M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Un corrigé du devoir surveillé n°2 (4h)

Séries numériques et révisions d'algèbre linéaire

Samedi 25 septembre 2021

David BLOTTIÈRE

Consignes

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, *les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte*. Vous êtes invité à encadrer les résultats de vos calculs.

Si vous êtes amené à repérer ce qui peut vous sembler être une erreur d'énoncé, vous le signalerez sur votre copie et devrez poursuivre votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

Le sujet comporte deux exercices et trois problèmes indépendants les uns des autres. Vous êtes libre de les traiter dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1. – Règle de Raabe-Duhamel

Q1. — Soit β un nombre réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $v_n = \dfrac{1}{n^\beta}$. Former un développement asymptotique à deux termes du quotient $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\beta = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^\beta = \exp\left(\beta \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right)$$

Nous rappelons :

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x + \mathrm{o}\left(x\right).$$

Comme $-\dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, nous en déduisons :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{n+1} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(-\frac{\beta}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Nous rappelons :

$$\exp(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \mathrm{o}\left(x\right).$$

Comme $-\dfrac{\beta}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, nous en déduisons :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\beta}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Q2. — Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ deux suites de nombres réels strictement positifs. On suppose qu'à partir d'un certain rang :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Démontrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$.

Par hypothèse, il existe $n_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que :

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}\,.$$

Comme les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ ont des termes strictement positifs, nous en déduisons que :

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leqslant \frac{u_n}{v_n}\,.$$

La suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ est donc décroissante. Ainsi est-elle majorée par son premier terme, i.e. :

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad 0 \leqslant \frac{u_n}{v_n} \leqslant \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}}\,.$$

En posant $M := \max\left(\dfrac{u_1}{v_1}, \dfrac{u_2}{v_2}, \ldots, \dfrac{u_{n_0-1}}{v_{n_0-1}}, \dfrac{u_{n_0}}{v_{n_0}}\right)$, il vient donc :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^*, \quad 0 \leqslant \frac{u_n}{v_n} \leqslant M$$

d'où $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$.

Q3. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de nombres réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $\alpha > 1$ tel que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Démontrer, à l'aide d'une comparaison avec une série de Riemann, que la série $\sum u_n$ converge.

Soit β un réel tel que $1 < \beta < \alpha$, par exemple $\beta = \dfrac{\alpha+1}{2}$. Posons, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$v_n = \frac{1}{n^\beta}.$$

D'après **Q1** :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\beta}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi :

$$n\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \beta - \alpha + \mathrm{o}(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \beta - \alpha < 0.$$

Donc $n\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}-\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$, et par suite $\frac{u_{n+1}}{u_n}-\frac{v_{n+1}}{v_n}$ est négatif à partir d'un certain rang, i.e. :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

à partir d'un certain rang.

D'après **Q2**, $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(v_n\right)$. La série $\sum v_n$ est convergente (critère de Riemann, $\beta > 1$). Par sommation d'une relation de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ converge.

Q4. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de nombres réels strictement positifs. On suppose cette fois qu'il existe $0 < \alpha < 1$ tel que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1-\frac{\alpha}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Démontrer que la série $\sum u_n$ diverge.

Soit β un réel tel que $\alpha < \beta < 1$, par exemple $\beta = \frac{\alpha+1}{2}$. Posons, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$v_n = \frac{1}{n^\beta}.$$

D'après **Q1** :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1-\frac{\beta}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi :

$$n\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}-\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \beta-\alpha+o(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \beta-\alpha > 0.$$

Donc $n\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}-\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$, et par suite $\frac{u_{n+1}}{u_n}-\frac{v_{n+1}}{v_n}$ est positif à partir d'un certain rang, i.e. :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

à partir d'un certain rang.

D'après **Q2**, $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(u_n\right)$. La série $\sum v_n$ est divergente (critère de Riemann, $\beta < 1$). Par sommation d'une relation de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ diverge.

Q5. — Soit a et b des nombres réels strictement positifs. Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \prod\limits_{k=0}^{n-1} \frac{a+k}{b+k}$.

Posons $u_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a+k}{b+k}$, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a+n}{b+n} = \left(1 + \frac{a}{n}\right) \frac{1}{1 + \frac{b}{n}}.$$

Nous rappelons :

$$\frac{1}{1+x} \underset{x \to 0}{=} 1 - x + \mathrm{o}(x).$$

Comme $\frac{b}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, nous en déduisons :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \to +\infty}{=} \left(1 + \frac{a}{n}\right) \left(1 - \frac{b}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n \to +\infty}{=} 1 - \frac{b-a}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

- Si $b - a > 1$, alors la série $\sum u_n$ converge d'après **Q3**.
- Si $b - a < 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge d'après **Q4**. Nous avons établi le résultat pour $0 < \alpha < 1$, mais les mêmes arguments livrent le resultat pour $\alpha < 1$, possiblement négatif.
- Il reste à étudier le cas où $b - a = 1$, i.e. $b = a + 1$. Remarquant un télescopage, nous obtenons, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:
$$u_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a+k}{a+k+1} = \frac{a}{a+n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{a}{n} > 0.$$
Comme la série harmonique diverge, le théorème de sommation des équivalents pour les séries à termes positifs livre la divergence de la série $\sum u_n$.

Exercice 2. – Familles libres

Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$ et $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$.

Q6. — Rappeler la définition de l'assertion : « la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre ».

La famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre si :

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n, \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i . u_i = 0_E \Longrightarrow (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (0, \ldots, 0).$$

Q7. — Démontrer que la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est liée si et seulement s'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $u_i \in \mathrm{Vect}(\{u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n\})$.

On raisonne par double implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est liée. D'après **Q6**, il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ tel que

$$(\star) \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i . u_i = 0_E$$

et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$. Comme le vecteur $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ n'est pas nul, au moins une de ses composantes est non nulle, i.e. il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\lambda_i \neq 0$. De $(\star)$ on déduit :

$$\lambda_i . u_i = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j . u_j$$

puis, comme $\lambda_i \neq 0$:

$$u_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(-\frac{\lambda_j}{\lambda_i} \right) . u_j \in \mathrm{Vect}\left(\{u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n\} \right) .$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $u_i \in \mathrm{Vect}\left(\{u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n\} \right)$. Il existe alors des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_n$ tels que $u_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j . u_j$. d'où :

$$(\star\star) \qquad -u_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j . u_j = 0_E .$$

Si nous posons $\lambda_i := -1$, $(\star\star)$ livre :

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j . u_j = 0_E$$

Comme $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$, la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est liée.

