[B]_{k,j}\ .$$

Comme la n-ième ligne de A est nulle, $[A]_{n,1}=[A]_{n,2}=\ldots=[A]_{n,n}=0$, d'où $[AB]_{n,j}=0$.
- Cas où $i<n$. Nous pouvons écrire :

$$(\star\star)\qquad [AB]_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}[A]_{i,k}[B]_{k,j}=\sum_{k=1}^{i}[A]_{i,k}\ [B]_{k,j}+\sum_{k=i+1}^{n}[A]_{i,k}[B]_{k,j}\ .$$

— Si $1\leqslant k\leqslant i$, alors, puisque $A\in\mathcal{T}_n^{++}(\mathbf{K})$, $[A]_{i,k}=0$.
— Si $i+1\leqslant k\leqslant n$, comme $j\leqslant i$, il vient $j\leqslant k$ et, puisque $B\in\mathcal{T}_n^{++}(\mathbf{K})$, $[B]_{k,j}=0$.
De ces considérations et de $(\star\star)$, nous déduisons $[AB]_{i,j}=0$.

Un endomorphisme u d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel est dit **nilpotent** *s'il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que u^p est l'endomorphisme nul, où u^p est la puissance p-ième de u pour la composition d'applications.*

On se propose de démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\mathcal{P}(n) \quad \left| \begin{array}{l} \textit{Pour tout } \mathbf{K}\textit{-espace vectoriel } E \textit{ de dimension finie } n, \\ \textit{pour tout endomorphisme nilpotent } u \textit{ de } E, \\ \textit{il existe une base } \mathcal{B} \textit{ de } E \textit{ telle que } \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbf{K}). \end{array} \right.$$

en raisonnant par récurrence.

Initialisation. Pour le moment, nous considérons un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension 1 et u un endomorphisme nilpotent de E. Nous considérons également un vecteur non nul x de E, de sorte que $\mathcal{B} := (x)$ est une base de E.

Q16. — Justifier qu'il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $u(x) = \lambda.x$.

Le vecteur $u(x)$ appartient à $E = \mathrm{Vect}\,(x)$, puisque (x) est une base de $\mathcal{B}$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $u(x) = \lambda.x$.

Q17. — Démontrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $u^k(x) = \lambda^k.x$.

Nous raisonnons par récurrence sur $k \in \mathbf{N}^*$. L'initialisation découle de **Q16**. Il reste à établir l'hérédité.
Soit $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $u^k(x) = \lambda^k.x$.

$$u^{k+1}(x) = u\left(u^k(x)\right) \underset{\text{HR}}{=} u\left(\lambda^k.x\right) \underset{u \text{ linéaire}}{=} \lambda^k.u(x) \underset{\textbf{Q16}}{=} \lambda^{k+1}.x\ .$$

Q18. — Démontrer alors que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = (0)$, ce qui établit $\mathcal{P}(1)$.

Comme u est nilpotent, il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Ainsi :

$$0_E = u^p(x) \underset{\textbf{Q17}}{=} \lambda^p.x\ .$$

Comme x est un vecteur non nul, il vient $\lambda^p = 0_{\mathbf{K}}$, puis $\lambda = 0_{\mathbf{K}}$ (un corps est un anneau intègre). Grâce à **Q16**, nous obtenons $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = (0) \in \mathcal{M}_1(K)$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ fixé. Nous supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $(n+1)$ et soit u un endomorphisme nilpotent de E. Soit $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Q19. — Démontrer $\mathrm{Ker}\,(u) \neq \{0_E\}$.

Nous raisonnons par l'absurde et nous supposons que $\mathrm{Ker}\,(u) = \{0_E\}$.
L'application u est alors un endomorphisme injectif de E, qui est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Par un corollaire du théorème du rang, u est un automorphisme de E et ainsi $\det(u) \neq 0$. Comme un corps est un anneau intègre

$$0 \neq \det(u)^p = \det\left(u^p\right) = \det\left(0_{\mathcal{L}(E)}\right) = 0$$

d'où une contradiction.

