M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Un corrigé du devoir Maison n°3

Séries trigonométriques et nombres dyadiques

MM. Devulder et Lucas

David BLOTTIÈRE

Problème 1 : Séries trigonométriques

Il est utile en physique, notamment pour étudier des spectres d'énergie ou pour décomposer un signal périodique en harmoniques, de pouvoir écrire une fonction périodique en somme d'une série de fonctions trigonométriques.

Nous allons nous intéresser à l'aspect mathématique de cette décomposition pour les fonctions de période 2π.

Dans ce qui suit, on appelle "série trigonométrique" une série de fonctions du type

$$\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

où (a_n) *et* (b_n) *sont deux suites de réels.*

Dans la première partie, on étudie quelques exemples. Dans la deuxième partie, on s'intéresse plus particulièrement aux séries trigonométriques qui convergent normalement sur $\mathbf{R}$.

On notera $C_{2\pi}$ *l'espace vectoriel des fonctions continues et* 2π*-périodiques de* $\mathbf{R}$ *dans* $\mathbf{R}$. *Pour* $f \in C_{2\pi}$ *et* $n \in \mathbf{N}$, *on notera*

$$\alpha_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \quad \textit{et} \quad \beta_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

On rappelle que pour tout $z \in \mathbf{C}$, *la série* $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ *est absolument convergente et que* $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Partie 1 : exemples

Q1. — Démontrer que la série trigonométrique $\sum \left(\frac{1}{2^n}\cos(nx) + \frac{1}{3^n}\sin(nx)\right)$ converge normalement sur $\mathbf{R}$. Pour tout entier $p \geqslant 2$, déterminer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{e^{ix}}{p}\right)^n$ puis en déduire la valeur de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n}\cos(nx) + \frac{1}{3^n}\sin(nx)\right)$$

(il n'est pas utile de réduire au même dénominateur).

On a

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \left|\frac{1}{2^n}\cos(nx) + \frac{1}{3^n}\sin(nx)\right| \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$$

Le majorant est indépendant de x et est le terme général d'une série convergente. La série de fonctions est donc normalement convergente sur $\mathbf{R}$.
Pour le calcul, on remarque que pour $p \geq 2$, e^{ix}/p est de module < 1 et que donc (somme géométrique)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{ix}}{p}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{e^{ix}}{p}} = \frac{p}{p - e^{ix}}$$

En passant aux parties réelle et imaginaire, on a donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{p^n} = \frac{p^2 - p\cos(x)}{p^2 - 2p\cos(x) + 1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{p^n} = \frac{p\sin(x)}{p^2 - 2p\cos(x) + 1}$$

Il reste à combiner les résultats pour $p = 2$ et $p = 3$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} \cos(nx) + \frac{1}{3^n} \sin(nx) \right) = \frac{4 - 2\cos(x)}{5 - 4\cos(x)} + \frac{3\sin(x)}{10 - 6\cos(x)}$$

Q2. — Écrire la fonction $\varphi : x \longmapsto \exp(\cos(x))\cos(\sin(x))$ comme la somme d'une série trigonométrique. On pourra écrire la fonction $x \longmapsto \exp(e^{ix})$ comme somme de série de fonctions.

En utilisant le développement en série de l'exponentielle rappelé dans l'énoncé, on a

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \exp(e^{ix}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n!}$$

Or, $\exp(e^{ix}) = \exp(\cos(x))\exp(i\sin(x))$ et la partie réelle de cette quantité est

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \exp(\cos(x))\cos(\sin(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n!}$$

Q3. — Donner un exemple de suite (a_n) de limite nulle telle que la série trigonométrique $\sum a_n \cos(nx)$ ne converge pas simplement sur $\mathbf{R}$.

Posons $a_n = \frac{1}{n+1}$ et $u_n(x) = a_n \cos(nx)$. (a_n) est de limite nulle mais $u_n(0) = \frac{1}{n+1}$ est le terme général d'une série divergente. $\sum(u_n)$ n'est donc pas simplement convergente sur $\mathbf{R}$.

Q4. — On admet que la série trigonométrique $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(nx)$ converge simplement sur $\mathbf{R}$. Converge-t-elle normalement sur $\mathbf{R}$?

La norme infinie sur $\mathbf{R}$ de $x \mapsto \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ est immédiatement égale à $\frac{1}{\sqrt{n}}$ qui est le terme général d'une série divergente. La série de fonction proposée n'est donc pas normalement convergente sur $\mathbf{R}$.

Partie 2 : propriétés

Une condition suffisante

Q5. — Démontrer que si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors la série trigonométrique $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ converge normalement sur $\mathbf{R}$.