Q8. — Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbf{R}$ pour que la famille

$$\mathcal{B}_a := ((a, 1, 1), (1, a, 1), (1, 1, a))$$

soit une base de $\mathbf{R}^3$.

- Soit $a \in \mathbf{R}$. La famille $\mathcal{B}_a$ est libre si et seulement si le système linéaire

$$S_a \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & ay & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & az & = & 0 \end{array} \right.$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ possède pour unique solution $(0, 0, 0)$. Nous allons donc résoudre le système S_a à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauß, en prenant soin de ne jamais diviser par une quantité qui pourrait être nulle pour certaines valeurs de a.

$$S_a \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & ay & + & z & = & 0 \\ ax & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & az & = & 0 \end{array}\right. \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & ay & + & z & = & 0 \\ & & (1-a^2)y & + & (1-a)z & = & 0 \\ & & (1-a)y & + & (a-1)z & = & 0 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - aL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

Nous observons que la valeur $a = 1$ joue un rôle singulier et nous scindons alors notre étude en deux parties.

— Cas où $a = 1$. Le système S_1 est équivalent à :

$$x + y + z = 0$$

dont l'ensemble solution est $\operatorname{Vect}(\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}) \neq \{0_{\mathbf{R}^3}\}$. La famille $\mathcal{B}_1$ est donc liée.

— Cas où $a \neq 1$. Nous pouvons diviser par $(1-a) \neq 0$, pour obtenir :

$$S_a \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & ay & + & z & = & 0 \\ & & (1+a)y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2/(1-a) \\ L_3 \leftarrow L_3/(1-a) \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & ay & + & z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \\ & & (1+a)y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & ay & + & z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \\ & & & & (2+a)z & = & 0 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - (1+a)L_2 \end{array}.$$

Il apparait à présent -2 comme valeur singulière et nous distinguons de nouveau deux cas.

— Cas $a = -2$. Le système S_{-2} est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \end{array}\right..$$

dont l'ensemble solution est $\operatorname{Vect}(\{(1,1,1)\}) \neq \{0_{\mathbf{R}^3}\}$. La famille $\mathcal{B}_{-2}$ est donc liée.

— Cas $a \neq 1$ et $a \neq -2$. Nous pouvons diviser par $(a+2) \neq 0$, pour obtenir :

$$S_a \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \\ & & & & z & = & 0 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3/(a+2) \end{array}.$$

dont l'ensemble solution est $\{0_{\mathbf{R}^3}\}$. La famille $\mathcal{B}_a$ est donc libre.

- D'après l'étude précédente, si $a \in \{-2, 1\}$ alors la famille $\mathcal{B}_a$ n'est pas une base de $\mathbf{R}^3$. Dans le cas contraire, nous avons établi que la famille $\mathcal{B}_a$ est libre. Comme elle comporte $3 = \dim(\mathbf{R}^3)$ vecteurs, elle forme une base de $\mathbf{R}^3$. Ainsi :

$$\mathcal{B}_a \text{ est une base de } \mathbf{R}^3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (a \neq -2 \text{ et } a \neq 1)\,.$$

Q9. — Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice diagonalement dominante, i.e. telle que :

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!], \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}| \ .$$

Démontrer que les colonnes de la matrice A :

$$C_1 := \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} \ , \ C_2 := \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{n,2} \end{pmatrix} \ , \ \ldots \ , \ C_n := \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix}$$

forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Qu'en déduire ?

- Comme la famille $(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ comporte $n = \dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}))$ vecteurs, elle forme une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ si et seulement si elle est libre.
- Nous raisonnons par l'absurde et nous supposons la famille $(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ liée. Il existe donc des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls tels que

$$(\star) \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j . C_j = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})} \ .$$

- Introduisons un indice $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $|\lambda_i|$ soit le plus grand des nombres $|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_n|$. Ainsi :

$$(\star\star) \qquad \forall\, j \in [\![1, n]\!], \quad |\lambda_i| \geqslant |\lambda_j| \ .$$

  En outre, comme au moins un des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ est non nul, $\lambda_i > 0$.
- Comme un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ est nul si et seulement si ses n composantes sont nulles, l'identité $(\star)$ livre :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}\lambda_j = 0 \quad , \quad \sum_{j=1}^{n} a_{2,j}\lambda_j = 0 \quad , \quad \ldots \quad , \quad \sum_{j=1}^{n} a_{n,j}\lambda_j = 0 \ .$$

  En particulier, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\lambda_j = 0$, d'où $a_{i,i}\lambda_i = -\displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{i,j}\lambda_j$. Nous en déduisons :

$$|a_{i,i}|\ |\lambda_i| = |a_{i,i}\lambda_i| = \left| -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{i,j}\lambda_j \right| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|\ |\lambda_j|$$

grâce à la multiplicativité de la valeur absolue et à l'inégalité triangulaire. Comme $|\lambda_i| > 0$, il vient :

$$|a_{i,i}| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}| \, \frac{|\lambda_j|}{|\lambda_i|} \; .$$

D'après $(\star\star)$, pour tout $j \in [\![1, n]\!] \setminus \{i\}$, $\dfrac{|\lambda_j|}{|\lambda_i|} \leqslant 1$, d'où :

$$|a_{i,i}| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$$

qui contredit le fait que la matrice A est diagonalement dominante.

- Les vecteurs colonnes de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Le rang de la matrice A est donc n et, par suite, la matrice A est inversible.

Remarque. Les matrices diagonalement dominantes permettent de construire très simplement des matrices inversibles. Sauriez-vous (par exemple) en construire une de format 4×4 ?

Q10. — Énoncer et démontrer le théorème des degrés échelonnés.