Soient** e_1 **un vecteur non nul de** $\operatorname{Ker}(u)$ **et** F **un supplémentaire de la droite vectorielle** $\operatorname{Vect}(e_1)$ **dans** E**. On note** p **la projection de** E **sur** F **parallèlement à** $\operatorname{Vect}(e_1)$ **:

$$p \left| \begin{array}{ccc} E = \operatorname{Vect}(e_1) \oplus F & \longrightarrow & E \\ x = \underbrace{y}_{\in \operatorname{Vect}(e_1)} + \underbrace{z}_{\in F} & \longmapsto & p(x) = z \end{array} \right. .$$

Q20. — Démontrer : $u \circ p = u$.

- Comme $u \circ p$ et u ont même source et but, il reste à établir que, pour tout $x \in E$, $u(p(x)) = u(x)$.
- Soit $x \in E$. Comme $E = \operatorname{Vect}(e_1) \oplus F$, il existe un unique $(y, z) \in \operatorname{Vect}(e_1) \times F$ tel que $x = y + z$. Nous calculons alors $u(p(x))$ et $u(x)$.
  — Comme p est linéaire, $p(y) = 0_E$ et $p(z) = z$:

$$u(p(x)) = u(p(y) + p(z)) = u(z) .$$

  — Comme $e_1 \in \operatorname{Ker}(u)$ et comme $\operatorname{Ker}(u)$ est un sous-espace vectoriel de E, $y \in \operatorname{Vect}(e_1) \subset \operatorname{Ker}(u)$. Avec la linéarité de u, il vient :

$$u(x) = u(y + z) = u(y) + u(z) = u(z) .$$

  Des calculs précédents, nous déduisons $u(p(x)) = u(x)$.

Q21. — Démontrer que l'application v définie par :

$$v \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & p(u(x)) \end{array} \right.$$

est un endomorphisme nilpotent de F.

- L'application $p \circ u$ est un endomorphisme de E, comme composée d'endomorphismes de E. Comme v est une restriction et une corestriction d'application linéaire, v est elle-même une application linéaire.
- Nous démontrons que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$:

$$\forall\, x \in F, \quad v^k(x) = p\left(u^k(x)\right)$$

  en raisonnant par récurrence. L'initialisation découle de la définition de v. Il reste à établir l'hérédité.
  Soit $k \in \mathbf{N}^*$ tel que pour tout $x \in F$, $v^k(x) = p\left(u^k(x)\right)$. Soit $x \in F$.

$$v^{k+1}(x) = v\left(v^k(x)\right) \underset{\text{HR}}{=} v\left(p\left(u^k(x)\right)\right) = p\left(u\left(p\left(u^k(x)\right)\right)\right) \underset{\text{Q20}}{=} p\left(\left(u^{k+1}(x)\right)\right)$$

- Comme $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$, nous déduisons du point précédent que, pour tout $x \in F$:

$$v^p(x) = p\left(u^p(x)\right) = p\left(0_E\right) = 0_E .$$

L'endomorphisme v de F est donc nilpotent.

Comme F est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n, l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$, nous permet d'obtenir une base $(e_2, \dots, e_{n+1})$ de F telle que $\mathrm{Mat}_{(e_2,\dots,e_{n+1})}(v) \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbf{K})$.

Q22. — Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$. Démontrer que $u(e_k) \in \mathrm{Vect}\,(e_1, \dots, e_{k-1})$.

Comme $E = \mathrm{Vect}\,(e_1) \oplus F$, il existe un unique $(y_k, z_k) \in \mathrm{Vect}\,(e_1) \times F$ tel que

$$(\star) \qquad u(e_k) = y_k + z_k \ .$$

Par définition de la projection p :

$$z_k = p(u(e_k)) = v(e_k) \ .$$

Comme $\mathrm{Mat}_{(e_2,\dots,e_{n+1})}(v) \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbf{K})$:

$$v(e_k) \in \mathrm{Vect}\,(e_2, \dots, e_{k-1}) \ .$$

De $(\star)$, $y_k \in \mathrm{Vect}\,(e_1)$ et $z_k = v(e_k) \in \mathrm{Vect}\,(e_2, \dots, e_{k-1})$, nous déduisons $u(e_k) \in \mathrm{Vect}\,(e_1, \dots, e_{k-1})$.