On a
$$\forall x \in \mathbf{R},\ |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \leq |a_n| + |b_n|$$
Le majorant est indépendant de x et est le terme général d'une série convergente. La série de fonctions est donc normalement convergente sur $\mathbf{R}$.

Une condition nécessaire

Q6. — Soient $a, b \in \mathbf{R}$ quelconques. Démontrer que le maximum de la fonction $x \mapsto |a\cos(x)+b\sin(x)|$ est $\sqrt{a^2+b^2}$.

On a $((.|.)$ étant le produit scalaire canonique sur $\mathbf{R}^2)$
$$\forall x \in \mathbf{R},\ |a\cos(x) + b\sin(x)| = |((a,b)|(\cos(x),\sin(x)))| \leq \|(a,b)\| \cdot \|(\cos(x),\sin(x))\| = \sqrt{a^2+b^2}$$
De plus, il y a un cas d'égalité :
- c'est immédiat si $a = b = 0$ (n'importe quel x convient) ;
- si $(a,b) \neq (0,0)$, $(a/\sqrt{a^2+b^2}, b/\sqrt{a^2+b^2})$ est un vecteur normé et il existe donc un x tel que ce vecteur soit $(\cos(x),\sin(x))$.

Remarque. On aurait pu également utiliser la transformation de Fresnel pour résoudre cette question.

Q7. — Démontrer que si la série trigonométrique $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ converge normalement sur $\mathbf{R}$, alors les suites (a_n) et (b_n) convergent vers 0 et les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes.

Posons $u_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$. On suppose ici que $\sum(\|u_n\|_\infty)$ converge. On a (avec la question précédente et car nx varie dans $\mathbf{R}$ quand c'est le cas pour x si $n > 0$)
$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \|u_n\|_\infty = \sqrt{a_n^2+b_n^2} \geq \begin{cases} |a_n| \\ |b_n| \end{cases}$$
Par comparaison des séries positives, $\sum(a_n)$ et $\sum(b_n)$ convergent absolument.

Autres propriétés

Q8. — On note f la somme d'une série trigonométrique $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ qui converge normalement sur $\mathbf{R}$. Justifier que $f \in C_{2\pi}$.

La convergence normale sur $\mathbf{R}$ entraîne la convergence uniforme sur $\mathbf{R}$ et cette dernière conserve la continuité. Les fonctions de la séries étant continues sur $\mathbf{R}$, il en est de même de f.
La convergence normale sur $\mathbf{R}$ entraîne la convergence simple sur $\mathbf{R}$. La convergence simple conserva la 2π-périodicité (si $S_n(x+2\pi) = S_n(x)$, on peut passer à la limite pour obtenir la 2π-périodicité de la limite). Ici, f est donc 2π-périodique et $f \in C_{2\pi}$.

Q9. — Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\, dx$ pour $n \neq 0$ et donner la valeur de $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(nx)\, dx$ pour k et n entiers.

On effectue une linéarisation : $\cos^2(nx) = \frac{1}{2}(\cos(2nx)+1)$. On a donc

$$\forall n \geq 1,\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\, dx = \left[\frac{1}{4n}\sin(2nx) + \frac{x}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

De même, $\sin(kx)\cos(nx) = \frac{1}{2}(\sin(kx+nx)+\sin(kx-nx))$. $\sin(px)$ est d'intégrale nulle sur $[-\pi,\pi]$ (évident si $p=0$, par primitivation en $-\frac{\cos(px)}{p}$ sinon). On en déduit que

$$\forall n,k,\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(nx)\, dx = 0$$

Q10. — On note f la somme d'une série trigonométrique $\sum(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ qui converge normalement sur $\mathbf{R}$: pour tout réel x, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx))$. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $\alpha_n(f) = a_n$ puis exprimer $\alpha_0(f)$ en fonction de a_0. On pourra utiliser sans démonstration que pour $k \neq n$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(nx)\, dx = 0$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. On a

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{\infty}(a_k\cos(kx)\cos(nx)+b_k\sin(kx)\cos(nx))\, dx$$

Posons encore $u_k(x) = a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)$. On a $\forall x,\ |u_k(x)\cos(nx)| \leq |u_k(x)| \leq \|u_k\|_\infty$. Le majorant est indépendant de x et est le terme général d'une série convergente (par l'hypothèse de normale convergence). On a donc sous l'intégrale une série de fonctions normalement convergente sur le SEGMENT $[-\pi,\pi]$ et on est dans le cas simple où on peut intervertir :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\, dx = \sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos(nx)\, dx + b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cos(nx))\, dx\right)$$

Dans la somme, tous les termes sont nuls sauf celui d'indice $k=n$ qui vaut $a_n\pi$ si $n \neq 0$ (question précédente et résultat admis) et $2\pi a_0$ si $n = 0$. Ainsi,

$$\forall n \neq 0,\ a_n = \alpha_n(f) \ \text{ et } \ a_0 = \frac{1}{2}\alpha_0(f)$$

On admettra, pour la suite du problème, que pour tout entier naturel n non nul $\beta_n(f) = b_n$ et $\beta_0(f) = 0$ (la démonstration n'est pas demandée).