- Énoncé. Soit $n \in \mathbf{N}_{\geq 2}$. Soient $P_1, P_2, \ldots, P_n$ des polynômes à coefficients dans $\mathbf{C}$ tels que :

$$0 \leqslant \deg(P_1) < \deg(P_2) < \ldots < \deg(P_n) \; .$$

Alors la famille $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ est libre.

- Démonsration. Nous raisonnons par récurrence sur l'entier $n \geqslant 2$.
  . Initialisation à $n = 2$. Soient P_1 et P_2 deux polynômes à coefficients dans $\mathbf{C}$ tels que :

$$(\star) \qquad 0 \leqslant \deg(P_1) < \deg(P_2) \; .$$

Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}$ tels que :

$$(\star\star) \qquad \lambda_1.P_1 + \lambda_2.P_2 = 0_{\mathbf{C}[X]} \; .$$

Si $\lambda_2 \neq 0$, alors $P_2 = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}.P_1$. Comme le degré de $-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}.P_1$ est inférieur ou égal à $\deg(P_1)$, il vient $\deg(P_2) \leqslant \deg(P_1)$, ce qui contredit $(\star)$. Donc $\lambda_2 = 0$.
L'identité $(\star\star)$ s'écrit alors $\lambda_1.P_1 = 0_{\mathbf{C}[X]}$. D'après $(\star)$, $P_1 \neq 0_{\mathbf{C}[X]}$ et donc $\lambda_1 = 0$.
Nous avons établi $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. La famille (P_1, P_2) est donc libre.
  . Hérédité. Soit $n \in \mathbf{N}_{\geq 2}$. On suppose que pour tout $(P_1, P_2, \ldots, P_n) \in \mathbf{C}[X]^n$ tel que

$$0 \leqslant \deg(P_1) < \deg(P_2) < \ldots < \deg(P_n)$$

la famille $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ est libre.
Soient $(P_1, P_2, \ldots, P_n, P_{n+1}) \in \mathbf{C}[X]^{n+1}$ tel que :

$$(\star\star\star) \qquad 0 \leqslant \deg(P_1) < \deg(P_2) < \ldots < \deg(P_n) < \deg(P_{n+1}) \; .$$

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}) \in \mathbf{C}^{n+1}$ tel que :

$$(\star\star\star\star) \qquad \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k.P_k = 0_{\mathbf{C}[X]} \ .$$

Si $\lambda_{n+1} \neq 0$, alors nous déduisons de $(\star\star\star\star)$:

$$P_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_{n+1}}\right) P_k \ .$$

Le polynôme P_{n+1} est donc une combinaison linéaire de polynômes de degrés inférieurs ou égaux à $\deg(P_n)$ d'après $(\star\star\star)$. Son degré est donc lui aussi inférieur ou égal à $\deg(P_n)$, d'où $\deg(P_{n+1}) \leqslant \deg(P_n)$, ce qui contredit $(\star)$. Donc $\lambda_n = 0$.
L'identité $(\star\star\star\star)$ s'écrit alors :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k.P_k = 0_{\mathbf{C}[X]} \ .$$

D'après $(\star\star\star)$, $0 \leqslant \deg(P_1) < \deg(P_2) < \ldots < \deg(P_n)$. Par hypothèse de récurrence, la famille $(P_1, \ldots, P_n)$ est libre. Ainsi $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.
Nous avons établi $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \lambda_{n+1} = 0$. La famille $(P_1, P_2, \ldots, P_n, P_{n+1})$ est donc libre.

Remarque. On peut déduire du théorème des degrés échelonnés le résultat suivant : si $n \in \mathbf{N}^*$*, si, pour tout* $k \in [\![0, n]\!]$, P_k *est un polynôme de degré* k*, alors la famille* $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ *est une base de* $\mathbf{K}_n[X]$*. En effet, comme :*

$$0 \leqslant \deg(P_0) = 0 < \deg(P_1) = 1 < \ldots < \deg(P_n) = n$$

la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ *est libre. Comme elle comporte* $n+1 = \dim(K_n[X])$ *vecteurs, elle forme une base de* $\mathbf{K}_n[X]$.

Problème 1. – Valeurs approchées de $\ln(2)$

Soit $x \in]-1, 1]$.

Q11. — Soit n un nombre entier naturel non nul. Démontrer l'égalité $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i x^i + \dfrac{(-1)^n x^n}{1+x}$.

C'est la formule pour la somme des termes d'une suite géométrique de raison $-x \neq 1$.

Q12. — En déduire l'égalité $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i} x^i + \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t} \, \mathrm{d}t$.

Il suffit d'intégrer l'égalité précédente sur le segment borné par 0 et x, sur lequel toutes les fonctions concernées sont continues.

Q13. — Démontrer que la série $\sum_{i\geqslant 1} \frac{(-1)^{i-1}}{i} x^i$ converge et que $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} x^i = \ln(1+x)$.

D'après **Q12**, il suffit de montrer que pour tout $x \in]-1,1[$

$$I_n(x) := \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\, dt$$

a pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$. Nous distinguons deux cas.

- Cas où $x \geqslant 0$
  Supposons $x \geqslant 0$. Alors :
  $$0 \leqslant \left| \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t} \right| \leqslant \int_0^x \left| \frac{(-1)^n t^n}{1+t} \right| dt \leqslant \int_0^x t^n\, dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$
  Par théorème d'encadrement, $|I_n(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $I_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- Cas où $x < 0$
  Supposons $x < 0$. Alors :
  $$0 \leqslant \left| \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t} \right| \leqslant \int_x^0 \left| \frac{(-1)^n t^n}{1+t} \right| dt \leqslant \frac{1}{1+x} \int_x^0 |t|^n\, dt \leqslant \frac{1}{1+x} \int_x^0 (-t)^n\, dt = \frac{(-x)^{n+1}}{n+1}\ .$$
  Comme $\frac{(-x)^{n+1}}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, le théorème d'encadrement livre $|I_n(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc
  $$I_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\ .$$

Q14. — Démontrer les identités $\ln(2) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i}$ et $\ln(2) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i\, 2^i}$.