Q23. — En déduire l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{T}_{n+1}^{++}(\mathbf{K})$.

- Comme $E = \mathrm{Vect}\,(e_1) \oplus F$, (e_1) est une base de $\mathrm{Vect}\,(e_1)$ et $(e_2, \dots, e_{n+1})$ est une base de F, la famille :
$$\mathcal{B} := (e_1) \,\#\, (e_2, \dots, e_{n+1}) = (e_1, e_2, \dots, e_{n+1})$$
est une base de F.
- Comme $e_1 \in \mathrm{Ker}\,(u)$:
$$u(e_1) = 0_E = 0.e_1 + 0.e_2 + \dots + 0.e_n \ .$$
Ainsi la première colonne de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est nulle.
- Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$. D'après **Q22**, il existe des scalaires $\lambda_{1,k}, \lambda_{2,k}, \dots, \lambda_{k-1,k}$ tels que :
$$u(e_k) = \lambda_{1,k}.e_1 + \lambda_{2,k}.e_2 + \dots + \lambda_{k-1,k}.e_{k-1} \ .$$
- Des deux points précédents, nous déduisons :
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{1,2} & \dots & \lambda_{1,n+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_{n,n+1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_{n+1}^{++}(\mathbf{K}) \ .$$

On cherche à présent une traduction matricielle du résultat précédemment obtenu pour les endomorphismes nilpotents.

Une matrice carrée M est dite **nilpotente** *s'il existe $p \in \mathbf{N}^*$ telle que M^p est la matrice nulle, où M^p est la puissance p-ième de M pour la multiplication.*

Q24. — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice nilpotente. Démontrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $T \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbf{K})$ telles que $M = P\,T\,P^{-1}$.

- Introduisons l'endomorphisme u de $\mathbf{K}^n$ canoniquement associé à la matrice M. Par définition :
$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u)$$
où $\mathcal{B}_0$ est la base canonique de $\mathbf{K}^n$.
- Comme M est une matrice nilpotente, il existe $p \in \mathbf{N}^*$ telle que M^p est la matrice nulle. En raison du lien fondamental entre multiplication matricielle et composée d'applications linéaires :
$$0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})} = M^p = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u)^p = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}\left(u^p\right) \ .$$
Nous en déduisons que $u^p = 0_{\mathcal{L}(\mathbf{K}^n)}$.
- Comme l'endomorphisme u de $\mathbf{K}^n$ est nilpotent, nous savons (cf. propriété $\mathcal{P}(n)$ démontrée précédemment) qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{K}^n$ telle que
$$T := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbf{K}) \ .$$
- Par théorème de changement de bases :
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u) = P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}} \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \times P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0}$$
qui peut s'écrire également :
$$M = P \times T \times P^{-1}$$
en posant $P := P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$.

4 Étude de normes sur $\mathrm{R}[X]$

Pour tout $a \in \mathbf{R}_{\geq 0}$, on pose :

$$\left| \begin{array}{cccc} N_a & : & \mathbf{R}[X] & \to & \mathbf{R} \\ & & P & \mapsto & |P(a)| + \displaystyle\int_0^1 |P'(t)| \ \mathrm{d}t. \end{array} \right.$$

Q25. — Soit $a \in \mathbf{R}$. Démontrer que N_a est une norme sur $\mathbf{R}[X]$.