Q11. — Soit $f \in C_{2\pi}$. Pour tout réel x, on pose $u_0(x) = \dfrac{\alpha_0(f)}{2}$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $u_n(x) = \alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx)$. On suppose ici que la série trigonométrique $\sum(u_n(x))$ converge normalement sur $\mathbf{R}$ vers une fonction notée g :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ g(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(\alpha_k(f)\cos(kx) + \beta_k(f)\sin(kx))$$

Quelles relations a-t-on dans ce cas entre $\alpha_n(g)$ et $\alpha_n(f)$? $\beta_n(g)$ et $\beta_n(f)$?

Il s'agit d'utiliser la question précédente avec $a_0 = \alpha_0(f)/2$, $b_0 = 0$ et pour $n \geq 1$, $a_n = \alpha_n(f)$ et $b_n = \beta_n(f)$. La somme est ici égale à g et on obtient donc

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \alpha_n(f) = \alpha_n(g) \ \text{ et } \ \beta_n(f) = \beta_n(g)$$

Q12. — Il est admis que si une fonction $h \in C_{2\pi}$ vérifie : pour tout entier naturel n, $\alpha_n(h) = \beta_n(h) = 0$, alors h est la fonction nulle. Démontrer que pour tout réel x, $g(x) = f(x)$.

$h \mapsto \alpha_n(h)$ et $h \mapsto \beta_n(h)$ étant linéaire, on a ici $\alpha_n(g - f) = \beta_n(g - f) = 0$ et, avec le résultat admis $g - f = 0$.

En résumé, lorsque la série trigonométrique $\sum(\alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx))$ d'une fonction $f \in C_{2\pi}$ converge normalement que $\mathbf{R}$ alors pour tout réel x, on a

$$f(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx))$$

Q13. — Si $f \in C_{2\pi}$ est une fonction paire, que vaut $\beta_n(f)$? Exprimer, sans démonstration, $\alpha_n(f)$ en fonction de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$.

Si f est paire, $x \mapsto f(x)\sin(nx)$ est impaire et sa fonction est donc d'intégrale nulle sur un intervalle centré sur 0 (ce que l'on voit par le changement de variable affine $t = -x$). En particulier,

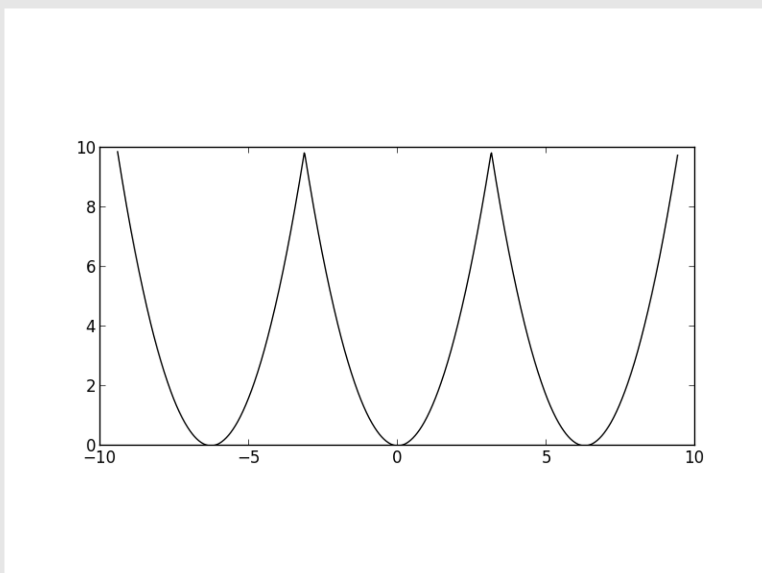
$$\forall n,\ \beta_n(f) = 0$$

$x \mapsto f(x)\cos(nx)$ est paire et

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \alpha_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,dx$$

Q14. — Exemple. Soit $f \in C_{2\pi}$ définie ainsi : pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = x^2$ et f est 2π-périodique sur $\mathbf{R}$. Construire la courbe de cette fonction paire f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$ puis déterminer, pour tout entier naturel, les coefficients $\alpha_n(f)$ et $\beta_n(f)$. Donner une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbf{R}$ vers f.

Ci-dessous on donne le graphe de la fonction f.



