M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Un corrigé du Devoir Maison n°4

M. Devulder

Inégalités de Bernstein et transformée de Fourier

Dans ce problème,

— pour $k \in \mathbb{N}$, on dit qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ si elle est k fois dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée k-ième continue sur $\mathbb{R}$ (si $k = 0$, f est continue) ; on dit que f est $\mathcal{C}^\infty$ si f est $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ (respectivement $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$; on note $L^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ continues et intégrables sur $\mathbb{R}$;

— pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on note $\|f\|_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$;

— on note $L^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ continues et bornées sur $\mathbb{R}$;

— pour $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, on note $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.

On admet que $L^1(\mathbb{R}), L^\infty(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ $(k \in \mathbb{N})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^\mathbb{R}$. On admet également que $f \mapsto \|f\|_1$ définit une norme sur $L^1(\mathbb{R})$ et que $f \mapsto \|f\|_\infty$ définit une norme sur $L^\infty(\mathbb{R})$. On dispose ainsi des espaces vectoriels normés $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ et $(L^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

A – Transformée de Fourier d'une fonction

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On appelle transformée de Fourier de f et on note $\hat{f}$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-ix\xi}\mathrm{d}x$$

1. Montrer que, pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

On utilise le théorème de continuité des intégrales à paramètres.

- Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x)e^{-ix\xi}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\xi \mapsto f(x)e^{-ix\xi}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- On a l'hypothèse de domination : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \xi \in \mathbb{R},\ |f(x)e^{-ix\xi}| \leq |f(x)|$ et la fonction $|f|$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$

Ainsi, la fonction $\hat{f}$ est définie continue sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\forall f \in L^1(\mathbb{R}),\ \hat{f} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})}$$

2. Montrer que l'application $f \mapsto \hat{f}$ est une application linéaire continue de l'espace vectoriel normé $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ dans l'espace vectoriel normé $(L^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

L'application $f \mapsto \hat{f}$ est linéaire (linéarité du passage à l'intégrale). Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On a

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ |\hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)e^{-ix\xi}|\ dx = \|f\|_1$$

et donc $\widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$ avec

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$$

Ceci montre que l'application linéaire $f \mapsto \hat{f}$ est continue et même 1 lispchitzienne (pour les normes proposées).

$$\boxed{f \mapsto \hat{f} \text{ est continue de } (L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1) \text{ dans } (L^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)}$$

3. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et soit g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $g(x) = f(\lambda x)$ pour tout x. Montrer que $g \in L^1(\mathbb{R})$ et, pour tout réel ξ, exprimer $\hat{g}(\xi)$ à l'aide de $\hat{f}$, de ξ et de λ.

f étant continue, g l'est aussi. De plus, le changement de variable linéaire $u = \lambda x$ donne

$$\int_0^a |g(x)|\, dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda a} |f(u)|\, du$$

et cette quantité admet une limite finie quand $a \to +\infty$ et aussi quand $a \to -\infty$. Il y a donc intégrabilité aux voisinage des infinis et

$$\boxed{g \in L^1(\mathbb{R})}$$

On peut alors écrire $\hat{g}(\xi)$ et le même changement de variable donne

$$\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\xi u/\lambda}\, du$$

et ainsi

$$\boxed{\hat{g}(\xi) = \tfrac{1}{\lambda} \hat{f}(\tfrac{\xi}{\lambda})}$$

B – Produit de convolution

Si f et g sont deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$, on appelle produit de convolution de f et g, et on note $f * g$, la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) \mathrm{d}t.$$

On suppose désormais et jusqu'à la fin de la sous-partie B que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$.

4. Montrer que $f * g$ est définie sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t) dt = (g * f)(x)$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \longmapsto f(t)g(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. On a

$$\forall t \in \mathbb{R}, |f(t)g(x-t)| \leq |f(t)| \|g\|_\infty$$

f étant intégrable sur $\mathbb{R}$, la fonction $t \longmapsto f(t)g(x-t)$ l'est aussi, ce qui assure la définition de $f * g$ sur $\mathbb{R}$.