- *Séparation.* Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que :
$$N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)| = 0 \ .$$
Comme $|P(a)| \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_0^1 |P'(t)| \geqslant 0$, nous en déduisons $|P(a)| = 0$ et $\displaystyle\int_0^1 |P'(t)| = 0$. Comme la fonction $t \longmapsto |P'(t)|$ est continue et positive sur $[0,1]$, il vient :
$$\forall\, t \in [0,1], \quad |P'(t)| = 0 \ .$$

Par séparation de la valeur absolue nous obtenons finalement :

$$P(a) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall\, t \in [0,1], \quad P'(t) = 0\ .$$

Nous en déduisons que la fonction $t \longmapsto P(t)$ est constante sur $[0,1]$, de valeur $P(a) = 0$, i.e. :

$$\forall\, t \in [0,1], \quad P(t) = 0\ .$$

Le polynôme P possédant une infinité de racines, il est le polynôme nul.

- ***Homogénéité.*** Soient $P \in \mathbf{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Nous calculons :

$$\begin{aligned}
N_a(\lambda.P) &= |(\lambda.P)(a)| + \int_0^1 |(\lambda.P)'(t)|\ \mathrm{d}t \\
&= |\lambda.P(a)| + \int_0^1 |\lambda.P'(t)|\ \mathrm{d}t && [\text{linéarité de la dérivation}] \\
&= |\lambda|\ |P(a)| + \int_0^1 |\lambda|\ |P'(t)|\ \mathrm{d}t && [\text{multiplicativité de la valeur absolue}] \\
&= |\lambda|\ \underbrace{\left(|P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|\ \mathrm{d}t\right)}_{N_a(P)} && \left[\text{linéarité de } \int_0^1\right]
\end{aligned}$$

- ***Inégalité triangulaire.*** Soient $P, Q \in \mathbf{R}[X]$. Nous calculons :

$$\begin{aligned}
N_a(P+Q) &= |(P+Q)(a)| + \int_0^1 |(P+Q)'(t)|\ \mathrm{d}t \\
&= |P(a)+Q(a)| + \int_0^1 |P'(t)+Q'(t)|\ \mathrm{d}t && [\text{linéarité de la dérivation}] \\
&\leqslant |P(a)| + |Q(a)| + \int_0^1 |P'(t)| + |Q'(t)|\ \mathrm{d}t && \left[\leqslant \Delta \text{ pour } |\cdot| \text{ et } \nearrow \text{ de } \int_0^1\right] \\
&= \underbrace{\left(|P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|\ \mathrm{d}t\right)}_{N_a(P)} + \underbrace{\left(|Q(a)| + \int_0^1 |Q'(t)|\ \mathrm{d}t\right)}_{N_a(Q)} && \left[\text{linéarité de } \int_0^1\right]
\end{aligned}$$

Q26. — Soient $a \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ et $b \in \mathbf{R}_{>1}$ tels que $a < b$. Démontrer que les normes N_a et N_b ne sont pas équivalentes.

- Nous raisonnons par l'absurde en supposant que les normes N_a et N_b sont équivalentes sur $\mathbf{R}[X]$. Il existe alors deux constantes réelles $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ telles que :

$$(\star) \qquad \forall\, P \in \mathbf{R}[X], \quad \alpha\, N_b(P) \leqslant N_a(P) \leqslant \beta\, N_b(P)\ .$$

- Nous nous intéressons aux monômes $X, X^2, X^3, X^4, X^5, \ldots$ pour rechercher une contradiction. Soit $n \in \mathbf{N}^*$.
  — Comme $N_b\left(X^n\right) > 0$ (cf. séparation de la norme N_b), nous déduisons de $(\star)$:

$$\alpha \leqslant \frac{N_a\left(X^n\right)}{N_b\left(X^n\right)} \leqslant \beta\ .$$

— D'autre part, nous calculons :

$$N_a(X^n) = a^n + \int_0^1 n\,t^{n-1}\ \mathrm{d}t = a^n + 1 \qquad \text{et} \qquad N_b(X^n) = b^n + 1\ .$$

En rassemblant les deux derniers résultats, il vient :

$$(\star\star) \qquad \alpha \leqslant \frac{a^n+1}{b^n+1} \leqslant \beta\ .$$

- Comme $b > 1$, $b^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et donc :

$$b^n + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} b^n\ .$$

Par suite :

$$\frac{a^n+1}{b^n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{a}{b}\right)^n + \frac{1}{b^n}$$

et comme $0 \leqslant \dfrac{a}{b} < 1$, nous en déduisons :

$$\frac{a^n+1}{b^n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\ .$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans $(\star\star)$, il vient $\alpha \leqslant 0$, ce qui contredit $\alpha > 0$.

