M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Devoir surveillé n°1 (4h)

Suites numériques

Samedi 11 septembre 2021

David BLOTTIÈRE

Consignes

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, *les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.* Vous êtes invité à encadrer les résultats de vos calculs.

Si vous êtes amené à repérer ce qui peut vous sembler être une erreur d'énoncé, vous le signalerez sur votre copie et devrez poursuivre votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

Le sujet comporte sept exercices indépendants les uns des autres. Vous êtes libre de les traiter dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1. – Des sommes de Riemann

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$*, on pose* $u_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right)$ *et* $v_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

Q1. — Énoncer le théorème sur les sommes de Riemann.

Q2. — En appliquant le théorème sur les sommes de Riemann, démontrer :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (1-\cos(1))\, n\ . \tag{1}$$

Q3. — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Démontrer :

$$u_n = \frac{\sin\left(\dfrac{1}{2}\right)\ \sin\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}\right)}{\sin\left(\dfrac{1}{2n}\right)}\ .$$

Q4. — Donner une nouvelle démonstration de (1) en utilisant l'identité établie à la question précédente.

Q5. — Énoncer et démontrer la formule de Taylor avec reste intégral.

Q6. — Donner une démonstration de :

$$\forall x \in [0,\pi] \qquad x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x$$

en appliquant la formule de Taylor avec reste intégral.

Q7. — Démontrer :

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right)\ \frac{k}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sin(1)-\cos(1)\ .$$

Q8. — Déduire des deux questions précédentes :

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sin(1)-\cos(1)\ .$$

Exercice 2. – Théorème de Cesàro et étude d'une suite récurrente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *une suite de nombres réels. On lui associe la suite* $(S_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *dont le terme général est défini par :*

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \qquad S_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k \ .$$

Dans les trois prochaines questions, on suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *converge vers un réel* ℓ*. On se propose de démontrer qu'alors :*

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \ .$$

Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Cesàro.

Soit $\varepsilon > 0$.

Q9. — Démontrer qu'il existe $N_1 \in \mathbf{N}^*$ tel que pour tout entier $n \geqslant N_1 + 1$, $\displaystyle\sum_{k=N_1+1}^{n} |u_k - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Q10. — Justifier qu'il existe $N_2 \in \mathbf{N}^*$ tel que pour tout entier $n \geqslant N_2$, $\displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N_1} |u_k - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Q11. — En déduire qu'il existe $N_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que pour tout entier $n \geqslant N_0$, $|S_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

On considère désormais la réciproque du théorème de Cesàro.

Q12. — Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est-elle nécessairement convergente ?

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *la suite définie par la donnée de* $u_0 \in \mathbf{R}_{>0}$ *et la relation de récurrence :*

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2}$$

valable pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Q13. — À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.

Q14. — Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Q15. — En exprimant u_{n+1}^3 à l'aide de u_n, pour tout $n \in \mathbf{N}$, et en appliquant le théorème de Cesàro, démontrer :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt[3]{3n} \ .$$

Exercice 3. – De la série harmonique

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$*, on pose* $H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $a_n := H_n - \ln(n+1)$ *et* $b_n := H_n - \ln(n)$.

Q16. — Démontrer que la suite $(H_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est croissante.

Q17. — Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$.

Q18. — En déduire le comportement asymptotique de la suite $(H_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

Q19. — Démontrer :

$$\forall x \in \left]-1, +\infty\right[\quad \ln(1+x) \leqslant x \ .$$

Q20. — En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \ .$$

Q21. — Démontrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sont adjacentes.

D'après le théorème des suites adjacentes, les suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *sont convergentes et elles ont même limite. On note* γ *cette dernière. Ce nombre* $\gamma \approx 0.577215$ *est appelé constante d'Euler.*

Q22. — Déduire de la question précédente un développement asymptotique à deux termes de H_n, quand n tend vers $+\infty$.

Q23. — Énoncer les inégalités données par le théorème des suites adjacentes pour les suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

Q24. — En déduire une fonction `Python`, nommée gamma, d'argument un flottant $\varepsilon > 0$ et retournant une valeur approchée de γ avec une erreur inférieure ou égale à ε.

Exercice 4. – Étude d'une suite définie de manière implicite

On étudie la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *définie, de manière implicite par, pour tout* $n \in \mathbf{N}$, x_n *est l'unique solution de l'équation* $x + \ln(x) = n$ *d'inconnue* $x \in \mathbf{R}_{>0}$.

Q25. — Soit $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que l'équation $x + \ln(x) = n$ d'inconnnue $x \in \left]0, +\infty\right[$ admet une unique solution. Cette dernière sera notée x_n dans ce qui suit.

Q26. — Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement croissante.

Q27. — Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Q28. — Démontrer : $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

Q29. — Démontrer : $x_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \ln(n) + o(\ln(n))$.

Indication : On pourra introduire la quantité a_n définie par $\dfrac{x_n}{n} = 1 + a_n$, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

Q30. — Démontrer : $x_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \ln(n) + \dfrac{\ln(n)}{n} + o\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$.

Exercice 5. – Limite supérieure d'une suite bornée

Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle bornée. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$A_n := \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\} = \{a_k \ : \ k \geqslant n\} \qquad \textit{et} \qquad s_n := \sup(A_n) \ .$$

Q31. — Soit $n \in \mathbf{N}$. Justifier que le nombre s_n est bien défini.

Q32. — Justifier que la suite $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente.

La limite de la suite $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est appelée limite supérieure de la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et est notée $\overline{\lim}\, a_n$.

Q33. — Démontrer que $\overline{\lim}\, a_n$ est valeur d'adhérence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Quel théorème vient-on ainsi de re-démontrer ?

Q34. — Démontrer que $\overline{\lim}\, a_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Exercice 6. - Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Soient

$$F_1 := \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x+y+z=0\right\} \subset \mathbf{R}^3 \qquad \textit{et} \qquad G_1 := \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}\left((1,1,1)\right) \subset \mathbf{R}^3 \ .$$

Q35. — Justifier que F_1 et G_1 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$.

Q36. — Démontrer que F_1 et G_1 sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.

On désigne par E le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions définies sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbf{R}$, qui sont continues sur $[0,1]$. Soient :

$$F_2 := \left\{ f \in E \ : \ \int_0^1 f(x)\, dx = 0 \right\} \subset E \qquad \textit{et} \qquad G_2 := \left\{ \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & a \end{array} \right. \ : \ a \in \mathbf{R} \right\} \subset E \ .$$

L'ensemble G_2 est donc l'ensemble des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$, qui sont constantes.

Q37. — Démontrer que F_2 et G_2 sont des sous-espaces vectoriels de E.

Q38. — Démontrer que F_2 et G_2 sont supplémentaires dans E.

Exercice 7. - Étude d'une projection de R^3

Nous définissons :

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ z = x - y\} \quad \textit{et} \quad D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x = -y = z\} \ .$$

Q39. — Démontrer que P et D sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbf{R}^3$.

Soit p *la projection de* $\mathbf{R}^3$ *sur* P*, parallèlement à* D*.*

Q40. — Calculer $p(x, y, z)$, pour tout $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.