Le changement de variable $u = x - t$ donne immédiatement

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)g(u)\,du = (g * f)(x)}$$

5. Montrer que $f * g$ est bornée et que $\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_1 \|g\|_\infty$.

L'inégalité de la question précédente entraine que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ |(f * g)(x)| \leq \|g\|_\infty \|f\|_1$$

et ainsi

$$\boxed{f * g \text{ est bornée et } \|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_1 \|g\|_\infty}$$

6. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que, si g est de classe $\mathcal{C}^k$ et si les fonctions $g^{(j)}$ sont bornées pour $j \in [\![0, k]\!]$, alors $f * g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et $(f * g)^{(k)} = f * \left(g^{(k)}\right)$.

On utilise le théorème de régularité des intégrales à paramètres.
• $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \longmapsto f(t)g(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
• $\forall t \in \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(t)g(x-t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ de dérivée p-ième $x \longmapsto f(t)g^{(p)}(x-t)$.
• $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \longmapsto f(t)g^{(p)}(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
• $\forall x, t \in \mathbb{R}$, $\forall p \in [\![0, k]\!]$, $\left|f(t)g^{(p)}(x-t)\right| \leq \|g^{(p)}\|_\infty |f(t)|$ et ce majorant est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Le théorème s'applique et donne que $f * g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ avec

$$\boxed{(f * g)^{(k)} = f * \left(g^{(k)}\right)}$$

7. On suppose toujours que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ et on suppose de plus que $g \in L^1(\mathbb{R})$ et $f * g \in L^1(\mathbb{R})$.
En admettant que, pour tout ξ réel,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ix\xi} f(t)g(x-t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ix\xi} f(t)g(x-t)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t$$

existent et sont égales, montrer que $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$.

Par définition

$$\widehat{f * g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(x) e^{-ix\xi}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(t)g(x-t)\,dt\right)\,dx$$

Avec le résultat admis,

$$\widehat{f * g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(t)g(x-t)\,dx\right)\,dt$$

On pose $u = x - t$ dans l'intégrale intérieure :

$$\widehat{f * g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(u+t)\xi} f(t) g(u)\, du \right) dt$$

et on peut “faire sortir" de l'intégrale les termes indépendants de la variable u

$$\widehat{f * g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(t) e^{-it\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu\xi} g(u)\, du \right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-it\xi} \hat{g}(\xi)\, dt$$

Là encore $\hat{g}(\xi)$ peut sortir de l'intégrale et on obtient $\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$.

$$\boxed{\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}}$$

C – Introduction d'une fonction plateau

On cherche dans cette sous-partie à construire une fonction réelle positive ρ, définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, telle que $\rho(t) = 1$ pour tout $t \in [-1, 1]$ et $\rho(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R} \backslash [-2, 2]$.

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \mathrm{e}^{-1/t} & \text{sinon.} \end{cases}$$

8. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   On pourra montrer que : $\forall k \in \mathbb{N},\ \exists P_k \in \mathbb{R}[X],\ \forall t > 0,\ \varphi^{(k)}(t) = P_k(1/t)\mathrm{e}^{-1/t}$.

φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ par théorèmes d'opération. On prouve par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \exists P_k \in \mathbb{R}[X],\ \forall t > 0,\ \varphi^{(k)}(t) = P_k(1/t) e^{-1/t}$$

- C'est vrai au rang 0 avec $P_0 = 1$.
- Supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $k \geq 0$. On peut alors redériver et obtenir

$$\forall t > 0,\ \varphi^{(k)}(t) = \left(-\frac{1}{t^2} P_k'(1/t) + \frac{1}{t^2} P_k(1/t) \right) e^{-1/t}$$

  $P_{k+1} = X^2(-P_k' + P_k)$ est un polynôme convenable au rang $k+1$.

φ est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{-*}$ à dérivée nulle. Par le théorème de limite de la dérivée, il suffit de montrer que toutes les dérivées ont une limite finie à droite et gauche en 0 et que ces limites sont égales pour conclure que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. C'est le cas avec une limite nulle (évident à gauche et croissances comparées à droite).

$$\boxed{\varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$$

Soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin]-1, 1[\,, \\ \mathrm{e}^{1/(t^2-1)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

9. Montrer, en l'exprimant à l'aide de φ, que ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

On vérifie que
$$\forall t,\ \psi(t) = \varphi(1-t^2)$$
En effet, si $|t| \geq 1$, $1-t^2 \leq 0$ et $\varphi(1-t^2) = 0 = \psi(t)$ et si $|t| < 1$, $1-t^2 > 0$ et $\varphi(1-t^2) = e^{1/(t^2-1)} = \psi(t)$. Par théorèmes d'opération,
$$\boxed{\psi \in \mathcal{C}^\infty}$$

10. Soit θ l'unique primitive de ψ s'annulant en 0. Montrer que θ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, constante sur $]-\infty,-1]$ (on note A cette constante) et constante sur $[1,+\infty[$ (on note B cette constante). Vérifier que $A \neq B$.