Q27. — Soient $a \in [0,1]$ et $b \in [0,1]$. Démontrer que les normes N_a et N_b sont équivalentes.

Fixons un polynôme P à coefficients réels. D'après le théorème fondamental de l'analyse :

$$P(b) - P(a) = \int_a^b P'(t)\ \mathrm{d}t$$

et donc :

$$\begin{aligned}
|P(b)| &= \left| P(a) + \int_a^b P'(t)\ \mathrm{d}t \right| \\
&\leqslant |P(a)| + \left| \int_a^b P'(t)\ \mathrm{d}t \right| && \text{[Inégalité triangulaire pour } |\cdot|\text{]} \\
&\underset{(\star)}{\leqslant} |P(a)| + \int_{\min(a,b)}^{\max(a,b)} |P'(t)|\ \mathrm{d}t && \text{[majoration de la valeur absolue d'une intégrale]}
\end{aligned}$$

Comme $0 \leqslant \min(a,b) \leqslant \max(a,b) \leqslant 1$ et, pour tout $t \in [0,1]$, $|P'(t)| \geqslant 0$:

$$\int_0^1 |P'(t)|\ \mathrm{d}t = \underbrace{\int_0^{\min(a,b)} |P'(t)|\ \mathrm{d}t}_{\geqslant 0} + \int_{\min(a,b)}^{\max(a,b)} |P'(t)|\ \mathrm{d}t + \underbrace{\int_{\max(a,b)}^1 |P'(t)|\ \mathrm{d}t}_{\geqslant 0}$$

et donc :

$$\int_{\min(a,b)}^{\max(a,b)} |P'(t)| \, \mathrm{d}t \underset{(\star\star)}{\leqslant} \int_0^1 |P'(t)| \, \mathrm{d}t$$

Des deux inégalités $(\star)$ et $(\star\star)$, nous déduisons :

$$|P(b)| \leqslant |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)| \, \mathrm{d}t = N_a(P) \, .$$

En outre, puisque $|P(a)| \geqslant 0$:

$$\int_0^1 |P'(t)| \, \mathrm{d}t \leqslant |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)| \, \mathrm{d}t = N_a(P) \, .$$

En additionnant membre-à-membre ces deux dernières inégalités, nous obtenons :

$$N_b(P) = |P(b)| + \int_0^1 |P'(t)| \, \mathrm{d}t \leqslant 2\, N_a(P) \, .$$

Les hypothèses placées sur a et b étant identiques, nous en déduisons :

$$N_a(P) \leqslant 2\, N_b(P) \, .$$

Ainsi :

$$\frac{1}{2}\, N_a(P) \leqslant N_b(P) \leqslant 2\, N_a(P) \, .$$

5 Adhérence d'un sous-espace vectoriel

Soit $(E, ||\,.\,||)$ *un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel normé,* $\mathbf{K}$ *désignant* $\mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$.

Q28. — Soit $A \subset E$ une partie non vide, soit $x \in E$. Démontrer :

$$x \in \overline{A} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}} \text{ telle que } x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x.$$

Il s'agit d'une question de cours.

- $\boxed{\Rightarrow}$ Soit $x \in \overline{A}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $B\left(x, \dfrac{1}{n+1}\right) \cap A \neq \emptyset$, donc il existe $a_n \in A$ tel que :

$$0 \leqslant ||\, x - a_n \,|| \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

  D'après le théorème d'encadrement pour les suites réelles, $||\, x - a_n \,|| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge donc vers x.

