M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Un corrigé du devoir surveillé n°1 (4h)

Suites numériques

Samedi 11 septembre 2021

David BLOTTIÈRE

Consignes

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, *les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.* Vous êtes invité à encadrer les résultats de vos calculs.

Si vous êtes amené à repérer ce qui peut vous sembler être une erreur d'énoncé, vous le signalerez sur votre copie et devrez poursuivre votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

Le sujet comporte sept exercices indépendants les uns des autres. Vous êtes libre de les traiter dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1. — Des sommes de Riemann

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$*, on pose* $u_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right)$ *et* $v_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

Q1. — Énoncer le théorème sur les sommes de Riemann.

Soient a et b des réels tels que $a < b$. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{C}$ une application continue sur $[a,b]$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f\ .$$

Q2. — En appliquant le théorème sur les sommes de Riemann, démontrer :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (1-\cos(1))\,n\ . \tag{1}$$

On applique le théorème sur les sommes de Riemann à la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array} \right.$$

qui est continue sur $[0,1]$ pour obtenir :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\,\sin\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \sin(x)\ \mathrm{d}x = 1-\cos(1)\ .$$

Nous en déduisons que $u_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} (1-\cos(1))\,n$.

Q3. — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Démontrer :

$$u_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\right)\ \sin\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2n}\right)}\ .$$

Comme $\pi \notin \mathbf{Q}$, $e^{\frac{i}{n}} \neq 1$. Ainsi, grâce au cours sur les sommes de termes en progression géométrique :

$$u_n = \Im m\left(\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{ik}{n}}\right) = \Im m\left(e^{\frac{i}{n}}\ \frac{1-e^{i}}{1-e^{\frac{i}{n}}}\right)\ .$$

Par factorisation par l'angle de la demie-somme :

$$e^{\frac{i}{n}}\ \frac{1-e^{i}}{1-e^{\frac{i}{n}}} = e^{\frac{i}{n}}\ \frac{-2\,i\,e^{\frac{i}{2}}\ \sin\left(\frac{1}{2}\right)}{-2\,i\,e^{\frac{i}{2n}}\ \sin\left(\frac{1}{2n}\right)} = e^{i\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}\right)}\ \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2n}\right)}\ .$$

Nous en déduisons que $u_n = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{2}\right)\ \sin\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2n}\right)}$.

Q4. — Donner une nouvelle démonstration de (1) en utilisant l'identité établie à la question précédente.

Par continuité de la fonction sinus en $\frac{1}{2}$, $\sin\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sin\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$ et donc :

$$\sin\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sin\left(\frac{1}{2}\right)\ .$$

Comme $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$:

$$\sin\left(\frac{1}{2n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}\ .$$

De ces deux équivalents et de Q3, nous déduisons :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n\ \sin^2\left(\frac{1}{2}\right)$$

puis le résultat (1), puisque d'après la formule d'addition pour cosinus :

$$\cos(1) = \cos\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{1}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{1}{2}\right)$$

et donc $2\sin^2\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \cos(1)$.

Q5. — Énoncer et démontrer la formule de Taylor avec reste intégral.

- *Énoncé.* Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$. Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b], \mathbf{C})$. Alors :
$$(\star) \qquad f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t\ .$$
- *Démonstration.* Remarquons que d'après la régularité imposée à f, tous les termes de la formules sont bien définis. On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$.
  — ***Initialisation à*** $n = 0$. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbf{C})$. La formule $(\star)$ s'énonce comme suit :
$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\ \mathrm{d}t\ .$$
  Elle est vérifiée, d'après le théorème fondamental de l'analyse.
  — *Hérédité.* Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons que la propriété $(\star)$ vaut pour toute fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$. Soit $f \in \mathcal{C}^{n+2}([a,b], \mathbf{C})$. La fonction f étant en particulier de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$, il vient :
$$(\star) \qquad f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \underbrace{\frac{(b-t)^n}{n!}}_{u'(t)} \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{v(t)}\ \mathrm{d}t\ .$$
  d'après l'hypothèse de récurrence. Les fonctions
$$u\colon t \longmapsto -\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \text{et} \qquad v\colon t \longmapsto f^{(n+1)}(t)$$
  sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Par intégration par parties :
$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t &= \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\ \mathrm{d}t\ .\end{aligned}$$
  D'après $(\star)$ et cette intégration par parties :
$$f(b) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\ \mathrm{d}t$$
  qui est la formule à établir.

Q6. — Donner une démonstration de :

$$\forall x \in [0, \pi] \qquad x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x$$

en appliquant la formule de Taylor avec reste intégral.

Soit $x \in [0, \pi]$.

