M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Devoir surveillé n°2 (4h)

Séries numériques et révisions d'algèbre linéaire

Samedi 25 septembre 2021

David BLOTTIÈRE

Consignes

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, *les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.* Vous êtes invité à encadrer les résultats de vos calculs.

Si vous êtes amené à repérer ce qui peut vous sembler être une erreur d'énoncé, vous le signalerez sur votre copie et devrez poursuivre votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

Le sujet comporte deux exercices et trois problèmes indépendants les uns des autres. Vous êtes libre de les traiter dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1. – Règle de Raabe-Duhamel

Q1. — Soit β un nombre réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $v_n = \dfrac{1}{n^\beta}$. Former un développement asymptotique à deux termes du quotient $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

Q2. — Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ deux suites de nombres réels strictement positifs. On suppose qu'à partir d'un certain rang :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Démontrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(v_n\right)$.

Q3. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de nombres réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $\alpha > 1$ tel que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Démontrer, à l'aide d'une comparaison avec une série de Riemann, que la série $\sum u_n$ converge.

Q4. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de nombres réels strictement positifs. On suppose cette fois qu'il existe $0 < \alpha < 1$ tel que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Démontrer que la série $\sum u_n$ diverge.

Q5. — Soit a et b des nombres réels strictement positifs. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a+k}{b+k}$.

Exercice 2. – Familles libres

Soient E *un* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel,* $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$ *et* $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$.

Q6. — Rappeler la définition de l'assertion : « la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre ».

Q7. — Démontrer que la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est liée si et seulement s'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $u_i \in \mathrm{Vect}\left(\{u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n\}\right)$.

Q8. — Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbf{R}$ pour que la famille

$$\mathcal{B}_a := ((a, 1, 1), (1, a, 1), (1, 1, a))$$

soit une base de $\mathbf{R}^3$.

Q9. — Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice diagonalement dominante, i.e. telle que :

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!], \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}| \ .$$

Démontrer que les colonnes de la matrice A :

$$C_1 := \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}, \ C_2 := \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{n,2} \end{pmatrix}, \ \ldots\ , \ C_n := \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix}$$

forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Qu'en déduire ?

Q10. — Énoncer et démontrer le théorème des degrés échelonnés.

Problème 1. – Valeurs approchées de $\ln(2)$

Soit $x \in]-1, 1]$.

Q11. — Soit n un nombre entier naturel non nul. Démontrer l'égalité $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i x^i + \dfrac{(-1)^n x^n}{1+x}$.

Q12. — En déduire l'égalité $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i} x^i + \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\, \mathrm{d}t$.

Q13. — Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{i \geqslant 1} \frac{(-1)^{i-1}}{i} x^i$ converge et que $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} x^i = \ln(1+x)$.

Q14. — Démontrer les identités $\ln(2) = \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i}$ et $\ln(2) = \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i\, 2^i}$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite décroissante de nombres réels, qui converge vers 0. Pour tout $n\in\mathbf{N}^*$:

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}u_i\ .$$

Q15. — Démontrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(S_{2n-1})_{n\in\mathbf{N}^*}$ convergent vers une limite commune.

Q16. — En déduire que la série $\sum(-1)^{n-1}u_n$ est convergente. Sa somme est notée S dans la suite.

Q17. — Démontrer que, pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, $S_{2n}\leqslant S\leqslant S_{2n-1}$.

Q18. — En déduire que pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, $|S-S_n|\leqslant u_n$.

Q19. — Soit $p\in\mathbf{N}$. Déterminer un nombre entier naturel N_p tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i-1}}{i}$ est une valeur approchée de $\ln(2)$ à 10^{-p}, pour tout entier naturel $n\geqslant N_p$.

Soit $p\in\mathbf{N}$. On se propose de calculer une valeur approchée de $\ln(2)$ à 10^{-p}, en utilisant les sommes partielles :

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i\,2^i}$$

où $n\in\mathbf{N}^*$.

Q20. — Pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, on pose :

$$R_n=\sum_{i=n+1}^{+\infty}\frac{1}{i\,2^i}\ .$$

Justifier l'inégalité $0\leqslant R_n\leqslant\dfrac{1}{2^n}$.

Q21. — Déterminer un nombre entier naturel N'_p tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i\,2^i}$ est une valeur approchée de $\ln(2)$ à 10^{-p}, pour tout entier naturel $n\geqslant N'_p$.

Q22. — Comparer N_p et N'_p.

Problème 2. – Point(s) fixe(s) d'une fonction

Soient a et b des nombres réels tels que $a<b$. Soit $f\colon[a,b]\to\mathbf{R}$ une fonction telle que :

$$f([a,b])\subset[a,b]\ .$$

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par la donnée de $u_0\in[a,b]$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1}=f(u_n)$$

valable pour tout $n \in \mathbf{N}$. On rappelle qu'un point fixe de f est une solution de l'équation

$$f(x) = x$$

d'inconnue $x \in [a, b]$.