- $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x. Soit alors $r > 0$. Il existe un $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $||\, x - a_n \,|| < r$, i.e. $a_n \in B(x, r) \cap A$. Ainsi, pour tout $r > 0$, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ et donc $x \in \overline{A}$.

Q29. — Démontrer que si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\overline{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Supposons que A est un sous-espace vectoriel de E.

- Le vecteur 0_E appartient à A, puisque A est un sous-espace vectoriel de E. La suite constante, de terme général 0_E, est donc une suite de points de A. Elle converge vers 0_E de manière évidente.
  Donc 0_E est la limite d'une suite convergente de points de A. D'après la question **Q28**, $0_E \in \overline{A}$.
- Soient $(x, y) \in \overline{A}^2$ et soient $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$. D'après la question 1, il existe deux suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}}$ telles que :

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \quad \text{et} \quad y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} y.$$

  Soit $n \in \mathbf{N}$. La partie A de E est stable par combinaison linéaire, puisque A est un sous-espace vectoriel de E. Donc $\lambda x_n + \mu y_n \in A$.
  Par théorème d'opérations sur les suites convergentes :

$$\lambda x_n + \mu y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda x + \mu y.$$

  Donc $\lambda x + \mu y$ est la limite d'une suite convergente de points de A. D'après la question 1, $\lambda x + \mu y \in \overline{A}$.

La partie $\overline{A}$ de E contient 0_E et est stable par combinaison linéaire. Ainsi $\overline{A}$ est-elle un sous-espace vectoriel de E.

Q30. — Commenter la question **Q29**, dans le cas où E est de dimension finie.

Supposons E de dimension finie et considérons un sous-espace vectoriel A de E. Alors A est également de dimension finie. Il est donc fermé dans E et, par conséquent, il coïncide avec son adhérence, i.e. $A = \overline{A}$. La question **Q29** devient alors une tautologie.

6 Propriétés topologiques de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$

Soit $n \geqslant 2$ un nombre entier naturel. On considère l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On note $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

On rappelle que l'application déterminant :

$$\det \colon \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}$$

est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, l'application :

$$\chi_M \ \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \lambda & \longmapsto & \det(M - \lambda . I_n) \end{array} \right.$$

est polynomiale de degré n.

Q31. — L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est-il fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$?

- Comme $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ sont équivalentes. Les propriétés topologiques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ne dépendent donc pas du choix d'une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Nous en considérons une quelconque (par exemple la norme associée au produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$), que nous notons $||\cdot||$.
- Pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, posons :

$$A_p := \frac{1}{p}\, I_n \ .$$

Comme, pour tout $p \in \mathbf{N}^*$:

$$\det(A_p) = \frac{1}{p^n} \neq 0$$

la suite de matrices $(A_p)_{p\in\mathbf{N}^*}$ est une suite de matrices dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.
- De plus pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, nous observons grâce à l'homogénéité de la norme $||\cdot||$:

$$\left|\left|\, A_p - 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{R})} \,\right|\right| = \frac{1}{p}\, ||\, I_n\, || \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0 \ .$$

Ainsi $A_p \xrightarrow[p\to+\infty]{||\cdot||} 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{R})}$.
- Nous avons construit une suite de matrices $(A_p)_{p\in\mathbf{N}^*} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})^{\mathbf{N}^*}$ qui converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vers la matrice nulle qui, elle, n'appartient pas à $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. Par caractérisation séquentielle des parties fermées d'un espace vectoriel normé, l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ n'est pas fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Q32. — Démontrer que l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

- Nous allons démontrer que $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})\backslash\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ grâce à la caractérisation séquentielle des parties fermées d'un espace vectoriel normé.
- Soit $(A_p)_{p\in\mathbf{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})\backslash\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, i.e. une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ non inversibles, que l'on suppose converger vers une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Nous démontrons que la matrice A vit dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \setminus \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, i.e. que la matrice A n'est pas inversible.
- Comme $\det\colon \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}$ est continue et comme $A_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} A$:

$$0 = \det(A_p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \det(A)$$

et donc $\det(A) = 0$. Nous avons bien établi que la matrice A n'est pas inversible.