- ***Inégalité de droite.*** La fonction sinus est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$. D'après la formule de Taylor avec reste intégral (qui coïncide avec le théorème fondamental de l'analyse ici) :

$$\sin(x) = \sin(0) + \int_0^x \sin'(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^x \cos(t) \, \mathrm{d}t \; .$$

Comme la fonction cosinus est majorée par 1, il vient par croissance de l'intégrale :

$$\sin(x) \leqslant \int_0^x 1 \, \mathrm{d}t = x \; .$$

- ***Inégalité de gauche.*** La fonction sinus est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[0, x]$. D'après la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sin(0) + \sin'(0)x + \frac{\sin''(0)}{2}x^2 + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \sin'''(t) \, \mathrm{d}t \\ &= x - \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \cos(t) \, \mathrm{d}t \; . \end{aligned}$$

Comme, pour tout $t \in [0, x]$, $\frac{(x-t)^2}{2} \cos(t) \leqslant \frac{(x-t)^2}{2}$, la croissance de l'intégrale livre :

$$\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \cos(t) \, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \, \mathrm{d}t = \frac{x^3}{6} \; .$$

Nous en déduisons :

$$\sin(x) = x - \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \cos(t) \, \mathrm{d}t \geqslant x - \frac{x^3}{6} \; .$$

Q7. — Démontrer :

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \frac{k}{n^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \sin(1) - \cos(1) \; .$$

La fonction

$$\left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x\sin(x) \end{array} \right.$$

est continue sur $[0,1]$. D'après le théorème sur les sommes de Riemann :

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \ \frac{k}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{k}{n} \ \sin\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \underbrace{x}_{u(x)} \ \underbrace{\sin(x)}_{v'(x)} \ \mathrm{d}x \ .$$

Les fonctions

$$u \colon x \longmapsto x \qquad \text{et} \qquad v \colon x \longmapsto -\cos(x)$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Par intégration par parties :

$$\int_0^1 x\sin(x) \ \mathrm{d}x = [-x\cos(x)]_0^1 + \int_0^1 \cos(x) \ \mathrm{d}x = \sin(1) - \cos(1) \ .$$

Ainsi $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \ \frac{k}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sin(1) - \cos(1)$.

Q8. — Déduire des deux questions précédentes :

$$v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sin(1) - \cos(1) \ .$$

- Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Comme $\dfrac{k}{n^2} \in [0,\pi]$, Q6 livre :

$$\frac{k}{n^2} - \frac{k^3}{6\,n^6} \leqslant \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leqslant \frac{k}{n^2} \ .$$

  Comme $\sin\left(\dfrac{k}{n}\right) \geqslant 0$:

$$\sin\left(\frac{k}{n}\right) \ \frac{k}{n^2} - \sin\left(\frac{k}{n}\right) \ \frac{k^3}{6\,n^6} \leqslant \sin\left(\frac{k}{n}\right) \ \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leqslant \sin\left(\frac{k}{n}\right) \ \frac{k}{n^2} \ .$$

  En sommant ces inégalités membre-à-membre pour k allant de 1 à n, il vient :

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \ \frac{k}{n^2} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \ \frac{k^3}{6\,n^6}}_{=:w_n} \leqslant v_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \ \frac{k}{n^2}$$

- Si nous établissons $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors la précédente double inégalité, Q7 et le théorème d'encadrement livreront le résultat demandé.
- Démontrons $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Comme la fonction sinus est positive et majorée par 1 sur $[0,\pi]$:

$$0 \leqslant w_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{6\,n^6} = \frac{1}{6\,n^6} \ \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \ .$$

Nous pouvons alors conclure par le théorème d'encadrement.

Exercice 2. – Théorème de Cesàro et étude d'une suite récurrente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de nombres réels. On lui associe la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ dont le terme général est défini par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \qquad S_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\ .$$

Dans les trois prochaines questions, on suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers un réel ℓ. On se propose de démontrer qu'alors :

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell\ .$$

Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Cesàro.

Soit $\varepsilon > 0$.

Q9. — Démontrer qu'il existe $N_1 \in \mathbf{N}^*$ tel que pour tout entier $n \geqslant N_1 + 1$, $\displaystyle\sum_{k=N_1+1}^{n} |u_k - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers ℓ :

$$\exists\, N_1 \in \mathbf{N}^* \quad \forall k \geqslant N_1 \quad |u_k - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Soit $n \geqslant N_1 + 1$. Alors pour tout $k \in [\![N_1+1, n]\!]$, $k \geqslant N_1$ et donc $|u_k - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. En sommant ces inégalités membre-à-membre pour k allant de $N_1 + 1$ à n, nous obtenons :

$$\sum_{k=N_1+1}^{n} |u_k - \ell| \leqslant \sum_{k=N_1+1}^{n} \frac{\varepsilon}{2} = (n - N_1)\,\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{n\varepsilon}{2}\ .$$

Q10. — Justifier qu'il existe $N_2 \in \mathbf{N}^*$ tel que pour tout entier $n \geqslant N_2$, $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1} |u_k - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Comme $\sum_{k=1}^{N_1} |u_k - \ell|$ est une constante :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1} |u_k - \ell| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\ .$$

Par définition de la limite :

$$\exists\, N_2 \in \mathbf{N}^* \quad \forall\, n \geqslant N_2 \quad \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1} |u_k - \ell| - 0\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

i.e. :

$$\exists\, N_2 \in \mathbf{N}^* \quad \forall\, n \geqslant N_2 \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N_1} |u_k - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Q11. — En déduire qu'il existe $N_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que pour tout entier $n \geqslant N_0$, $|S_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Posons $N_0 := \max(N_1 + 1, N_2)$ et considérons un entier naturel $n \geqslant N_0$. Nous observons :

$$|S_n - \ell| = \frac{1}{n} \left| \left(\sum_{k=1}^{n} u_k \right) - n\ell \right| = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{n} (u_k - \ell) \right|$$