La première relation se déduit de **Q13** en prenant $x = 1$; la deuxième en prenant $x = -\frac{1}{2}$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite décroissante de nombres réels, qui converge vers 0. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} u_i\ .$$

Q15. — Démontrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(S_{2n-1})_{n\in\mathbf{N}^*}$ convergent vers une limite commune.

On a, pour tout $p \geqslant 1$
$$S_{p+2} - S_p = (-1)^{p+1}(u_{p+2} - u_{p+1})$$
est du signe de $(-1)^p$ puisque la suite (u_n) décroît. En prenant $p = 2n$ (respectivement $2n-1$), on en déduit la croissance de la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbf{N}^*}$ (respectivement la décroissance de $(S_{2n-1})_{n\in\mathbf{N}^*}$).
D'autre part, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$

$$|S_{2n} - S_{2n-1}| = \left|(-1)^{2n-1}u_{2n}\right| = |u_{2n}|.$$

La suite (u_n) converge vers 0, donc $u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (suite extraite) et par suite $|u_{2n}| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi $|S_{2n} - S_{2n-1}| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $S_{2n} - S_{2n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(S_{2n-1})_{n\in\mathbf{N}^*}$ sont donc adjacentes. Par le théorème des suites adjacentes, les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(S_{2n-1})_{n\in\mathbf{N}^*}$ convergent donc vers une limite commune.

Q16. — En déduire que la série $\sum(-1)^{n-1}u_n$ est convergente. Sa somme est notée S dans la suite.

Les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(S_{2n-1})_{n\in\mathbf{N}^*}$ convergent vers une même limite donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge (suite des termes d'indices pairs et suite des termes d'indices impairs). Par définition même, la série $\sum(-1)^{n-1}u_n$ converge.
Remarquons que nous venons de redémontrer le critère des séries alternées.

Q17. — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $S_{2n} \leqslant S \leqslant S_{2n-1}$.

La somme S de la série $\sum(-1)^{n-1}u_n$ est également la limite commune des suites (S_{2n}) et (S_{2n-1}).
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Le théorème des suites adjacentes nous livre également des inégalités

$$S_2 \leqslant S_{2n} \leqslant \sup_{p\in\mathbf{N}*} S_{2p} = S = \inf_{p\in\mathbf{N}*} S_{2p-1} \leqslant S_{2n-1} \leqslant S_1$$

pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, desquelles on prélève les inégalités $S_{2n} \leqslant S \leqslant S_{2n-1}$.

Q18. — En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $|S - S_n| \leqslant u_n$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

- Cas où n est pair
  Supposons n pair et écrivons le $n = 2p$, où $p \in \mathbf{N}^*$. D'après la question précédente :

  $$0 \leqslant S - S_{2p} \leqslant S_{2p-1} - S_{2p} = -(-1)^{2p-1}u_{2p} = u_{2p}$$

  d'où $|S - S_n| \leqslant u_n$.
- Cas où n est impair
  Supposons n impair et écrivons le $n = 2p-1$, où $p \in \mathbf{N}^*$. D'après la question précédente :

  $$-u_{2p} = (-1)^{2p-1}u_{2p} = S_{2p} - S_{2p-1} \leqslant S - S_{2p-1} \leqslant 0$$

d'où $|S-S_{2p-1}| \leqslant u_{2p}$. La suite (u_n) étant décroissante, $u_{2p} \leqslant u_{2p-1}$. Ainsi $|S-S_n| \leqslant u_n$.

Q19. — Soit $p \in \mathbf{N}$. Déterminer un nombre entier naturel N_p tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i}$ est une valeur approchée de $\ln(2)$ à 10^{-p}, pour tout entier naturel $n \geqslant N_p$.

On applique **Q16** avec $u_n = \dfrac{1}{n}$. On a alors, avec les notations de **Q16** et grâce à la première relation de **Q14** :

$$|\ln(2) - S_n| \leqslant \frac{1}{n}$$

pour tout $n \geqslant 1$. On peut donc prendre $N_p = 10^p$.

Soit $p \in \mathbf{N}$. *On se propose de calculer une valeur approchée de* $\ln(2)$ *à* 10^{-p}*, en utilisant les sommes partielles :*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\,2^i}$$

où $n \in \mathbf{N}^*$.

Q20. — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose :

$$R_n = \sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{1}{i\,2^i}\ .$$

Justifier l'inégalité $0 \leqslant R_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

On a pour tout $n \geqslant 1$

$$0 \leqslant R_n \leqslant \sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}.$$

Q21. — Déterminer un nombre entier naturel N'_p tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\,2^i}$ est une valeur approchée de $\ln(2)$ à 10^{-p}, pour tout entier naturel $n \geqslant N'_p$.

Puisque $R_n = \ln(2) - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i2^i}$ et que $R_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$, il suffit d'avoir $\dfrac{1}{2^{N'_p}} \leqslant 10^{-p}$ soit $N'_p \geqslant \dfrac{\ln 10}{\ln 2}p$. Si on tient vraiment à un entier, on peut donc prendre $N'_p = 1 + E\left(\dfrac{\ln 10}{\ln 2}\,p\right)$

Q22. — Comparer N_p et N'_p.

N_p dépend exponentiellement de p, alors que N'_p est majoré par $2 + \dfrac{\ln 10}{\ln 2}\, p$, fonction affine ; les croissances comparées montrent que N_p tend « beaucoup plus vite » que N'_p vers $+\infty$.

Problème 2. – Point(s) fixe(s) d'une fonction

Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction telle que :

$$f([a,b]) \subset [a,b]\ .$$

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par la donnée de $u_0 \in [a,b]$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

valable pour tout $n \in \mathbf{N}$. On rappelle qu'un point fixe de f est une solution de l'équation

$$f(x) = x$$

d'inconnue $x \in [a,b]$.