Q33. — Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Justifier que

$$\exists\, \rho > 0, \quad \forall\, \lambda \in\,]0, \rho[\,, \quad M - \lambda.I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \ .$$

Nous considérons l'application

$$\chi_M \ \left|\ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \lambda & \longmapsto & \det(M - \lambda.I_n) \end{array}\right.$$

et nous scindons le raisonnement en deux parties, suivant que χ_M possède une racine réelle strictement positive ou non.

- *Cas où χ_M ne possède aucune racine réelle strictement positive.*
  Alors, pour tout $\lambda > 0$:
  $$\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda.I_n) \neq 0$$
  et donc $M - \lambda.I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. Ainsi, en posant $\rho := 1 > 0$, nous obtenons :
  $$\forall\, \lambda \in]0, \rho[\,, \quad M - \lambda.I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})\ .$$
- *Cas où χ_M possède au moins une réelle strictement positive.*
  L'ensemble
  $$\mathrm{Spec}_{\mathbf{R}_{>0}}(M) := \{\lambda \in \mathbf{R}_{>0}\ :\ \chi_M(\lambda) = 0\}$$
  des racines réelles strictement positives de χ_M est alors non vide. Comme χ_M n'est pas l'application nulle (elle est polynomiale de degré n), l'ensemble $\mathrm{Spec}_{\mathbf{R}_{>0}}(M)$ est de plus fini. Le nombre
  $$m := \min\left(\mathrm{Spec}_{\mathbf{R}_{>0}}(M)\right) \in \mathbf{R}_{>0}$$
  qui est la plus petite racine réelle strictement positive de χ_M, est ainsi bien défini. Alors, en posant $\rho := \dfrac{m}{2} > 0$, nous obtenons :
  $$\forall\, \lambda \in]0, \rho[\,, \quad M - \lambda.I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})\ .$$

Q34. — Démontrer que l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Nous allons construire une suite de matrices inversibles qui converge vers M et nous pourrons alors conclure grâce à la caractérisation séquentielle de la densité.
- D'après **Q33**, il existe un nombre $\rho > 0$ tel que, pour tout $\lambda \in]0, \rho[$, $M - \lambda.I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. Si nous posons $p_0 := \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{\lambda}\right) + 1 \in \mathbf{N}^*$, alors $0 < \dfrac{1}{p_0} < \lambda$. Nous en déduisons :
  $$\forall\, p \geqslant p_0, \quad \frac{1}{p} \in]0, \rho[$$
  puis que la suite
  $$\left(A_p := M - \frac{1}{p}.I_n\right)_{p \geqslant p_0}$$
  est une suite de matrices inversibles.
- Pour achever la démonstration, il nous reste à démontrer que $A_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} M$. Soit $||\cdot||$ une norme quelconque sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Pour tout $p \geqslant p_0$, nous établissons, grâce à l'homogénéité de la norme $||\cdot||$:
  $$||\, A_p - M\, || = \frac{1}{p}\, ||\, I_n\, || \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0\ .$$
  Ainsi $A_p \xrightarrow[p \to +\infty]{||\cdot||} M$.

Q35. — Application : si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, démontrer que, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$
$$\chi_{AB}(\lambda) = \chi_{BA}(\lambda)\ .$$

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $\lambda \in \mathbf{R}$ fixés. Nous allons démontrer que pour tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$:

$$\det(AB - \lambda.I_n) = \det(BA - \lambda.I_n)$$

en deux temps. Nous allons d'abord établir cette identité dans le cas où $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, puis l'étendre au cas général où $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ grâce à la densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ (cf. **Q34**) et à la continuité d'une application.