D'après l'inégalité triangulaire :

$$|S_n - \ell| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |u_k - \ell| = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N_1} |u_k - \ell| + \frac{1}{n} \sum_{k=N_1+1}^{n} |u_k - \ell|$$

Comme $n \geqslant N_1 + 1$ et $n \geqslant N_2$, nous pouvons appliquer Q9 et Q10 pour obtenir :

$$|S_n - \ell| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N_1} |u_k - \ell| + \frac{1}{n} \sum_{k=N_1+1}^{n} |u_k - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

On considère désormais la réciproque du théorème de Cesàro.

Q12. — Si la suite $(S_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge, la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est-elle nécessairement convergente ?

Non. Considérons la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbf{N}^*}$. Comme :

$$(-1)^{2n} = 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 \qquad \text{et} \qquad (-1)^{2n+1} = -1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} -1$$

cette suite n'admet aucune limite. D'autre part, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$S_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\dfrac{1}{n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

et donc $-\frac{1}{n} \leqslant S_n \leqslant 0$. Par théorème d'encadrement, nous en déduisons $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbf{R}_{>0}$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2}$$

valable pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Q13. — À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.

- ***Initialisation à*** $n = 0$. D'après l'énoncé, u_0 est donné et $u_0 > 0$.
- ***Hérédité.*** Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons que u_n existe et que $u_n > 0$. Comme $u_n \neq 0$, nous pouvons calculer $u_n + \dfrac{1}{u_n^2}$ d'où l'existence de u_{n+1}. De $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n^2}$ et $u_n > 0$, nous déduisons $u_{n+1} > 0$.

Q14. — Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge vers $+\infty$.

- Soit $n \in \mathbf{N}$. Comme $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{u_n^2} > 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement croissante.
- D'après le théorème de la limite monotone :
  (A) soit il existe $\ell \in \mathbf{R}$ tel que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$;
  (B) soit $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- Supposons que nous sommes dans le cas (A). Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est (strictement) croissante, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \geqslant u_0$. Par passage à la limite dans une inégalité large, il vient $\ell \geqslant u_0 > 0$ et donc $\ell \neq 0$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n^2}$ valable pour tout $n \in \mathbf{N}$, nous obtenons $\ell = \ell + \dfrac{1}{\ell^2}$, ce qui n'est pas possible.
- Puisque le cas (A) conduit à une absurdité, ne reste que le cas (B). Ainsi $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Q15. — En exprimant u_{n+1}^3 à l'aide de u_n, pour tout $n \in \mathbf{N}$, et en appliquant le théorème de Cesàro, démontrer :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt[3]{3n}\ .$$

Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$u_{n+1}^3 = \left(u_n + \frac{1}{u_n^2}\right)^3 = u_n^3 + 3 + \frac{3}{u_n^3} + \frac{1}{u_n^6}\ .$$

Nous en déduisons :

$$u_{n+1}^3 - u_n^3 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3\ .$$

Par le théorème de Cesàro :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}^3 - u_k^3 = \frac{u_n^3 - u_0^3}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3\ .$$

Ainsi $\dfrac{u_n^3}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3$ et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt[3]{3n}$.

Exercice 3. – De la série harmonique

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, *on pose* $H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $a_n := H_n - \ln(n+1)$ *et* $b_n := H_n - \ln(n)$.

Q16. — Démontrer que la suite $(H_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est croissante.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

$$H_{n+1} - H_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} > 0\ .$$

Donc la suite $(H_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est strictement croissante.

Q17. — Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

Comme pour tout $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, $\frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2n}$:

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\ .$$

Q18. — En déduire le comportement asymptotique de la suite $(H_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

- D'après Q16 et le théorème de la limite monotone :
  (A) soit il existe $\ell \in \mathbf{R}$ tel que $H_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$;
  (B) soit $H_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- Supposons que nous sommes dans le cas (A). En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité obtenue en Q17, il vient $0 \geqslant 2$, ce qui n'est pas.
- Puisque le cas (A) conduit à une absurdité, ne reste que le cas (B). Ainsi $H_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Remarque. Nous venons de démontrer que la série harmonique diverge.

Q19. — Démontrer :

$$\forall x \in\ ]-1, +\infty[\quad \ln(1+x) \leqslant x\ .$$

La fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x-\ln(1+x) \end{array} \right.$$

est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et pour tout $x>-1$:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} .$$

Nous en déduisons que la fonction f est décroissante sur $]-1,0]$ et croissante sur $[0,+\infty[$. La fonction f admet donc $f(0)=0$ comme minimum, d'où :

$$\forall x > -1 \quad x - \ln(1+x) \geqslant 0 .$$

Q20. — En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) .$$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

- *Inégalité de gauche.* Nous appliquons l'inégalité Q19 à $x = \dfrac{1}{n+1} > -1$ pour obtenir :

$$\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \leqslant \frac{1}{n+1} .$$

- *Inégalité de droite.* Nous appliquons l'inégalité Q19 à $x = -\dfrac{1}{n+1} > -1$ pour obtenir :

$$\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \leqslant -\frac{1}{n+1} .$$

  En multipliant cette inégalité membre-à-membre par $-1<0$, il vient :

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \geqslant \frac{1}{n+1} .$$

Q21. — Démontrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sont adjacentes.

- Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

$$a_{n+1} - a_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+2) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

  D'après Q20, $a_{n+1}-a_n \geqslant 0$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est donc croissante.

- Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

$$b_{n+1} - b_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \right) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

D'après Q20, $b_{n+1} - b_n \leqslant 0$. La suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est donc décroissante.

- Nous calculons :

$$a_n - b_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) .$$

Comme la fonction $\ln$ est continue en 1, nous en déduisons $a_n - b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

D'après le théorème des suites adjacentes, les suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sont convergentes et elles ont même limite. On note γ cette dernière. Ce nombre $\gamma \approx 0.577215$ est appelé constante d'Euler.

Q22. — Déduire de la question précédente un développement asymptotique à deux termes de H_n, quand n tend vers $+\infty$.

La suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers γ. Donc $b_n - \gamma$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, i.e. :

$$b_n - \gamma = H_n - \ln(n) - \gamma \underset{n\to+\infty}{=} o(1) .$$

Ainsi :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1) .$$

Q23. — Énoncer les inégalités données par le théorème des suites adjacentes pour les suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

Le théorème des suites adjacentes livre, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \leqslant \gamma \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) =: b_n$$

d'où :

$$(\star) \qquad 0 \leqslant \gamma - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right) \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$ est une valeur approchée de γ, avec une erreur majorée par $\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.

Q24. — En déduire une fonction `Python`, nommée `gamma`, d'argument un flottant $\varepsilon > 0$ et retournant une valeur approchée de γ avec une erreur inférieure ou égale à ε.

```python
from math import *

def gamma(epsilon):
    n=1
    S=0
    while log((n+1)/n) > epsilon:
        S=S+1/n
        n=n+1
    return S-log(n)
```

Exercice 4. – Étude d'une suite définie de manière implicite

On étudie la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie, de manière implicite par, pour tout $n \in \mathbf{N}$, x_n est l'unique solution de l'équation $x + \ln(x) = n$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}_{>0}$.

Q25. — Soit $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que l'équation $x + \ln(x) = n$ d'inconnnue $x \in]0, +\infty[$ admet une unique solution. Cette dernière sera notée x_n dans ce qui suit.

On introduit la fonction f_n définie par

$$f \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x + \ln(x) \end{array} \right. .$$

La fonction f est dérivable (donc continue) sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall\, x > 0, \quad f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0 .$$

D'après le critère différentiel de stricte monotonie, la fonction f est dont strictement croissante sur $]0, +\infty[$. De plus

$$f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty \qquad \text{et} \qquad f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty .$$

Du théorème de la bijection, nous déduisons alors que la fonction f est bijective. L'élément $n \in \mathbf{R}$ possède un et un seul antécédent par f, que l'on note x_n.

Q26. — Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement croissante.

Soit $n \in \mathbf{N}$. De

$$f\left(x_{n+1}\right) = n + 1 > n = f\left(x_n\right)$$

et de la *stricte* croissance de la fonction f, nous déduisons $x_{n+1} > x_n$ (pourquoi ?). La suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc strictement croissante.

Q27. — Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge vers $+\infty$.

D'après le théorème de la limite monotone, la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est soit convergente, soit divergente vers $+\infty$. Nous allons démontrer qu'elle n'est pas convergente (en raisonnant par l'absurde) et nous en déduirons

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty .$$

Supposons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge et notons $\ell \in \mathbf{R}$ sa limite. Comme la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^*, \qquad 0 < x_0 < x_n.$$

Par passage à la limite dans une inégalité, il vient

$$0 < x_0 \leqslant \ell.$$

Ainsi $\ell > 0$. Par continuité de la fonction f sur $]0, +\infty[$, nous en déduisons que :

$$f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell) \in \mathbf{R}$$

ce qui est contradictoire avec

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \qquad f(x_n) = n.$$

Q28. — Démontrer : $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Par définition de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$:

$$x_n + \ln(x_n) = n.$$

Comme $x_n \neq 0$, nous déduisons

$$1 + \frac{\ln(x_n)}{x_n} = \frac{n}{x_n} .$$

Par croissances comparées

$$\frac{\ln(X)}{X} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0.$$

De la question précédente et du résultat sur les composition de limites, nous déduisons

$$\frac{\ln(x_n)}{x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi

$$\frac{n}{x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

et donc $n \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n$.

Q29. — Démontrer : $x_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \ln(n) + o(\ln(n))$.