La fonction f étant paire, les coeffcients $\beta_n(f)$ sont tous nuls. De plus

$$\alpha_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos(nx)\,dx$$

Une double intégration par parties donne, pour $n \neq 0$,

$$\int_0^\pi x^2\cos(nx)\,dx = -\frac{2}{n}\int_0^\pi x\sin(nx)\,dx = -\frac{2}{n}\left(\left[-\frac{x\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos(nx)\,dx\right)$$

et ainsi

$$\forall n \neq 0,\ \alpha_n(f) = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

On a aussi

$$\alpha_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\ dx = \frac{2}{3}\pi^2$$

Comme $\sum(\alpha_n(f))$ et $\sum(\beta_n(f))$ convergent absolument, on peut utiliser ce qui précède et conclure

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \ f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

la série étant normalement convergente sur $\mathbf{R}$.

Q15. — En déduire les sommes

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

Déduire alors de la seconde somme la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

Pour $x = 0$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Pour $x = \pi$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

On découpe la somme en isolant les termes d'indice pair et ceux d'indice impair (c'est licite car la série est absolument convergente) :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

On en déduit que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Si f est paire, $x \mapsto f(x)\sin(nx)$ est impaire et sa fonction est donc d'intégrale nulle sur un intervalle centré sur 0 (ce que l'on voit par le changement de variable affine $t = -x$). En particulier,

$$\forall n,\ \ \beta_n(f) = 0$$

$x \mapsto f(x)\cos(nx)$ est paire et

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \ \alpha_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\ dx$$

Q16. — La somme d'une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbf{R}$ est-elle nécessairement une fonction dérivable sur $\mathbf{R}$?
Proposer une condition suffisante sur les séries $\sum na_n$ et $\sum nb_n$ pour que la somme de la série trigonométrique $\sum(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$, qui converge normalement sur $\mathbf{R}$ soit une fonction dérivable sur $\mathbf{R}$.

Dans l'exemple de la Q14, on a obtenu une série normalement convergente sur $\mathbf{R}$. Cependant la somme f n'est pas dérivable. En effet, f est dérivable à droite et gauche en π avec des nombres dérivés 2π (à gauche) et -2π (à droite).
Supposons que $\sum(na_n)$ et $\sum(nb_n)$ sont des séries absolument convergente. Montrons qu'alors en posant $u_n(x)=a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$, $\sum(u_n)$ converge normalement sur $\mathbf{R}$ vers une fonction de classe C^1 sur $\mathbf{R}$. On utilise pour cela le théorème de régularité des sommes de séries fonctions.

- $\forall n,\ u_n\in C^1(\mathbf{R})$ et $u_n'(x)=-na_n\sin(nx)+nb_n\cos(nx)$.
- $\sum(u_n)$ converge simplement sur $\mathbf{R}$.
- $\|u_n'\|_\infty\leq|na_n|+|nb_n|$ est le terme général d'une série convergente et $\sum(u_n')$ est donc normalement convergente sur $\mathbf{R}$.

Le théorème s'applique donc et indique non seulement que la somme est de classe C^1 mais que sa dérivée est la somme de la série dérivée.

Q17. — Déterminer la somme de la série trigonométrique $\sum\frac{n}{3^n}\cos(nx)$.

On a vu en Q1 que

$$\forall x\in\mathbf{R},\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{3^n}=\frac{3\sin(x)}{10-6\cos(x)}$$

On est dans le cadre de la condition précédente avec $a_n=0$ et $b_n=1/3^n$. On en déduit (en dérivant) que

$$\forall x\in\mathbf{R},\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\cos(nx)}{3^n}=\frac{3}{2}\frac{5\cos(x)-3}{(5-3\cos(x))^2}$$

Problème 2 : Nombres dyadiques

Partie 1 : une suite de fonctions

On définit la fonction sinc, *appelée sinus cardinal, par :*

$$\operatorname{sinc}\left|\begin{array}{ccc}\mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}\\ t & \longmapsto & \begin{cases}1 & \textit{si } t=0\\ \dfrac{\sin(t)}{t} & \textit{sinon}\end{cases}\end{array}\right.$$

et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on définit la fonction φ_n par :

$$\varphi_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) \end{array} \right. .$$

Q18. — Soit n un entier naturel non nul et t un réel. Démontrer :

$$\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)\varphi_n(t) = \frac{\sin(t)}{2^n} .$$

On montre par récurrence sur $p \in \mathbf{N}$ que : $\forall u \in \mathbf{R}$, $\sin\left(\frac{t}{2^p}\right)\prod_{k=1}^{p}\cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin(t)}{2^p}$

Initialisation : Pour $p = 0$, le produit vaut 1 et $2^0 = 1$ donc on a bien l'égalité voulue car $\sin(t) = \sin(t)$

Hérédité : Soit $p \in \mathbf{N}$. On suppose que la propriété au rang p.