- Supposons $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. Alors :

$$\begin{array}{rcll}
\det(AB - \lambda.I_n) & = & \det(AB - \lambda.B^{-1}B) & \\
& = & \det((A - \lambda.B^{-1})\ B) & \\
& = & \det(A - \lambda.B^{-1})\ \det(B) & [\text{multiplicativité du déterminant}] \\
& = & \det(B)\ \det(A - \lambda.B^{-1}) & \\
& = & \det(B(A - \lambda.B^{-1})) & [\text{multiplicativité du déterminant}] \\
& = & \det(BA - B(\lambda.B^{-1})) & \\
& = & \det(BA - \lambda.BB^{-1}) & [\text{cf. structure de } \mathbf{R}\text{-algèbre de } \mathcal{M}_n(\mathbf{R})] \\
& = & \det(BA - \lambda.I_n)\ . &
\end{array}$$

- Les applications « multiplication à gauche par A » et « multiplication à droite par A » :

$$\mu_g \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ B & \longmapsto & AB \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \mu_d \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ B & \longmapsto & BA \end{array} \right.$$

  sont linéaires. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est un $\mathbf{R}$-espade vectoriel de dimension finie, elles sont donc également continues. Par ailleurs, l'application :

$$\tau \left| \begin{array}{ccc} (\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), ||\cdot||) & \longrightarrow & (\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), ||\cdot||) \\ M & \longmapsto & M - \lambda.I_n \end{array} \right.$$

  est 1-lipschitzienne donc continue. Nous en déduisons que les applications :

$$\varphi := \det \circ \tau \circ \mu_g \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ B & \longmapsto & \det(AB - \lambda.I_n) \end{array} \right.$$

  et

$$\psi := \det \circ \tau \circ \mu_d \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ B & \longmapsto & \det(BA - \lambda.I_n) \end{array} \right.$$

  sont continues, comme composées d'applications continues. D'après le point précédent, ces deux applications φ et ψ coïncident sur $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, qui est une partie dense de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ (cf. **Q34**). D'après le théorème de prolongement des identités par continuité et densité, les applications φ et ψ coïncident sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tout entier, i.e. :

$$\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \quad \det(AB - \lambda.I_n) = \det(BA - \lambda.I_n)\ .$$

Une partie A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est dite **connexe par arcs** *si, pour tout $(a_0, a_1) \in A^2$, il existe une application continue $\varphi\colon [0,1] \longrightarrow A$ telle que $\varphi(0) = a_0$ et $\varphi(1) = a_1$.*

Q36. — Démontrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ n'est pas connexe par arcs. On pourra raisonner par l'absurde et construire deux matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ de déterminant 1 et -1.

- Nous raisonnons par l'absurde, en supposant que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est connexe par arcs.
- Nous notons $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et nous considérons les matrices diagonales :

$$A_0 := -E_{1,1} + \sum_{i=2}^{n} E_{i,i} = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \qquad \text{et} \qquad A_1 := I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \ .$$

  Nous observons $\det(A_0) = -1$ et $\det(A_1) = 1$.
- Puisque nous avons supposé $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ connexe par arcs, il existe application continue

$$\varphi \colon [0,1] \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$$

  telle que $\varphi(0) = A_0$ et $\varphi(1) = A_1$. Comme l'application déterminant :

$$\det \colon \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}$$

  est également continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, l'application $f := \det \circ \varphi$:

$$f \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ M & \longmapsto & \det(\varphi(M)) \end{array} \right.$$

  est continue, comme composée d'applications continues. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\mathrm{Im}\,(f)$ est un intervalle de $\mathbf{R}$.
- Comme $f(A_0) = -1 \in \mathrm{Im}\,(f)$ et $f(A_1) = 1 \in \mathrm{Im}\,(f)$, il vient :

$$[-1,1] \subset \mathrm{Im}\,(f) \ .$$

  Ainsi $0 \in \mathrm{Im}\,(f)$ et donc il existe $t \in [0,1]$ tel que :

$$f(t) = \det(\varphi(t)) = 0 \ .$$

  La matrice $\varphi(t)$ est donc non inversible (puisque de déterminant nul) et inversible (puisqu'elle appartient au but de l'application φ). Contradiction.