$\boxed{\theta \in \mathcal{C}^\infty}$ comme primitive d'une telle fonction. De plus θ' est nulle sur chaque intervalle $]-\infty,-1]$ et $[1,+\infty[$ et donc θ est constante sur chacun de ces intervalles.
$$\boxed{\theta \text{ est constante sur }]-\infty,-1] \text{ et sur } [1,+\infty[}$$
Par théorème fondamental,
$$\theta(x) = \int_0^x \psi(t)\ dt$$
et les constantes sont
$$A = -\int_{-1}^0 e^{\frac{1}{t^2-1}}\ dt \ \text{ et } \ B = \int_0^1 e^{\frac{1}{t^2-1}}\ dt$$
Dans les deux cas, on intègre une fonction continue positive non nulle et les intégrales sont > 0. Ainsi
$$\boxed{A < 0 < B}$$
et les constantes sont en particulier différentes.

11. Construire alors une fonction $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, constante égale à 1 sur $[-1,1]$ et constante égale à 0 sur $\mathbb{R}\backslash[-2,2]$.

Notons $h_1 = \frac{\psi - A}{B-A}$: c'est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, nulle sur $]-\infty,-1]$ et valant 1 sur $[1,+\infty[$.
$h_1(2x+3)$ vaut 0 si $x \leq -2$ et vaut 1 si $x \geq -1$.

Notons $h_2 = \frac{\psi - B}{A-B}$: c'est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, nulle sur $[1,+\infty[$ et qui vaut 1 sur $]-\infty,-1]$.
$h_2(2x-3)$ vaut 0 si $x \geq 2$ et vaut 1 si $x \geq 1$.

La fonction $\rho = h_1 h_2$ est nulle hors de $]-2,2[$ et vaut 1 sur $[-1,1]$.

Il existe $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, constante égale à 1 sur $[-1,1]$ et constante égale à 0 sur $\mathbb{R}\backslash[-2,2]$

D – Inégalités de Bernstein

On admet les formules suivantes, dites formules d'inversion de Fourier :

— si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et si $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\hat{f}(\xi)\mathrm{d}\xi$;

— si $\alpha \in L^1(\mathbb{R})$, si a est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$: $x \mapsto \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{ix\xi}\alpha(\xi)\mathrm{d}\xi$, et si $a \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\alpha = \hat{a}$.

On remarque que ces résultats permettent d'affirmer que, si f et g sont deux fonctions continues telles que f, g, $\hat{f}$ et $\hat{g}$ sont intégrables et si $\hat{f} = \hat{g}$, alors $f = g$.

On considère toujours la fonction ρ définie à la question 11.

Soit r la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que, pour tout réel x,

$$r(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\rho(\xi)\mathrm{d}\xi$$

12. Montrer que r est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de sa fonction dérivée (faisant éventuellement intervenir une intégrale).

On remarque tout d'abord que

$$r(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{+2} e^{ix\xi}\rho(\xi)\, d\xi$$

On utilise le théorème de régularité des intégrales à paramètres.

- Pour tout x, $\xi \mapsto e^{ix\xi}\rho(\xi)$ est continue sur le segment et donc intégrable sur ce segment.
- Pour tout $\xi \in [-2,2]$, $x \mapsto e^{ix\xi}\rho(\xi)$ est de classe C^1 de dérivée $x \mapsto i\xi e^{ix\xi}\rho(\xi)$.
- Pour tout x, $\xi \mapsto i\xi e^{ix\xi}\rho(\xi)$ est continue.
- On a enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\xi \in [-2,2]$, $|i\xi e^{ix\xi}\rho(\xi)| \leq 2\|\rho\|_{\infty,[-2,2]}$ qui est intégrable sur le segment $[-2,2]$.

$$\boxed{r \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \text{ et } r'(x) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \xi e^{ix\xi}\rho(\xi)\, d\xi}$$

13. Montrer que $x \mapsto x^2 r(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et en déduire que r est intégrable et bornée sur $\mathbb{R}$.