Soit $u \in \mathbf{R}$. On a $\sin\left(\frac{u}{2^{p+1}}\right)\prod_{k=1}^{p+1}\cos\left(\frac{u}{2^k}\right) = \left(\sin\left(\frac{u/2}{2^p}\right)\prod_{k=1}^{p}\cos\left(\frac{u/2}{2^k}\right)\right)\cos\left(\frac{u}{2}\right)$

Ainsi avec l'hypothèse de récurrence, on a

$$\sin\left(\frac{u}{2^{p+1}}\right)\prod_{k=1}^{p+1}\cos\left(\frac{u}{2^k}\right) = \frac{\sin\left(\frac{u}{2}\right)}{2^p}\cos\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)\cos\left(\frac{u}{2}\right)}{2^{p+1}} = \frac{\sin(u)}{2^{p+1}}$$

Ce qui prouve l'hérédité.

Conclusion : On a montré par récurrence : $\forall p \in \mathbf{N},\ \forall u \in \mathbf{R}$, $\sin\left(\frac{t}{2^p}\right)\prod_{k=1}^{p}\cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin(t)}{2^p}$

On peut conclure que $\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)\varphi_n(t) = \frac{\sin(t)}{2^n}$.

Q19. — Déterminer la limite simple de la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$.

Soit $t \in \mathbf{R}$.

Premier cas : si $t \neq 0$: Quand $n \longrightarrow +\infty$, on a $\frac{t}{2^n} \longrightarrow 0$ et pour n assez grand, on a $0 < \left|\frac{t}{2^n}\right| < \pi$

donc $\sin\left(\frac{t}{2^n}\right) \sim \frac{t}{2^n}$ ainsi pour n assez grand, $\sin\left(\frac{t}{2^n}\right) \neq 0$

donc $\varphi_n(t) = \dfrac{\sin(t)}{2^n\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}$ et $2^n\sin\left(\frac{t}{2^n}\right) \sim t$

d'où $2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right) \longrightarrow t$ puis $\varphi_n(t) \longrightarrow \operatorname{sinc}(t)$

Deuxième cas : si $t=0$: On a $\varphi_n(0) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{0}{2^k}\right) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 = \operatorname{sinc}(0)$

On peut conclure que la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbf{R}$ vers sinc.

Q20. — Étudier la continuité de la fonction $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n$.

sinc est continue sur l'ouvert $\mathbf{R}^*$ par produit des fonctions continues sin et inverse. Quand $t \to 0$, on a $\operatorname{sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t} \sim \frac{t}{t} = 1$ donc $\lim\limits_{t\to 0} \operatorname{sinc}(t) = 1 = \operatorname{sinc}(0)$ donc sinc est continue en 0. Ainsi sinc limite simple sur $\mathbf{R}$ de la suite (φ_n) est continue sur $\mathbf{R}$.

Q21. — La suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbf{R}$?

Par l'absurde, on suppose que la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbf{R}$. Alors la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $\mathbf{R}$ vers sa limite simple qui est sinc. À partir d'un certain rang n_0, on a pour $n \geqslant n_0$ la fonction $\varphi_n - \operatorname{sinc}$ est bornée. et en notant $\|\cdot\|_\infty$ la norme infine sur $\mathbf{R}$ on a

$$\|\varphi_n - \operatorname{sinc}\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On peut également remarquer que les fonctions φ_n *et* sinc *sont bornées sur* $\mathbf{R}$. On considère la suite définie par $u_n = 2^{n+1}\pi$. On a $\varphi_n(u_n) = \varphi_n(u_n) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(2^{n-k}2\pi\right) = 1$ et $|\operatorname{sinc}(u_n)| = \left|\frac{\sin(u_n)}{u_n}\right| \leqslant \frac{1}{u_n}$ quand $n \to +\infty$, on a $u_n \to +\infty$ donc $\operatorname{sinc}(u_n) \to 0$ d'où

$$|\varphi_n(u_n) - \operatorname{sinc}(u_n)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

or on a $|\varphi_n(u_n) - \operatorname{sinc}(u_n)| \leqslant \|\varphi_n - \operatorname{sinc}\|_\infty$ donc par passage à la limite, on a $1 \leqslant 0$ ce qui est absurde ainsi La suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbf{R}$

Partie 2 : écriture binaire

Pour tout réel x*, on note* $\lfloor x \rfloor$ *sa partie entière.*

On note :

- $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ A_n = \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j 2^{n-j} \ :\ (x_j)_{j\in[\![1,n]\!]} \in \{0,1\}^n \right\}$;
- $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ D_n = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{2^j} \ :\ (x_j)_{j\in[\![1,n]\!]} \in \{0,1\}^n \right\}$ *et* $D = \bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} D_n$;
- $\forall n \in \mathbf{N},\ \pi_n(x) = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n}$;

- $\forall (x,n) \in \mathbf{R} \times \mathbf{N},\ d_{n+1}(x) = 2^{n+1}(\pi_{n+1}(x) - \pi_n(x))$.

