M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Devoir surveillé n°3 (4h)

Algèbre linéaire et espaces vectoriels normés

Vendredi 22 octobre 2021

David BLOTTIÈRE

Consignes

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, **les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte**. Vous êtes invité à encadrer les résultats de vos calculs.

Si vous êtes amené à repérer ce qui peut vous sembler être une erreur d'énoncé, vous le signalerez sur votre copie et devrez poursuivre votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

Le sujet comporte six exercices indépendants les uns des autres. Vous êtes libre de les traiter dans l'ordre de votre choix.

1 Endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ annulé par $X^3 + X$

Soit f un endormorphisme non nul de $\mathbf{R}^3$ tel que

$$f^3 + f = 0_{\mathcal{L}(\mathbf{R}^3)}$$

où $f^3 = f \circ f \circ f$.

Q1. — Démontrer : $\mathbf{R}^3 = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$.

Q2. — Justifier que $\dim(\operatorname{Ker}(f)) \neq 3$.

Q3. — Démontrer que $\dim(\operatorname{Ker}(f)) \neq 0$.

Q4. — Démontrer que $\operatorname{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ qui est stable par f (pour tout $u \in \operatorname{Im}(f)$, $f(u) \in \operatorname{Im}(f)$) et qui a dimension 1 ou 2.

Soit g l'endomorphisme de $\operatorname{Im}(f)$ induit par f, i.e. :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \operatorname{Im}(f) & \longrightarrow & \operatorname{Im}(f) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right. .$$

Q5. — Démontrer que g est un automorphisme de $\operatorname{Im}(f)$.

Q6. — Démontrer que $g^2 + \mathrm{id}_{\operatorname{Im}(f)} = 0$.

Q7. — En déduire que $\dim(\operatorname{Im}(f)) = 2$.

Q8. — Soit x un vecteur non nul de $\operatorname{Im}(f)$. Démontrer que la famille $(x, f(x))$ est une base de $\operatorname{Im}(f)$.

Q9. — Démontrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^3$ telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

2 Sous-espaces vectoriels de $\mathbf{K}[X]$ stables par dérivation

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{K}_n[X]$ désigne la partie de $\mathbf{K}[X]$ définie par :

$$\mathbf{K}_n[X] = \{P \in \mathbf{K}[X] \ : \ \deg(P) \leqslant n\} \ .$$

Un sous-espace vectoriel F de $\mathbf{K}[X]$ est dit **stable par dérivation** *si pour tout $P \in F$, $P' \in F$.*

Q10. — Soit $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que $\mathbf{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$ stable par dérivation.

Q11. — Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$ stable par dérivation. On suppose que F contient un polynôme P non nul et on pose $n = \deg(P) \in \mathbf{N}$. Démontrer $\mathbf{K}_n[X] \subset F$.

Q12. — Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$ stable par dérivation. On suppose que F est distinct de $\left\{0_{\mathbf{K}[X]}\right\}$ et de $\mathbf{K}[X]$. Démontrer qu'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $F = \mathbf{K}_n[X]$.

Q13. — Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{K}[X]$ stables par dérivation.

3 Réduction des endomorphismes nilpotents

Soit $\mathbf{K}$ un sous-corps de $\mathbf{C}$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est dite **triangulaire supérieure stricte** *si elle est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux nuls. L'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est noté $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbf{K})$. Ainsi :*

$$\mathcal{T}_n^{++}(\mathbf{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \ : \ \forall\, 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n, \ [M]_{i,j} = 0\} \ .$$

Q14. — Démontrer que $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbf{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. En donner une base et préciser sa dimension.

Q15. — Démontrer que $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbf{K})$ est stable par produit, i.e. que :

$$\forall\, (A, B) \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbf{K}) \times \mathcal{T}_n^{++}(\mathbf{K}), \quad AB \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbf{K}) \ .$$

Un endomorphisme u d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel est dit **nilpotent** *s'il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que u^p est l'endomorphisme nul, où u^p est la puissance p-ième de u pour la composition d'applications.*

On se propose de démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$\mathcal{P}(n)$ | *Pour tout $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n,*
pour tout endomorphisme nilpotent u de E,
il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbf{K})$.

en raisonnant par récurrence.

Initialisation. Pour le moment, nous considérons un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension 1 et u un endomorphisme nilpotent de E. Nous considérons également un vecteur non nul x de E, de sorte que $\mathcal{B} := (x)$ est une base de E.

Q16. — Justifier qu'il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $u(x) = \lambda . x$.

Q17. — Démontrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $u^k(x) = \lambda^k.x$.

Q18. — Démontrer alors que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = (0)$, ce qui établit $\mathcal{P}(1)$.