Indication : On pourra introduire la quantité a_n définie par $\frac{x_n}{n} = 1 + a_n$, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

Il s'agit de démontrer

$$\frac{x_n}{n} - 1 \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

i.e.

$$\frac{x_n}{n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{n}\ .$$

Nous savons d'après la question précédente que

$$\frac{x_n}{n} - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et il nous faut à présent préciser la vitesse de convergence de $\left(\frac{x_n}{n} - 1\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ vers 0.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Comme $x_n + \ln(x_n) = n$

$$(\star) \qquad \frac{x_n}{n} - 1 = -\frac{\ln(x_n)}{n}\ .$$

Nous observons

$$\ln(n) = \ln(x_n + \ln(x_n)) = \ln(x_n) + \ln\left(1 + \frac{\ln(x_n)}{x_n}\right).$$

Nous avons déjà établi

$$\frac{\ln(x_n)}{x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et nous en déduisons

$$\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(x_n)\ .$$

D'après cet équivalent et $(\star)$

$$\frac{x_n}{n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{n}$$

ce qu'il fallait établir.

Q30. — Démontrer : $x_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$.

Il s'agit de démontrer

$$\frac{x_n}{n} - 1 + \frac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$$

i.e.

$$\frac{x_n}{n} - 1 + \frac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n^2}\ .$$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. En reprenant les calculs effectués à la question précédente, il vient

$$(\star\star) \qquad \frac{x_n}{n} - 1 + \frac{\ln(n)}{n} = \frac{1}{n}\ \ln\left(1 + \frac{\ln(x_n)}{x_n}\right)\ .$$

Comme
$$\frac{\ln(x_n)}{x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \ln(1+X) \underset{X\to 0}{\sim} X$$
il vient
$$\ln\left(1+\frac{\ln(x_n)}{x_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(x_n)}{x_n} .$$
Comme nous avons établi
$$x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n \qquad \text{et} \qquad \ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$$
nous pouvons affirmer
$$\frac{\ln(x_n)}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n} .$$
De cet équivalent et de $\star\star$, nous déduisons
$$(\star\star) \qquad \frac{x_n}{n} - 1 + \frac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n^2}$$
ce qu'il fallait établir.

Exercice 5. – Limite supérieure d'une suite bornée

Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle bornée. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$:
$$A_n := \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\} = \{a_k \ : \ k \geqslant n\} \qquad \textit{et} \qquad s_n := \sup(A_n) .$$

Q31. — Soit $n \in \mathbf{N}$. Justifier que le nombre s_n est bien défini.

La partie A_n de $\mathbf{R}$ est non vide (elle contient a_n) et majorée, puisque la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est majorée. D'après la propriété de la borne supérieure, A_n possède une borne supérieure, i.e. admet un plus petit majorant.

Q32. — Justifier que la suite $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente.

- Soit $n \in \mathbf{N}$. Nous remarquons l'inclusion $A_{n+1} \subset A_n$. Ainsi tout majorant de A_n majore également A_{n+1}, en particulier s_n majore A_{n+1}. Comme s_{n+1} est le plus petit majorant de A_{n+1}, il vient $s_{n+1} \leqslant s_n$. La suite $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.
- Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée, il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\alpha \leq a_n$. Comme pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n \in A_n$, nous obtenons $a_n \leqslant s_n$. Nous en déduisons :
$$\forall\, n \in \mathbf{N} \quad \alpha \leqslant a_n \leqslant s_n .$$
La suite $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est minorée.
- D'après le théorème de la limite monotone, la suite $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

La limite de la suite $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ***est appelée limite supérieure de la suite*** $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ***et est notée*** $\overline{\lim}\, a_n$.

Q33. — Démontrer que $\overline{\lim}\, a_n$ est valeur d'adhérence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Quel théorème vient-on ainsi de re-démontrer ?

Posons $s := \overline{\lim}\, a_n = \lim s_n$. Remarquons que, d'après le théorème de la limite monotone, $s = \sup\limits_{n\in\mathbf{N}} s_n$. Nous allons construire, par récurrence, une suite d'entiers naturels $(\varphi(n))_{n\in\mathbf{N}}$ strictement croissante telle que $a_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} s$ pour répondre à la question posée.

- ***Construction de*** $\varphi(0)$. Comme $s-1<s$, $s-1$ ne majore pas la suite $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Donc il existe $N_0 \in \mathbf{N}$ tel que :
$$s-1 < s_{N_0} := \sup(A_{N_0}) \leqslant s\ .$$
Comme $s-1<\sup(A_{N_0})$, $s-1$ ne majore pas A_{N_0}. Donc il existe $M_0 \geqslant N_0$ tel que :
$$s-1 < a_{M_0} \leqslant \sup(A_{N_0}) \leqslant s\ .$$
Posons $\varphi(0)=M_0$. Nous avons :
$$s - \frac{1}{0+1} < a_{\varphi(0)} \leqslant s\ .$$
- ***Construction de*** $\varphi(1)$. Comme $s-\dfrac{1}{2}<s$, $s-\dfrac{1}{2}$ ne majore pas la suite $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Comme la suite $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante, $s-\dfrac{1}{2}$ ne majore pas non plus la suite $(s_n)_{n\geqslant\varphi(0)+1}$. Donc il existe $N_1>\varphi(0)$ tel que :
$$s-\frac{1}{2} < s_{N_1} := \sup(A_{N_1}) \leqslant s\ .$$
Comme $s-\dfrac{1}{2}<\sup(A_{N_1})$, $s-\dfrac{1}{2}$ ne majore pas A_{N_1}. Donc il existe $M_1 \geqslant N_1 > \varphi(0)$ tel que :
$$s-\frac{1}{2} < a_{M_1} \leqslant \sup(A_{N_1}) \leqslant s\ .$$
Posons $\varphi(1)=M_1>\varphi(0)$. Nous avons :
$$s - \frac{1}{1+1} < a_{\varphi(1)} \leqslant s\ .$$
- ***Hérédité.*** Soit $p\in\mathbf{N}^*$. Supposons construits des entiers naturels
$$\varphi(0)<\varphi(1)<\ldots<\varphi(p)$$
tels que pour tout $k\in[\![1,p]\!]$:
$$s-\frac{1}{k+1} < a_{\varphi(k)} \leqslant s\ .$$