Soit n un entier naturel non nul. On pose :

$$\Phi_n \left| \begin{array}{ccc} \{0,1\}^n & \longrightarrow & [\![0, 2^n - 1]\!] \\ (x_j)_{j \in [\![1,n]\!]} & \longmapsto & \sum_{j=1}^{n} x_j 2^{n-j} \end{array} \right. .$$

Q22. — Montrer que Φ_n est bien définie en vérifiant que $\mathrm{Im}(\Phi_n) \subset [\![0, 2^n - 1]\!]$.

Soit $x = (x_j)_{j \in [\![1,n]\!]} \in \{0,1\}^n$. On a $\forall j \in [\![1,n]\!],\ n - j \in \mathbf{N}$. Comme $\mathbf{N}$ est stable par l'addition, la multiplication et l'exponentiation, alors $\sum_{j=1}^{n} x_j 2^{n-j} \in \mathbf{N}$ (i) puis comme $\forall j \in [\![1,n]\!],\ x_j \leqslant 1$ et $2^{n-j} \geqslant 0$, on a :

$$\sum_{j=1}^{n} x_j 2^{n-j} \leqslant \sum_{j=1}^{n} 2^{n-j} \leqslant 2^{n-1} \frac{1 - (1/2)^n}{1 - (1/2)} = 2^n \left(1 - (1/2)^n\right) = 2^n - 1 \quad (ii)$$

On a reconnu une somme géométrique de raison $1/2 \in [0,1[$. Ainsi avec (i) et (ii), on a $\sum_{j=1}^{n} x_j 2^{n-j} \in [\![0, 2^n - 1]\!]$. Ainsi Φ_n est bien définie.

Q23. — Préciser $\mathrm{Im}(\Phi_n)$ en fonction de A_n.

Il est clair que $\mathrm{Im}(\Phi_n) = A_n$.

Q24. — Montrer par récurrence :

$$\forall k \in [\![0, 2^n - 1]\!],\ k \in \mathrm{Im}(\Phi_n)$$

Récurrence forte et finie On montre par récurrence finie sur $k \in [\![0, 2^n - 1]\!]$ que $k \in \mathrm{Im}\left(\Phi_n\right)$

Initilisation : On a $0 = \sum_{j=1}^{n} 0 \times 2^{n-j} = \Phi_n(\tilde{0}_n)$ où $\tilde{0}_n$ est la suite finie nulle.

Ainsi $0 \in \mathrm{Im}(\Phi_n)$ ce qui est l'initialisation.

Hérédité : Soit $k \in [\![1, 2^n - 1]\!]$. On suppose que $\forall p \in [\![0, k-1]\!],\ p \in \mathrm{Im}(\Phi_n)$. Montrons $k \in \mathrm{Im}(\Phi_n)$.

La division euclidienne de k par 2 nous fournit $q \in \mathbf{Z}$ et $r \in \{0,1\}$ tels que $k = 2q + r$

On remarque que $0 \leqslant q \leqslant k/2 < k$ car $k \in \mathbf{N}^*$ et donc $q \in [\![0, k-1]\!]$

Ceci nous fournit $(y_j)_{j \in [\![1,n]\!]} \in \{0,1\}^n$ tel que $q = \sum_{j=1}^{n} y_j 2^{n-j}$

De plus $q \leqslant k/2 \leqslant 2^{n-1} - 1/2 < 2^{n-1}$ donc $y_1 = 0$

Je définis alors $(x_j)_{j\in[\![1,n]\!]} \in \{0,1\}^n$ par $x_n = r$ et $\forall j \in [\![1, n-1]\!]$, $x_j = y_{j+1}$, de sorte que :

$$\sum_{j=1}^{n} x_j 2^{n-j} = \sum_{j=1}^{n-1} y_{j+1}2^{n-j}+x_n 2^0 = \sum_{i=2}^{n} y_i 2^{n-i+1}+r = \sum_{j=1}^{n} y_j 2^{n-j+1}+r = 2\sum_{j=1}^{n} y_j 2^{n-j}+r = 2q+r$$

Ainsi $k = \Phi_n\left((x_j)_{j\in[\![1,n]\!]}\right) \in \operatorname{Im}(\Phi_n)$

Conclusion : On a bien montré par récurrence que $\boxed{\forall k \in [\![0, 2^n-1]\!],\ k \in \operatorname{Im}(\Phi_n)}$

Récurrence finie avec un successeur Pour cette récurrence, l'initialisation est la même mais l'hérédité est plus laborieuse car on passe de k à $k+1$. Il faut donc avec l'écriture binaire de $k = \sum_{j=1}^{n} y_j 2^{n-j} \in [\![0, 2^n - 2]\!]$ prouver l'existence de j_0 maximum des j tel que $y_j = 0$

On pose alors $x_{j_0} = 1$ et pour $j < j_0$, $x_j = 0$ et pour $j > j_0$, $x_j = y_j$.