Q23. — On suppose dans cette question **Q23** que f est dilatante, i.e. que :

$$\forall\,(x,y) \in [a,b]^2 \qquad |f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|\ .$$

Établir une condition nécessaire et suffisante sur u_0 pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

Supposons que la suite (u_n) converge. Soit ℓ la limite de (u_n). Grâce au caractère dilatant de f, on observe :

$$|u_0 - u_1| \leqslant |u_1 - u_2| \leqslant |u_2 - u_3| \leqslant \ldots \leqslant |u_n - u_{n+1}| \leqslant \ldots$$

Plus formellement, un nombre entier n étant fixé, on démontre par récurrence sur p que pour tout $p \in \mathbf{N}$:

$$|u_n - u_{n+1}| \leqslant |u_{n+p} - u_{n+p+1}|.$$

En faisant tendre p vers $+\infty$ dans la précédente relation, il vient

$$0 \leqslant |u_n - u_{n+1}| \leqslant |\ell - \ell| = 0.$$

Donc $u_n = u_{n+1}$.
Nous venons de prouver que si la suite (u_n) converge, alors elle est constante. La réciproque est claire.
Donc (u_n) converge si et seulement si elle est constante, i.e. si et seulement si u_0 est un point fixe de f.

*Dans les questions **Q24**–**Q28**, on suppose que f est contractante, i.e. que :*

$$\exists\, k \in [0,1[\qquad \forall\,(x,y) \in [a,b]^2 \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant k\ |x - y|\ .$$

et on se propose de démontrer que f possède un unique point fixe.

Q24. — Démontrer que si f admet un point fixe, alors celui-ci est unique.

Soient x_1 et x_2 des points fixes de f. Grâce au caractère contractant de f, nous avons

$$|x_1 - x_2| \leqslant k|x_1 - x_2|.$$

Si $|x_1 - x_2| \neq 0$, alors la précédente relation implique $1 \leqslant k$, ce qui contredit $0 \leqslant k < 1$.
Donc $|x_1 - x_2| = 0$, i.e. $x_1 = x_2$.

Q25. — Démontrer que f est continue sur $[a, b]$.

Nous pourrions citer le cours : la fonction f est k-lipschitzienne, donc uniformément continue, donc continue, mais la formulation de la question incite fortement à proposer une démonstration.
Si $k = 0$, la fonction f est constante dont continue. Supposons donc $k \in]0, 1[$.
Soit $x_0 \in [a, b]$. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\delta := \dfrac{\varepsilon}{k}$. Si $x \in [a, b]$ vérifie $|x - x_0| \leqslant \delta$, alors :

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant k|x - x_0| \leqslant k\delta = \varepsilon.$$

La fonction f est donc continue en x_0.

Q26. — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|u_{n+1} - u_n| \leqslant k^n \ |u_1 - u_0|$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons

$$\mathcal{P}(n) \ : \ |u_{n+1} - u_n| \leqslant k^n \ |u_1 - u_0|.$$

- Initialisation
  $\mathcal{P}(0)$ s'écrit $|u_{0+1} - u_0| \leqslant k^0 \ |u_1 - u_0|$. Elle est donc vraie.
- Hérédité
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un entier naturel n fixé.

$$\begin{array}{rcll} |u_{n+2} - u_{n+1}| & = & |f(u_{n+1}) - f(u_n)| & \\ & = & k\,|u_{n+1} - u_n| & [f \text{ est } k\text{-lipschitzienne}] \\ & \leqslant & k^{n+1}\,|u_1 - u_0| & [\text{hypothèse de récurrence}] \end{array}$$

  La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est établie.
- Conclusion
  De l'initialisation à $n = 0$, de l'hérédité et de l'axiome de récurrence, on déduit que

$$|u_{n+1} - u_n| \leqslant k^n \ |u_1 - u_0|$$

  pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Q27. — Démontrer que la série $\sum u_{n+1} - u_n$ converge.

D'après ce qui précède $|u_{n+1} - u_n| \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(k^n)$. Or la série géométrique $\sum k^n$ est convergente ($|k| < 1$). Par sommation d'une relation de comparaison la série $\sum |u_{n+1} - u_n|$ converge (et on a une propriété sur les restes).
La série $\sum u_{n+1} - u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Q28. — En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un point fixe de f.

D'après ce qui précède la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge (cf. résultat sur les séries télescopiques). Soit $\ell \in \mathbf{R}$ sa limite.
Pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$a \leqslant u_n \leqslant b$$

car $u_0 \in [a, b]$ et f stabilise $[a, b]$. En passant à la limite dans cette inégalité, il vient $a \leqslant \ell \leqslant b$ et donc $\ell \in [a, b]$.
Par définition de la suite (u_n),

$$(\star) \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

pour tout $n \in \mathbf{N}$. D'une part $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ (suite extraite), et d'autre part $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)$ (continuité de f et critère séquentiel de continuité, cf. **Q25**). En passant à la limite dans $(\star)$, il vient $f(\ell) = \ell$.

Q29. — On suppose dans cette question **Q29** que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et que :

$$\forall\, x \in [a, b] \qquad |f'(x)| < 1 \,.$$

Démontrer que f possède un unique point fixe.

La fonction $|f'|$ est continue sur le segment $[a, b]$. Elle est donc bornée et atteint ses bornes (théorème des bornes atteintes). Donc il existe $x_M \in [a, b]$ tel que

$$\forall\, x \in [a, b] \qquad |f'(x)| \leqslant |f'(x_M)|.$$

Du théorème des accroissements finis, on déduit que f est k-lipschitzienne, avec :

$$0 \leqslant k := |f'(x_M)| < 1$$

i.e. que f est contractante. D'après **Q24** et **Q28**, la fonction f admet donc un unique point fixe.

Q30. — Enfin, dans cette question **Q30**, on suppose qu'il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que f^p est contractante, où f^p désigne l'itérée p-ième de f pour le produit de composition. Démontrer que f possède un unique point fixe.

Puisque f^p est contractante, la fonction f^p admet un unique point fixe d'après **Q24** et **Q28**. Notons x_0 l'unique point fixe de f^p.

- Existence d'un point fixe pour f
  On a $f^p(x_0) = x_0$. En composant par f, il vient $f^{p+1}(x_0) = f(x_0)$, soit :
  $$f^p(f(x_0)) = f(x_0).$$
  Donc $f(x_0)$ est un point fixe de f^p. Par unicité de ce dernier, $f(x_0) = x_0$, i.e. x_0 est un point fixe de f.
- Unicité du point fixe pour f
  Il est clair que tout point fixe de f est point fixe de f^p. La fonction f^p possèdant un unique point fixe, la fonction f ne peut pas posséder deux points fixes distincts.

