M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Devoir Maison n°4

Transformée de Fourier et inégalité de Bernstein

Pour le vendredi 4 février 2022

David BLOTTIÈRE

Inégalités de Bernstein et transformée de Fourier

Dans ce problème,

— pour $k \in \mathbb{N}$, on dit qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ si elle est k fois dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée k-ième continue sur $\mathbb{R}$ (si $k = 0$, f est continue) ; on dit que f est $\mathcal{C}^\infty$ si f est $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ (respectivement $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$; on note $L^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ continues et intégrables sur $\mathbb{R}$;

— pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on note $\|f\|_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$;

— on note $L^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ continues et bornées sur $\mathbb{R}$;

— pour $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, on note $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.

On admet que $L^1(\mathbb{R}), L^\infty(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ $(k \in \mathbb{N})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^\mathbb{R}$. On admet également que $f \mapsto \|f\|_1$ définit une norme sur $L^1(\mathbb{R})$ et que $f \mapsto \|f\|_\infty$ définit une norme sur $L^\infty(\mathbb{R})$. On dispose ainsi des espaces vectoriels normés $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ et $(L^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

A – Transformée de Fourier d'une fonction

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On appelle transformée de Fourier de f et on note $\hat{f}$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-ix\xi}\mathrm{d}x$$

1. Montrer que, pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'application $f \mapsto \hat{f}$ est une application linéaire continue de l'espace vectoriel normé $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ dans l'espace vectoriel normé $(L^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.
3. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et soit g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $g(x) = f(\lambda x)$ pour tout x. Montrer que $g \in L^1(\mathbb{R})$ et, pour tout réel ξ, exprimer $\hat{g}(\xi)$ à l'aide de $\hat{f}$, de ξ et de λ.

B – Produit de convolution

Si f et g sont deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$, on appelle produit de convolution de f et g, et on note $f * g$, la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\mathrm{d}t.$$

On suppose désormais et jusqu'à la fin de la sous-partie B que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$.

4. Montrer que $f * g$ est définie sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt = (g * f)(x)$$

5. Montrer que $f * g$ est bornée et que $\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_1 \|g\|_\infty$.

6. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que, si g est de classe $\mathcal{C}^k$ et si les fonctions $g^{(j)}$ sont bornées pour $j \in [\![0, k]\!]$, alors $f * g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et $(f * g)^{(k)} = f * \left(g^{(k)}\right)$.
7. On suppose toujours que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ et on suppose de plus que $g \in L^1(\mathbb{R})$ et $f * g \in L^1(\mathbb{R})$.
   En admettant que, pour tout ξ réel,
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ix\xi} f(t) g(x-t) \mathrm{d}t\right) \mathrm{d}x \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ix\xi} f(t) g(x-t) \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}t$$
   existent et sont égales, montrer que $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$

C – Introduction d'une fonction plateau

On cherche dans cette sous-partie à construire une fonction réelle positive ρ, définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, telle que $\rho(t) = 1$ pour tout $t \in [-1, 1]$ et $\rho(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R} \backslash [-2, 2]$.

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \mathrm{e}^{-1/t} & \text{sinon.} \end{cases}$$

8. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   On pourra montrer que : $\forall k \in \mathbb{N},\ \exists P_k \in \mathbb{R}[X],\ \forall t > 0,\ \varphi^{(k)}(t) = P_k(1/t)\mathrm{e}^{-1/t}$.

Soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin]-1, 1[\,, \\ \mathrm{e}^{1/\left(t^2-1\right)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

9. Montrer, en l'exprimant à l'aide de φ, que ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
10. Soit θ l'unique primitive de ψ s'annulant en 0. Montrer que θ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, constante sur $]-\infty, -1]$ (on note A cette constante) et constante sur $[1, +\infty[$ (on note B cette constante). Vérifier que $A \neq B$.
11. Construire alors une fonction $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, constante égale à 1 sur $[-1, 1]$ et constante égale à 0 sur $\mathbb{R} \backslash [-2, 2]$.

D – Inégalités de Bernstein

On admet les formules suivantes, dites formules d'inversion de Fourier :

— si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et si $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{ix\xi} \hat{f}(\xi) \mathrm{d}\xi$;

— si $\alpha \in L^1(\mathbb{R})$, si a est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$: $x \mapsto \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{ix\xi} \alpha(\xi) \mathrm{d}\xi$, et si $a \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\alpha = \hat{a}$.

On remarque que ces résultats permettent d'affirmer que, si f et g sont deux fonctions continues telles que f, g, $\hat{f}$ et $\hat{g}$ sont intégrables et si $\hat{f} = \hat{g}$, alors $f = g$.

On considère toujours la fonction ρ définie à la question 11.

Soit r la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que, pour tout réel x,

$$r(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} \rho(\xi) \mathrm{d}\xi$$

12. Montrer que r est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de sa fonction dérivée (faisant éventuellement intervenir une intégrale).
13. Montrer que $x \mapsto x^2 r(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et en déduire que r est intégrable et bornée sur $\mathbb{R}$.

On admet qu'en utilisant la même méthode, on montre que r' est intégrable et bornée sur $\mathbb{R}$.

Soit $\lambda > 0$ et soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ et telle que $\hat{f}$ soit nulle en dehors du segment $[-\lambda, \lambda]$.

On note r_λ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $r_\lambda(x) = r(\lambda x)$ pour tout réel x.

14. On admet que $f * r_\lambda$ est intégrable. Montrer que $f = \lambda f * r_\lambda$.
15. En déduire que, si $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+^\star$, indépendante de λ et de f, telle que
$$\|f'\|_\infty \leqslant C\lambda \|f\|_\infty$$