Puis on prouve que $k+1 = \sum_{j=1}^{n} x_j 2^{n-j}$ (facile mais pas drôle)

Récurrence infinie avec un successeur

On prouve par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$ que $\forall k \in [\![0, 2^n-1]\!],\ k \in \operatorname{Im}(\Phi_n)$.

L'initialisation se fait sans problème pour $n = 1$ (fonction identité).

Pour l'hérédité, on suppose vrai la propriété pour n et on prend $k \in [\![0, 2^{n+1}-1]\!]$.

Si $k \leqslant 2^n - 1$, on utilise l'hypothèse de récurrence avec k puis on décale les indices et on rajoute $x_1 = 0$.

Si $k > 2^n - 1$, on utilise l'hypothèse avec $k - 2^n$ puis on décale les indices et on rajoute $x_1 = 1$.

Q25. — En déduire que Φ_n est bijective.

On montre en Q22 que l'application $\Phi_n : \{0,1\}^n \longrightarrow [\![0, 2^n-1]\!]$ est bien définie puis qu'elle est surjective en Q23. De plus, on a $|\{0,1\}^n| = 2^n = |[\![0, 2^n-1]\!]|$. Ainsi Φ_n est bijective

Q26. — Établir la monotonie au sens de l'inclusion de la suite $(D_n)_{n\geqslant 1}$ puis vérifier $D \subset [0, 1[$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $k \in D_n$. On peut alors trouver $(y_j)_{j\in[\![1,n]\!]} \in \{0,1\}^n$ tel que $k = \sum_{j=1}^{n} \frac{y_j}{2^j}$. On définit alors $(x_j)_{j\in[\![1,n+1]\!]} \in \{0,1\}^{n+1}$ par $x_{n+1} = 0$ et $\forall j \in [\![1, n]\!],\ x_j = y_j$. De sorte que

$$k = \sum_{j=1}^{n} \frac{y_j}{2^j} + 0 = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{x_j}{2^j} \in D_{n+1}.$$

On vient de montrer que $D_n \subset D_{n+1}$ et donc la suite $(D_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante au sens de l'inclusion.

Soit $k \in D$. Ceci nous fournit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $k \in D_n$ puis $(x_j)_{j\in[\![1,n]\!]} \in \{0,1\}^n$ tel que $k = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{2^j}$.

Comme en Q22, on a $0 \leqslant k \leqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2}\frac{1-(1/2)^n}{1-1/2} = 1-(1/2)^n < 1$ d'où $0 \leqslant k < 1$. On a bien vérifié que $D \subset [0,1[$.

Q27. — Établir :

$$\forall (x,n) \in \mathbf{R} \times \mathbf{N},\ \pi_n(x) \leqslant x < \pi_n(x) + \frac{1}{2^n}\ .$$

Soit $(x,n) \in \mathbf{R} \times \mathbf{N}$. On a $\lfloor 2^n x \rfloor \leqslant 2^n x < \lfloor 2^n x \rfloor + 1$ par définition de la partie entière. Par division par $2^n > 0$, on obtient $\pi_n(x) \leqslant x < \pi_n(x) + \frac{1}{2^n}$.

Q28. — Justifier :

$$\forall x \in [0,1[,\ \forall k \in \mathbf{N},\ \pi_k(x) = \sum_{j=1}^{k} \frac{d_j(x)}{2^j}\ .$$

Soit $x \in [0,1[$ et $k \in \mathbf{N}$. On a par définition des π_j et puis par télescopage :

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{d_j(x)}{2^j} = \sum_{j=1}^{k} 2^j \frac{(\pi_j(x) - \pi_{j-1}(x))}{2^j} = \pi_k(x) - \pi_0(x)$$

Or $\pi_0(x) = \frac{\lfloor 2^0 x \rfloor}{2^0} = \lfloor x \rfloor = 0$ car $0 \leqslant x < 1$. D'où $\pi_k(x) = \sum_{j=1}^{k} \frac{d_j(x)}{2^j}$.