Problème 3. – De la série harmonique alternée modifiée

Nous avons démontré en classe que la série harmonique alternée $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *converge et que sa somme vaut* $\ln(2)$*, au moyen de la formule de Taylor avec reste intégral. Ce résultat a été démontré, d'une autre manière, dans le problème 1 de ce devoir (cf.* **Q14***).*

Nous nous proposons, ici, d'étudier une série obtenue en modifiant l'ordre des termes de la série harmonique alternée.

Soient a *et* b *des nombres entiers naturels non nuls. À partir de la suite* $\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$*, on en construit une nouvelle en prenant* a *termes positifs, puis* b *termes négatifs, puis* a *termes positifs, puis* b *termes négatifs... Cette nouvelle suite sera notée* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$*.*

Par exemple, si $a = 3$ *et* $b = 2$*, les premiers termes de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *sont :*

$$\underbrace{1\,,\,\frac{1}{3}\,,\,\frac{1}{5}}_{\textit{3 termes}}\,,\,\underbrace{-\frac{1}{2}\,,\,-\frac{1}{4}}_{\textit{2 termes}}\,,\,\underbrace{\frac{1}{7}\,,\,\frac{1}{9}\,,\,\frac{1}{11}}_{\textit{3 termes}}\,,\,\underbrace{-\frac{1}{6}\,,\,-\frac{1}{8}}_{\textit{2 termes}}\,,\,\ldots$$

Q31. — Démontrer :

$$\mathbf{N}^* = \bigcup_{q\in\mathbf{N}} \{q(a+b)+r \ : \ r \in [\![1 \ ; \ a+b]\!]\}$$

et pour tout $(q_1, q_2) \in \mathbf{N}^2$:

$$q_1 \neq q_2 \implies \{q_1(a+b)+r \ : \ r \in [\![1 \ ; \ a+b]\!]\} \cap \{q_2(a+b)+r \ : \ r \in [\![1 \ ; \ a+b]\!]\} = \emptyset$$

- L'inclusion :
  $$\bigcup_{q\in\mathbf{N}} \{q(a+b)+r \ : \ r \in [\![1 \ ; \ a+b]\!]\} \ \subset \ \mathbf{N}^*$$
  est claire. Démontrons l'inclusion réciproque. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Considérons la division eucli-

dienne de $n-1 \in \mathbf{N}$ par $a+b \in \mathbf{N}^*$ dans $\mathbf{N}$. Il existe un (unique) couple $(q', r') \in \mathbf{N} \times [\![0\ ;\ a+b-1]\!]$ tel que :

$$n-1 = q'(a+b) + r'.$$

En posant $q := q' \in \mathbf{N}$ et $r := r'+1 \in [\![1\ ;\ a+b]\!]$, nous obtenons :

$$n = q(a+b) + r.$$

Ainsi :

$$\mathbf{N}^* \subset \bigcup_{q \in \mathbf{N}} \{q(a+b)+r \ :\ r \in [\![1\ ;\ a+b]\!]\}.$$

- Soient $(q_1, q_2) \in \mathbf{N}^2$. Nous établissons la contraposée de l'implication :

$$q_1 \neq q_2 \implies \{q_1(a+b)+r \ :\ r \in [\![1\ ;\ a+b]\!]\} \cap \{q_2(a+b)+r \ :\ r \in [\![1\ ;\ a+b]\!]\} = \emptyset.$$

Supposons que l'intersection

$$\{q_1(a+b)+r \ :\ r \in [\![1\ ;\ a+b]\!]\} \cap \{q_2(a+b)+r \ :\ r \in [\![1\ ;\ a+b]\!]\}$$

est non vide. Soient donc n un élément de cette intersection. Alors il existe $r_1, r_2 \in [\![1\ ;\ a+b]\!]$ tels que :

$$q_1(a+b) + r_1 = n = q_2(a+b) + r_2.$$

Donc :

$$(q_1 - q_2)(a+b) = r_2 - r_1.$$

Comme $-(a+b)+1 \leqslant r_2 - r_1 \leqslant a+b-1$, il vient :

$$-1 < -1 + \frac{1}{a+b} \leqslant q_1 - q_2 \leqslant 1 - \frac{1}{a+b} < -1.$$

Le seul entier strictement compris entre -1 et 1 étant 0, nous en déduisons $q_1 = q_2$.

Nous pouvons alors préciser la définition du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. D'après ce qui précède, il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbf{N} \times [\![1\ ;\ a+b]\!]$ tel que $n = q(a+b)+r$. Alors :

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2(qa+r)-1} & \textit{si } r \leqslant a \\[2ex] -\dfrac{1}{2(qb+r-a)} & \textit{si } r \geqslant a+1 \end{cases}$$

Afin d'étudier la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$, on pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} u_k\ .$$

Q32. — Écrire une fonction Python, nommée u, d'argument (a, b, p) où :

- a est un nombre entier naturel (indiquant le nombre de termes positifs consécutifs) ,
- b est un nombre entier naturel (indiquant le nombre de termes négatifs consécutifs) ,
- p est un nombre entier naturel non nul

et qui renvoie la liste :

$$[u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots, u_p]$$

des p premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie ci-dessus.

```python
def u(a,b,p):
    """
    Entree: a,b,p des nombres entiers naturels non nuls
    Sortie: la liste des p premiers termes de la suite obtenue en modifiant
    l'ordre des termes de la serie harmonique alternee, de maniere a ce que les
    a premiers soient positifs, les b suivants soient negatifs, les a suivants
    soient positifs...
    """
    L=[] # variable pour accueillir les termes de la suite a construire
    for n in range(1,p+1): # calcul de u_n et ajout de sa valeur a la liste L
        q=(n-1)//(a+b)
        r=n-q*(a+b)
        if r <= a:
            L+=[1/(2*(q*a+r)-1)]
        else:
            L+=[1/(-2*(q*b+r-a))]
    return(L)
```

Q33. — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose :

$$H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Démontrer qu'il existe une unique constante réelle γ (nommée constante d'Euler) telle que :

$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1) \ .$$

Nous démontrons que la suite $(H_n - \ln(n))_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge.

- Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

$$H_{n+1} - \ln(n+1) - (H_n - \ln(n)) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

La fonction $\ln$ est deux fois dérivable sur $\mathbf{R}^{+*}$ et :

$$\forall\, x > 0, \quad \ln''(x) = -\frac{1}{x^2} \leqslant 0.$$

Elle est donc concave sur $\mathbf{R}^{+*}$. L'équation réduite de sa tangente au point d'abscisse $x = 1$ étant $y = x - 1$, nous en déduisons :

$$\forall\, x > 0, \quad \ln(x) \leqslant x - 1.$$

En particulier pour $x = 1 - \dfrac{1}{n+1} > 0$:

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leqslant -\frac{1}{n+1}$$

d'où $H_{n+1} - \ln(n+1) - (H_n - \ln(n)) \leqslant 0$. La suite $(H_n - \ln(n))_{n \in \mathbf{N}^*}$ est donc décroissante.

- Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Comme la fonction inverse est décroissante sur $\mathbf{R}^{+*}$:

$$\forall\, x \in [k, k+1], \quad \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k}$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}.$$

Soit $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$. En sommant les inégalités précédentes pour k allant de 1 à $n-1$, nous obtenons :

$$\ln(n) = \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = H_{n-1} \leqslant H_n$$

d'où :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}, \quad H_n - \ln(n) \geqslant 0.$$

La suite $(H_n - \ln(n))_{n \in \mathbf{N}^*}$ est donc minorée.

- D'après le théorème de la limite monotone, la suite $(H_n - \ln(n))_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge.

Notons γ la limite de la suite $(H_n - \ln(n))_{n \in \mathbf{N}^*}$. Alors :

$$H_n - \ln(n) \underset{n \to +\infty}{=} \gamma + o(1)$$

d'où :

$$H_n \underset{n \to +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)\ .$$

L'unicité de γ résulte de l'unicité de la limite de la suite $(H_n - \ln(n))_{n \in \mathbf{N}^*}$.

Remarque : Nous savons que la suite $(H_n - \ln(n))_{n\in\mathbf{N}^*}$ *est décroissante. Nous pourrions démontrer également que la suite* $(H_n - \ln(n+1))_{n\in\mathbf{N}^*}$ *est croissante. Comme :*

$$H_n - \ln(n) - (H_n - \ln(n+1)) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

ces deux suites sont adjacentes. Le théorème des suites adjacentes s'applique et nous obtenons :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad H_n - \ln(n+1) \leqslant \gamma \leqslant H_n - \ln(n)$$

d'où :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad 0 \leqslant H_n - \ln(n) - \gamma \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$$

en appliquant l'inégalité de concavité de $\ln$ *rappelée dans la solution apportée à la question 3. Nous pouvons ainsi calculer des valeurs approchées de* γ*, avec une majoration de l'erreur commise. À titre d'exemple,* $0,57722$ *est une valeur approchée de* γ*, avec une erreur inférieure à* 10^{-5}.

Q34. — Soit $m \in \mathbf{N}^*$. En s'inspirant de la partition de $\mathbf{N}^*$ introduite en **Q31**, démontrer :

$$S_{m(a+b)} = \sum_{k=1}^{ma} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{mb} \frac{1}{2k}$$

puis exprimer la somme $S_{m(a+b)}$ à l'aide de certains des nombres H_n, où $n \in \mathbf{N}^*$.

En adaptant la démonstration donnée en **Q31**, on obtient la décomposition de $[\![1, m(a+b)]\!]$ en réunion d'ensembles deux-à-deux disjoints suivante :

$$[\![1, m(a+b)]\!] = \bigcup_{q=0}^{m-1} \{q(a+b)+r \ : \ r \in [\![1\ ;\ a+b]\!]\}$$

Comme pour tout $q \in [\![0, m-1]\!]$, l'ensemble $\{q(a+b)+r \ : \ r \in [\![1\ ;\ a+b]\!]\}$ se décompose en la réunion d'ensembles deux-à-deux disjoints suivante :

$$\{q(a+b)+r \ : \ r \in [\![1\ ;\ a+b]\!]\} = \{q(a+b)+r \ : \ r \in [\![1\ ;\ a]\!]\} \cup \{q(a+b)+r \ : \ r \in [\![a+1\ ;\ a+b]\!]\}$$

nous en déduisons la décomposition de $[\![1, m(a+b)]\!]$ en réunion d'ensembles deux-à-deux disjoints suivante :

$$[\![1, m(a+b)]\!] = \left(\bigcup_{q=0}^{m-1} \{q(a+b)+r \ : \ r \in [\![1\ ;\ a]\!]\}\right) \cup \left(\bigcup_{q=0}^{m-1} \{q(a+b)+r \ : \ r \in [\![a+1\ ;\ a+b]\!]\}\right)$$

Donc :

$$\begin{aligned}
S_{m(a+b)} &= \sum_{q=0}^{m-1} \sum_{r=1}^{a} u_{q(a+b)+r} \quad + \quad \sum_{q=0}^{m-1} \sum_{r=a+1}^{a+b} u_{q(a+b)+r} \\
&= \sum_{q=0}^{m-1} \sum_{r=1}^{a} \frac{1}{2(qa+r)-1} \quad - \quad \sum_{q=0}^{m-1} \sum_{r=a+1}^{a+b} \frac{1}{2(qb+r-a)} \\
&= \sum_{q=0}^{m-1} \sum_{r=1}^{a} \frac{1}{2(qa+r)-1} \quad - \quad \sum_{q=0}^{m-1} \sum_{s=1}^{b} \frac{1}{2(qb+s)} \qquad \text{[changement d'indice } s = r-a\text{]}
\end{aligned}$$