Comme $s - \dfrac{1}{p+2} < s$, $s - \dfrac{1}{p+2}$ ne majore pas la suite $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Comme la suite $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante, $s - \dfrac{1}{p+2}$ ne majore pas non plus la suite $(s_n)_{n\geqslant\varphi(p)+1}$. Donc il existe $N_{p+1} > \varphi(p)$ tel que :

$$s - \frac{1}{p+2} < s_{N_{p+1}} := \sup(A_{N_{p+1}}) \leqslant s\ .$$

Comme $s - \dfrac{1}{p+2} < \sup(A_{N_{p+1}})$, $s - \dfrac{1}{p+2}$ ne majore pas $A_{N_{p+1}}$. Donc il existe $M_{p+1} \geqslant N_{p+1} > \varphi(p)$ tel que :

$$s - \frac{1}{p+2} < a_{M_{p+1}} \leqslant \sup(A_{N_{p+1}}) \leqslant s\ .$$

Posons $\varphi(p+1) = M_{p+1} > \varphi(p)$. Nous disposons alors d'entiers naturels :

$$\varphi(0) < \varphi(1) < \ldots < \varphi(p) < \varphi(p+1)$$

tels que pour tout $k \in [\![1, p+1]\!]$:

$$s - \frac{1}{k+1} < a_{\varphi(k)} \leqslant s\ .$$

À l'issue de cette construction par récurrence, nous obtenons une suite d'entiers naturels strictement croissante $(\varphi(n))_{n\in\mathbf{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$s - \frac{1}{n+1} < a_{\varphi(n)} \leqslant s\ .$$

Par théorème d'encadrement, $a_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} s$.

Nous avons démontré que toute suite réelle bornée possède une valeur d'adhérence. Nous reconnaissons l'énoncé du théorème de Bolzano-Weierstraß.

Q34. — Démontrer que $\overline{\lim}\, a_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Soit $\ell \in \mathbf{R}$ une valeur d'adhérence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Alors il existe une application $\varphi\colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante telle que $a_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

- Soit $n \in \mathbf{N}$. Nous savons $\varphi(n) \geqslant n$. Ainsi $a_{\varphi(n)} \in A_n$. Comme s_n majore A_n, il vient :

$$a_{\varphi(n)} \leqslant s_n\ .$$

- En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité large établie à l'instant, il vient :

$$\ell \leqslant \overline{\lim}\, a_n\ .$$

À la question précédente, nous avons démontré que $\overline{\lim}\, a_n$ est une valeur d'adhérence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Ici nous avons démontré que $\overline{\lim}\, a_n$ est plus grande que toute valeur d'adhérence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Ainsi avons-nous établi que $\overline{\lim}\, a_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Exercice 6. - Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Soient

$$F_1 := \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x+y+z=0\right\} \subset \mathbf{R}^3 \qquad \textit{et} \qquad G_1 := \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}\left((1,1,1)\right) \subset \mathbf{R}^3 \ .$$

Q35. — Justifier que F_1 et G_1 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$.

Clairement $(0,0,0) \in F_1$. Soient (x_1,y_1,z_1) et (x_2,y_2,z_2) des vecteurs de F_1 et soient λ_1 et λ_2 deux réels. Alors

$$\lambda_1.(x_1,y_1,z_1) + \lambda_2.(x_2,y_2,z_2) = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)$$

et puisque $x_1+y_1+z_1 = 0$ et $x_2+y_2+z_2=0$,

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 = \lambda_1(x_1+y_1+z_1) + \lambda_2(x_2+y_2+z_2) = 0 \ .$$

Ainsi $\lambda_1.(x_1,y_1,z_1) + \lambda_2.(x_2,y_2,z_2) \in F_1$.
Comme F_1 est non vide et stable par combinaison linéaire, F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.
Quant à G_1, il s'agit du sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $(1,1,1)$.

Q36. — Démontrer que F_1 et G_1 sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.

Nous devons démontrer que pour tout vecteur de $\mathbf{R}^3$ s'écrit d'une unique manière comme somme d'un élément de F_1 et d'un élément de G_1. Pour cela, nous raisonnons par analyse et synthèse.

Soit $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$.