Q23. — On suppose dans cette question **Q23** que f est dilatante, i.e. que :

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2 \qquad |f(x) - f(y)| \geqslant |x - y| \, .$$

Établir une condition nécessaire et suffisante sur u_0 pour que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge.

*Dans les questions **Q24–Q28**, on suppose que f est contractante, i.e. que :*

$$\exists\, k \in [0, 1[\qquad \forall (x, y) \in [a, b]^2 \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant k \; |x - y| \, .$$

et on se propose de démontrer que f possède un unique point fixe.

Q24. — Démontrer que si f admet un point fixe, alors celui-ci est unique.

Q25. — Démontrer que f est continue sur $[a, b]$.

Q26. — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|u_{n+1} - u_n| \leqslant k^n \; |u_1 - u_0|$.

Q27. — Démontrer que la série $\sum u_{n+1} - u_n$ converge.

Q28. — En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers un point fixe de f.

Q29. — On suppose dans cette question **Q29** que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et que :

$$\forall\, x \in [a, b] \qquad |f'(x)| < 1 \, .$$

Démontrer que f possède un unique point fixe.

Q30. — Enfin, dans cette question **Q30**, on suppose qu'il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que f^p est contractante, où f^p désigne l'itérée p-ième de f pour le produit de composition. Démontrer que f possède un unique point fixe.

Problème 3. – De la série harmonique alternée modifiée

*Nous avons démontré en classe que la série harmonique alternée $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge et que sa somme vaut $\ln(2)$, au moyen de la formule de Taylor avec reste intégral. Ce résultat a été démontré, d'une autre manière, dans le problème 1 de ce devoir (cf. **Q14**).*

Nous nous proposons, ici, d'étudier une série obtenue en modifiant l'ordre des termes de la série harmonique alternée.

Soient a et b des nombres entiers naturels non nuls. À partir de la suite $\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$, on en construit une nouvelle en prenant a termes positifs, puis b termes négatifs, puis a termes positifs, puis b termes négatifs... Cette nouvelle suite sera notée $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

Par exemple, si $a = 3$ et $b = 2$, les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sont :

$$\underbrace{1\,,\ \frac{1}{3}\,,\ \frac{1}{5}}_{\textit{3 termes}}\,,\ \underbrace{-\frac{1}{2}\,,\ -\frac{1}{4}}_{\textit{2 termes}}\,,\ \underbrace{\frac{1}{7}\,,\ \frac{1}{9}\,,\ \frac{1}{11}}_{\textit{3 termes}}\,,\ \underbrace{-\frac{1}{6}\,,\ -\frac{1}{8}}_{\textit{2 termes}}\,,\ \ldots$$

Q31. — Démontrer :

$$\mathbf{N}^* = \bigcup_{q\in\mathbf{N}} \{q(a+b)+r \ : \ r \in [\![1\ ;\ a+b]\!]\}$$

et pour tout $(q_1, q_2) \in \mathbf{N}^2$:

$$q_1 \neq q_2 \implies \{q_1(a+b)+r \ : \ r \in [\![1\ ;\ a+b]\!]\} \cap \{q_2(a+b)+r \ : \ r \in [\![1\ ;\ a+b]\!]\} = \emptyset$$

Nous pouvons alors préciser la définition du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. D'après ce qui précède, il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbf{N} \times [\![1\ ;\ a+b]\!]$ tel que $n = q(a+b)+r$. Alors :

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2(qa+r)-1} & \textit{si } r \leqslant a \\[2ex] -\dfrac{1}{2(qb+r-a)} & \textit{si } r \geqslant a+1 \end{cases}$$

Afin d'étudier la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$, on pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} u_k\ .$$

Q32. — Écrire une fonction Python, nommée u, d'argument (a, b, p) où :
- a est un nombre entier naturel (indiquant le nombre de termes positifs consécutifs) ,
- b est un nombre entier naturel (indiquant le nombre de termes négatifs consécutifs) ,
- p est un nombre entier naturel non nul

et qui renvoie la liste :

$$[u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots, u_p]$$

des p premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie ci-dessus.

Q33. — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose :

$$H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Démontrer qu'il existe une unique constante réelle γ (nommée constante d'Euler) telle que :

$$H_n \underset{n \to +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1)\ .$$

Q34. — Soit $m \in \mathbf{N}^*$. En s'inspirant de la partition de $\mathbf{N}^*$ introduite en **Q31**, démontrer :

$$S_{m(a+b)} = \sum_{k=1}^{ma} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{mb} \frac{1}{2k}$$

puis exprimer la somme $S_{m(a+b)}$ à l'aide de certains des nombres H_n, où $n \in \mathbf{N}^*$.

Q35. — Démontrer :

$$S_{m(a+b)} \xrightarrow[m \to +\infty]{} \ln\left(2\sqrt{\frac{a}{b}}\right)\ .$$

Q36. — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On pose $m = E\left(\frac{n}{a+b}\right)$. Démontrer que :

$$\left|S_n - S_{m(a+b)}\right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0\ .$$

Q37. — Démontrer que la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge et que sa somme vaut $\ln\left(2\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$.