Toujours en adaptant les arguments de **Q31**, on démontre que les ensembles $[\![1, ma]\!]$ et $[\![1, mb]\!]$ admettent la décomposition en réunion d'ensembles deux-à-deux disjoints suivante :

$$[\![1, ma]\!] = \bigcup_{q=0}^{m-1} \{qa + r \ : \ r \in [\![1, a]\!]\} \qquad \text{et} \qquad [\![1, mb]\!] = \bigcup_{q=0}^{m-1} \{qa + r \ : \ r \in [\![1, a]\!]\}\,.$$

Donc :

$$(\star) \qquad S_{m(a+b)} = \sum_{k=1}^{ma} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{mb} \frac{1}{2k}.$$

On observe :

$$(\star\star) \qquad \sum_{k=1}^{mb} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{mb} \frac{1}{k} = \frac{1}{2}\, H_{mb}.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
H_{2ma} &:= \sum_{k=1}^{2ma} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{\ell=1}^{ma} \frac{1}{2\ell} + \sum_{\ell=1}^{ma} \frac{1}{2\ell-1} \qquad \text{[décomposition suivant la parité de l'indice } k\text{]} \\
&= \frac{1}{2} H_{ma} + \sum_{\ell=1}^{ma} \frac{1}{2\ell-1}
\end{aligned}$$

Donc :

$$(\star\star\star) \qquad \sum_{k=1}^{ma} \frac{1}{2k-1} = H_{2ma} - \frac{1}{2} H_{ma}.$$

De $(\star)$, $(\star\star)$, $(\star\star\star)$, nous déduisons :

$$S_{m(a+b)} = H_{2ma} - \frac{1}{2}H_{ma} - \frac{1}{2}\,H_{mb}.$$

Q35. — Démontrer :

$$S_{m(a+b)} \xrightarrow[m\to+\infty]{} \ln\left(2\sqrt{\frac{a}{b}}\right).$$

Soit $m \in \mathbf{N}^*$. De **Q33** et **Q34**, nous déduisons :

$$\begin{aligned} S_{m(a+b)} &\underset{n\to+\infty}{=} \ln(2ma) - \frac{1}{2}\ln(ma) - \frac{1}{2}\ln(mb) + \mathrm{o}(1) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \ln\left(\frac{2ma}{\sqrt{ma}\sqrt{mb}}\right) + \mathrm{o}(1) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \ln\left(2\sqrt{\frac{a}{b}}\right) + \mathrm{o}(1) \end{aligned}$$

d'où le résultat demandé.

Q36. — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On pose $m = E\left(\dfrac{n}{a+b}\right)$. Démontrer que :

$$\left|S_n - S_{m(a+b)}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Comme $m = E\left(\dfrac{n}{a+b}\right)$:

$$m \leqslant \frac{n}{a+b} < m+1$$

et donc :

$$m(a+b) \leqslant n < (m+1)(a+b).$$

Ainsi :

$$(\star) \qquad \left|S_n - S_{m(a+b)}\right| = \left|\sum_{k=m(a+b)+1}^{n} u_k\right| \leqslant \sum_{k=m(a+b)+1}^{n} |u_k| \leqslant \sum_{k=m(a+b)+1}^{(m+1)(a+b)} |u_k|.$$

Or :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m(a+b)+1}^{(m+1)(a+b)} |u_k| &= \sum_{r=1}^{a} \left|u_{m(a+b)+r}\right| + \sum_{r=a+1}^{a+b} \left|u_{m(a+b)+r}\right| \\
&= \sum_{r=1}^{a} \frac{1}{2(ma+r)-1} + \sum_{r=a+1}^{a+b} \left|-\frac{1}{2(mb+r-a)}\right| \\
&= \sum_{r=1}^{a} \frac{1}{2(ma+r)-1} + \sum_{s=1}^{b} \left|-\frac{1}{2(mb+s)}\right| \qquad [\text{changement d'indice } s=r-a] \\
&\leqslant a\,\frac{1}{2ma+1} + b\,\frac{1}{2(mb+1)}
\end{aligned}$$

De cette inégalité et de $(\star)$, nous déduisons :

$$0 \leqslant \left|S_n - S_{m(a+b)}\right| \leqslant a\,\frac{1}{2ma+1} + b\,\frac{1}{2(mb+1)}.$$

Comme $E(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, $m = E\left(\dfrac{n}{a+b}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Ainsi :

$$a\,\frac{1}{2ma+1} + b\,\frac{1}{2(mb+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

D'après le théorème d'encadrement :

$$\left|S_n - S_{m(a+b)}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Q37. — Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge et que sa somme vaut $\ln\left(2\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\left|S_n - \ln\left(2\sqrt{\frac{a}{b}}\right)\right| &= \left|S_n - S_{E\left(\frac{n}{a+b}\right)(a+b)} + S_{E\left(\frac{n}{a+b}\right)(a+b)} - \ln\left(2\sqrt{\frac{a}{b}}\right)\right| \\
&\leqslant \left|S_n - S_{E\left(\frac{n}{a+b}\right)(a+b)}\right| + \left|S_{E\left(\frac{n}{a+b}\right)(a+b)} - \ln\left(2\sqrt{\frac{a}{b}}\right)\right|
\end{aligned}$$

Donc :

$$0 \leqslant \left|S_n - \ln\left(2\sqrt{\frac{a}{b}}\right)\right| \leqslant \left|S_n - S_{E\left(\frac{n}{a+b}\right)(a+b)}\right| + \left|S_{E\left(\frac{n}{a+b}\right)(a+b)} - \ln\left(2\sqrt{\frac{a}{b}}\right)\right|.$$

D'après **Q36** :

$$\left| S_n - S_{E\left(\frac{n}{a+b}\right)\,(a+b)} \right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et d'après la question **Q35**, comme $E\left(\dfrac{n}{a+b}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$:

$$\left| S_{E\left(\frac{n}{a+b}\right)\,(a+b)} - \ln\left(2\sqrt{\frac{a}{b}} \right) \right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Par théorème d'encadrement :

$$\left| S_n - \ln\left(2\sqrt{\frac{a}{b}} \right) \right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

i.e. : $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln\left(2\sqrt{\dfrac{a}{b}} \right)$.