***Hérédité.** Soit $n \in \mathbf{N}^*$ fixé. Nous supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $(n+1)$ et soit u un endomorphisme nilpotent de E. Soit $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.*

Q19. — Démontrer $\mathrm{Ker}\,(u) \neq \{0_E\}$.

Soient e_1 un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}\,(u)$ et F un supplémentaire de la droite vectorielle $\mathrm{Vect}\,(e_1)$ dans E. On note p la projection de E sur F parallèlement à $\mathrm{Vect}\,(e_1)$:

$$p \left| \begin{array}{ccc} E = \mathrm{Vect}\,(e_1) \oplus F & \longrightarrow & E \\ x = \underbrace{y}_{\in \mathrm{Vect}(e_1)} + \underbrace{z}_{\in F} & \longmapsto & p(x) = z\,. \end{array} \right.$$

Q20. — Démontrer : $u \circ p = u$.

Q21. — Démontrer que l'application v définie par :

$$v \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & p(u(x)) \end{array} \right.$$

est un endomorphisme nilpotent de F.

Comme F est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n, l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$, nous permet d'obtenir une base $(e_2, \ldots, e_{n+1})$ de F telle que $\mathrm{Mat}_{(e_2,\ldots,e_{n+1})}(v) \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbf{K})$.

Q22. — Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$. Démontrer que $u(e_k) \in \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_{k-1})$.

Q23. — En déduire l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{T}_{n+1}^{++}(\mathbf{K})$.

On cherche à présent une traduction matricielle du résultat précédemment obtenu pour les endomorphismes nilpotents.

*Une matrice carrée M est dite **nilpotente** s'il existe $p \in \mathbf{N}^*$ telle que M^p est la matrice nulle, où M^p est la puissance p-ième de M pour la multiplication.*

Q24. — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice nilpotente. Démontrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $T \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbf{K})$ telles que $M = P\,T\,P^{-1}$.

4 Étude de normes sur $\mathbf{R}[X]$

Pour tout $a \in \mathbf{R}_{\geq 0}$, on pose :

$$\left| \begin{array}{cccc} N_a & : & \mathbf{R}[X] & \to & \mathbf{R} \\ & & P & \mapsto & |P(a)| + \displaystyle\int_0^1 |P'(t)|\ \mathrm{d}t. \end{array} \right.$$

Q25. — Soit $a \in \mathbf{R}$. Démontrer que N_a est une norme sur $\mathbf{R}[X]$.

Q26. — Soient $a \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ et $b \in \mathbf{R}_{>1}$ tels que $a < b$. Démontrer que les normes N_a et N_b ne sont pas équivalentes.

Q27. — Soient $a \in [0,1]$ et $b \in [0,1]$. Démontrer que les normes N_a et N_b sont équivalentes.

5 Adhérence d'un sous-espace vectoriel

Soit $(E, ||\,.\,||)$ *un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel normé,* $\mathbf{K}$ *désignant* $\mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$.

Q28. — Soit $A \subset E$ une partie non vide, soit $x \in E$. Démontrer :

$$x \in \overline{A} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\,(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}} \text{ telle que } x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x.$$

Q29. — Démontrer que si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\overline{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Q30. — Commenter la question **Q29**, dans le cas où E est de dimension finie.

6 Propriétés topologiques de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$

Soit $n \geqslant 2$ *un nombre entier naturel. On considère l'espace vectoriel normé* $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$*. On note* $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ *l'ensemble des matrices inversibles de* $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

On rappelle que l'application déterminant :

$$\det\colon \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}$$

est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ *et que, pour tout* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$*, l'application :*

$$\chi_M \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \lambda & \longmapsto & \det(M - \lambda.I_n) \end{array}\right.$$

est polynomiale de degré n.

Q31. — L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est-il fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$?

Q32. — Démontrer que l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Q33. — Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Justifier que

$$\exists\,\rho > 0, \quad \forall\,\lambda \in\,]0, \rho[\,, \quad M - \lambda.I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \,.$$

Q34. — Démontrer que l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Q35. — Application : si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, démontrer que, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$

$$\chi_{AB}(\lambda) = \chi_{BA}(\lambda) \,.$$

Une partie A *de* $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ *est dite* **connexe par arcs** *si, pour tout* $(a_0, a_1) \in A^2$*, il existe une application continue* $\varphi\colon [0,1] \longrightarrow A$ *telle que* $\varphi(0) = a_0$ *et* $\varphi(1) = a_1$.

Q36. — Démontrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ n'est pas connexe par arcs. On pourra raisonner par l'absurde et construire deux matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ de déterminant 1 et -1.