• *Analyse.* Supposons qu'il existe $(x_1,y_1,z_1) \in F_1$ et $u \in G_1$ tels que $(x,y,z) = (x_1,y_1,z_1) + u$. Comme $u \in G_1$, il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $u = (\lambda,\lambda,\lambda)$. Il vient alors

$$(x_1,y_1,z_1) = (x-\lambda, y-\lambda, z-\lambda) \ .$$

Comme $x_1,y_1,z_1) \in F_1$

$$0 = x_1+y_1+z_1 = x-\lambda+y-\lambda,+z-\lambda$$

puis $\lambda = \dfrac{x+y+z}{3}$. Nous en déduisons

$$(x_1,y_1,z_1) = \left(\frac{2x-y-z}{3}, \frac{-x+2y-z}{3}, \frac{-x-y+2z}{3}\right) \qquad \text{et} \qquad u = \frac{x+y+z}{3}.(1,1,1) \ .$$

À l'issue de cette analyse, nous observons que nous obtenons un unique candidat pour (x_1,y_1,z_1) et u. Ainsi, si la décomposition cherchée existe, elle est unique. L'unicité est donc établie.

- *Synthèse.* Vérifions si les candidats obtenus en fin d'analyse conviennent.

— Comme
$$\frac{2x-y-z}{3}+\frac{-x+2y-z}{3}+\frac{-x-y+2z}{3}=0$$
le vecteur $\left(\frac{2x-y-z}{3},\frac{-x+2y-z}{3},\frac{-x-y+2z}{3}\right)$ appartient à F_1.

— Clairement $\frac{x+y+z}{3}.(1,1,1)\in G_1$.

— On calcule
$$\left(\frac{2x-y-z}{3},\frac{-x+2y-z}{3},\frac{-x-y+2z}{3}\right)+\frac{x+y+z}{3}.(1,1,1)=(x,y,z)\ .$$

- *Conclusion.* Il existe un unique vecteur de F_1, $\left(\frac{2x-y-z}{3},\frac{-x+2y-z}{3},\frac{-x-y+2z}{3}\right)$ et un unique vecteur de G_1, $\frac{x+y+z}{3}.(1,1,1)$ dont la somme vaut (x,y,z).

On désigne par E le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions définies sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbf{R}$, qui sont continues sur $[0,1]$. Soient :
$$F_2:=\left\{f\in E\ :\ \int_0^1 f(x)\ dx=0\right\}\subset E\qquad \textit{et}\qquad G_2:=\left\{\left|\begin{array}{ccc}[0,1]&\longrightarrow&\mathbf{R}\\ x&\longmapsto&a\end{array}\right.\ :\ a\in\mathbf{R}\right\}\subset E\ .$$
L'ensemble G_2 est donc l'ensemble des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$, qui sont constantes.

Q37. — Démontrer que F_2 et G_2 sont des sous-espaces vectoriels de E.

Nous introduisons l'application
$$\varphi\ \left|\begin{array}{ccc}E&\longrightarrow&\mathbf{R}\\ f&\longmapsto&\displaystyle\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x\ .\end{array}\right.$$
D'après la linéarité de l'intégrale, pour tout $(f,g)\in E^2$ et pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbf{R}^2$
$$\varphi(\lambda.f+\mu.g)=\int_0^1\lambda f(x)+\mu g(x)\ \mathrm{d}x=\lambda\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x+\mu\int_0^1 g(x)\ \mathrm{d}x=\lambda\varphi(f)+\mu\varphi(g)\ .$$
L'application φ est donc linéaire. D'après le cours, son noyau
$$\mathrm{Ker}\,(\varphi):=\{f\in E\ :\ \varphi(f)=0\}=F_2$$
est un sous-espace vectoriel de E.

On observe que
$$G_2=\left\{\left|\begin{array}{ccc}[0;1]&\longrightarrow&\mathbf{R}\\ x&\longmapsto&a\end{array}\right.\ :\ a\in\mathbf{R}\right\}=\mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}\left(\left|\begin{array}{ccc}[0;1]&\longrightarrow&\mathbf{R}\\ x&\longmapsto&1\end{array}\right.\right)\ .$$

Donc G_2 est un sous-espace vectoriel de E, comme sous-espace vectoriel engendré par un vecteur de E.

Q38. — Démontrer que F_2 et G_2 sont supplémentaires dans E.

Nous devons démontrer que pour tout vecteur de E s'écrit d'une unique manière comme somme d'un élément de F_2 et d'un élément de G_2. Pour cela, nous raisonnons par analyse et synthèse.

Soit $f \in E$.

• *Analyse.* Supposons qu'il existe $g \in F_2$ et $h \in G_2$ tels que $f = g + h$. Comme $h \in G_2$, il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que

$$h \left| \begin{array}{ccc} [0;1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & a \end{array} \right. .$$

D'après la linéarité de l'intégrale et $g \in F_2$

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x) + h(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x = a\,.$$

Ainsi

$$h \left| \begin{array}{ccc} [0;1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f \end{array} \right.$$

et

$$g \left| \begin{array}{ccc} [0;1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - \displaystyle\int_0^1 f \end{array} \right. .$$

À l'issue de cette analyse, nous observons que nous obtenons un unique candidat pour g et h. Ainsi, si la décomposition cherchée existe, elle est unique. L'unicité est donc établie.