Utilisons à nouveau l'expression ci-dessus de r. Par intégrations par parties (sur un segment) et comme ρ et toutes ses dérivées sont nulles en 2 et -2, on trouve

$$2\pi x^2 r(x) = i\int_{-2}^{+2} xe^{ix\xi}\rho'(\xi)\, d\xi = -\int_{-2}^{+2} e^{ix\xi}\rho''(\xi)\, d\xi$$

et ainsi

$$|x^2 r(x)| \leq \frac{1}{2\pi}4\|\rho''\|_{L^\infty([-2,2])}$$

$$\boxed{x \mapsto x^2 r(x) \text{ est bornée sur } \mathbb{R}}$$

r est continue sur $\mathbb{R}$ et les seuls problèmes d'intégrabilité sont au voisinage des infinis. En notant M un majorant de $x^2 r(x)$, on a $|r(x)| \leq M/x^2$ qui prouve cette intégrabilité par comparaison aux fonctions de Riemann.

$$\boxed{r \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}}$$

Enfin, on a $|r(x)| \leq \frac{2}{\pi}\|\rho\|_{L^\infty([-2,2])}$ et

$$\boxed{r \text{ est bornée sur } \mathbb{R}}$$

On admet qu'en utilisant la même méthode, on montre que r' est intégrable et bornée sur $\mathbb{R}$.

Soit $\lambda > 0$ et soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ et telle que $\hat{f}$ soit nulle en dehors du segment $[-\lambda, \lambda]$.

On note r_λ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $r_\lambda(x) = r(\lambda x)$ pour tout réel x.

14. On admet que $f * r_\lambda$ est intégrable. Montrer que $f = \lambda f * r_\lambda$.

Commençons par le cas $\lambda = 1$. Les fonctions f et r vérifient les hypothèses de la question 26 et on a donc $\widehat{f * r} = \hat{f}\hat{r}$.
Par ailleurs, le second résultat d'inversion de Fourier donne $\rho = \hat{r}$ et $\hat{r}$ est donc égale à 1 sur $[-1, 1]$.
Ainsi, $\hat{f}\hat{r}$ est égale à $\hat{f}$ sur $[-1, 1]$ mais cela est aussi vrai ailleurs (où il y a nullité).
On a donc $\widehat{f * r} = \hat{f}\hat{r} = \hat{f}$ et donc $f * r = f$ par formule d'inversion de Fourier.

Pour un $\lambda > 0$ quelconque, on remarque que (changement de variable $u = \lambda t$)

$$f * r_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) r(\lambda t)\, dt = \frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x - \frac{u}{\lambda}) r(u)\, du = \frac{1}{\lambda}(f_{1/\lambda} * r)(\lambda x)$$

Or, $\widehat{f_{1/\lambda}}(x) = \lambda \hat{f}(\lambda x)$ est nulle en dehors du segment $[-1, 1]$, intégrable sur $\mathbb{R}$ et $f_{1/\lambda} \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. On peut donc, avec le premier cas, affirmer que $f_{1/\lambda} * r = f_{1/\lambda}$. Ainsi

$$f * r_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda} f_{1/\lambda}(\lambda x) = \frac{1}{\lambda} f(x)$$

$$\boxed{f = \lambda f * r_\lambda}$$

15. En déduire que, si $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+^\star$, indépendante de λ et de f, telle que

$$\|f'\|_\infty \leqslant C\lambda \|f\|_\infty$$

La question 6 donne alors en dérivant (r et sa dérivée sont bornées) $f' = \lambda f * (r_\lambda)'$ et la question 5 indique que

$$\|f'\|_\infty \leq \lambda \|f\|_\infty \|(r_\lambda)'\|_1$$

Il suffit alors de remarquer que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(r_\lambda)'(x)|\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda r'(\lambda x)|\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |r'(u)|\, du$$

pour conclure que

$$\boxed{\|f'\|_\infty \leq \lambda \|f\|_\infty \|r'\|_1}$$