• *Synthèse.* Vérifions si les candidats obtenus en fin d'analyse conviennent.
Comme

$$\int_0^1 f(x) - \int_0^1 f\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \int_0^1 f\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f - \int_0^1 f = 0$$

la fonction

$$g \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - \displaystyle\int_0^1 f \end{array} \right. .$$

appartient à G.
La fonction

$$h \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f \end{array} \right.$$

est constante, donc appartient à G_2.
Enfin, on a clairement $g + h = f$.

- *Conclusion.* Il existe un unique vecteur de F_2,

$$g \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - \displaystyle\int_0^1 f \end{array} \right.$$

et un unique vecteur de G_2,

$$h \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f \end{array} \right.$$

dont la somme vaut f.

Exercice 7. - Étude d'une projection de R^3

Nous définissons :

$$P = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ z = x - y\} \quad \textit{et} \quad D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x = -y = z\} \ .$$

Q39. — Démontrer que P et D sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbf{R}^3$.

- Vérifions que P est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

$$P = \{(x,y,x-y) \ : \ x,y \in \mathbf{R}\} = \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}(u_1, u_2)$$

où $u_1 := (1,0,1)$ et $u_2 = (0,1,-1)$. L'ensemble P est donc le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs u_1 et u_2.
- Vérifions que D est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

$$D = \{(-y,y,-y) \ : \ y \in \mathbf{R}\} = \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}(u_3)$$

où $u_3 := (-1,1,-1)$. L'ensemble D est donc le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur u_3.
- Soit $v = (x,y,z) \in \mathbf{R}^3$. Nous démontrons que v s'écrit d'une unique manière comme somme d'un vecteur de P et d'un vecteur de D, en raisonnant par analyse-synthèse.
  — *Analyse.* Soient $v_1 \in P$ et $v_2 \in D$ tels que $v = v_1 + v_2$. Comme $v_1 \in P$ et $v_2 \in D$, il existe des réels x_1, y_1, y_2 tels que :

$$v_1 = (x_1, y_1, x_1 - y_1) \quad \text{et} \quad v_2 = (-y_2, y_2, -y_2) \ .$$

Nous en déduisons :

$$(x,y,z) = (x_1 - y_2, y_1 + y_2, x_1 - y_1 - y_2)$$

puis :

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & & & - & y_2 & = & x \\ & & y_1 & + & y_2 & = & y \\ x_1 & - & y_1 & - & y_2 & = & z \ . \end{array} \right.$$

On résout ce système d'inconnues x_1, y_1, y_2 en appliquant l'algorithme du pivot de Gauss.

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{rrrrrl} x_1 & & - & y_2 & = & x \\ & y_1 & + & y_2 & = & y \\ - & y_1 & & 0 & = & z-x \end{array} \right. \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \ .$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rrrrrl} x_1 & - & y_2 & & = & x \\ & & y_2 & + \ y_1 & = & y \\ & & & y_1 & = & x-z \end{array} \right.$$

Nous en déduisons que ce système possède une unique solution :

$$x_1 = y+z \qquad ; \qquad y_1 = x-z \qquad ; \qquad y_2 = -x+y+z \ .$$

Ainsi, si v_1 et v_2 existent, alors :

$$v_1 = (y+z, x-z, -x+y+2z) \quad \text{et} \quad v_2 = (x-y-z, -x+y+z, x-y-z) \ .$$

Il y a donc unicité de v_1 et v_2. Donc si la décomposition existe, elle est unique.

— *Synthèse.* Vérifions si v_1 et v_2, obtenus en fin d'analyse, conviennent.

. $v_1 = (y+z, x-z, -x+y+2z) \in P$ car :

$$-x+y+2z = y+z-(x-z) \ .$$

. $v_2 = (x-y-z, -x+y+z, x-y-z) \in D$ car :

$$x-y-z = -(-x+y+z) = x-y-z$$

. Calculons enfin $v_1 + v_2$.

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 &= (y+z, x-z, -x+y+2z) + (x-y-z, -x+y+z, x-y-z) \\ &= (x,y,z) \\ &= v \ . \end{aligned}$$

— *Conclusion.* Il existe un unique

$$v_1 = (y+z, x-z, -x+y+2z) \in P$$

et un unique

$$v_2 = (x-y-z, -x+y+z, x-y-z) \in D$$

tels que $v = (x,y,z) = v_1 + v_2$.

Remarque. Nous aurions pu aussi démontrer $P \oplus D = \mathbf{R}^3$ *en démontrant* $P \cap D = \{0_{\mathbf{R}^3}\}$ *et* $\dim(P) + \dim(D) = \dim(\mathbf{R}^3)$. *Notre choix de stratégie est motivé la question suivante, qui est aisée à résoudre avec notre approche.*

Soit p *la projection de* $\mathbf{R}^3$ *sur* P*, parallèlement à* D.

Q40. — Calculer $p(x,y,z)$, pour tout $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$.

L'application p est définie par :

$$p \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ v = v_1 + v_2, \text{ où } v_1 \in P \text{ et } v_2 \in D & \longmapsto & v_1 \end{array} \right.$$

et donc, d'après la question précédente :

$$p \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (y + z, x - z, -x + y + 2z) \end{array} \right. .$$