Q29. — Établir :

$$\forall (x,j) \in \mathbf{R} \times \mathbf{N}^*,\ d_j(x) \in \{0,1\}\ .$$

En posant $A = 2^j x$, on a $d_j(x) = \lfloor 2A \rfloor - 2\lfloor A \rfloor \in \mathbf{Z}$. On a $\lfloor A \rfloor \leqslant A < \lfloor A \rfloor + 1$ donc $2\lfloor A \rfloor \leqslant 2A < 2\lfloor A \rfloor + 2$ d'où $2\lfloor A \rfloor \leqslant \lfloor 2A \rfloor < 2\lfloor A \rfloor + 2$ et donc $0 \leqslant d_j(x) < 2$ ainsi $d_j(x) \in \{0,1\}$.

Q30. — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Justifier $x \in D_n \iff 2^n x \in [\![0, 2^n - 1]\!]$.

- $\Rightarrow$: On suppose que $x \in D_n$. On peut alors écrire $2^n x = \sum_{j=1}^{n} x_j 2^{n-j}$ avec $(x_j)_{j\in[\![1,n]\!]} \in \{0,1\}^n$. Ainsi $2^n x = \Phi_n\left((x_j)_{j\in[\![1,n]\!]}\right) \in [\![0, 2^n - 1]\!]$ (Q22).
- $\Leftarrow$: On suppose que $2^n x \in [\![0, 2^n - 1]\!]$ Comme $\Phi_n : \{0,1\}^n \longrightarrow [\![0, 2^n - 1]\!]$ est une bijection d'après Q25, cela nous fournit $(x_j)_{j\in[\![1,n]\!]} \in \{0,1\}^n$ tel que $2^n x = \Phi_n\left((x_j)_{j\in[\![1,n]\!]}\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j 2^{n-j}$ donc $x = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{2^j} \in D_n$.

On a bien l'équivalence $x \in D_n \iff 2^n x \in [\![0, 2^n - 1]\!]$.

Q31. — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que l'application Ψ_n définie par :

$$\Psi_n \left| \begin{array}{ccc} \{0,1\}^n & \longrightarrow & D_n \\ (x_j)_{j \in [\![1,n]\!]} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{2^j} \end{array} \right.$$

est bijective.

L'application $\Psi_n : \{0,1\}^n \longrightarrow D_n$ est bien définie est surjective par définition de D_n. D'après Q30, $D_n = \left\{ \dfrac{k}{2^n} \mid k \in [\![0, 2^n - 1]\!] \right\}$ et l'application $t \in \mathbf{R} \longmapsto \dfrac{t}{2^n} \in \mathbf{R}$ est bijective. Ainsi $|D_n| = 2^n = |\{0,1\}^n|$ et l'application Ψ_n est bien bijective.

Q32. — Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{2^j}$ avec $(x_j)_{j \in [\![1,n]\!]} \in \{0,1\}^n$. Montrer :

$$\forall k \in \mathbf{N},\ \pi_k(x) = \sum_{j=1}^{\min(n,k)} \frac{x_j}{2^j} .$$

Soit $i \in \mathbf{N}^*$. On a $d_i(x) = \lfloor 2^i x \rfloor - 2 \lfloor 2^{i-1} x \rfloor$ (comme en Q29). On pose pour $j \geqslant n+1$, $x_j = 0$ de sorte que $x = \sum\limits_{j=1}^{N} \frac{x_j}{2^j}$ pour tout entier $N \geqslant n$. On a

$$2^i x = \sum_{j=1}^{n} \frac{2^i x_j}{2^j} = \sum_{j=1}^{i} \frac{2^i x_j}{2^j} + \sum_{j=i+1}^{n} \frac{2^i x_j}{2^j}$$

en prenant comme convention $\displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} \frac{2^i x_j}{2^j} = 0$ si $i \geqslant n$ Si $n \geqslant i+1$, on a

$$0 \leqslant \sum_{j=i+1}^{n} \frac{2^i x_j}{2^j} \leqslant \sum_{j=i+1}^{n} \frac{2^i}{2^j} = \frac{2^i}{2^{i+1}} \frac{1 - (1/2)^{n-i}}{1 - (1/2)} = 1 - (1/2)^{n-i} < 1$$

dans tous les cas, on a : $\displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} \frac{2^i x_j}{2^j} \in [0, 1[$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{i} \frac{2^i x_j}{2^j} = \sum_{j=1}^{i} 2^{i-j} x_j \in \mathbf{N}$ d'où $\lfloor 2^i x \rfloor = \displaystyle\sum_{j=1}^{i} 2^{i-j} x_j$ et de même $\lfloor 2^{i-1} x \rfloor = \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} 2^{i-1-j} x_j$ donc $d_i(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{i} 2^{i-j} x_j - \sum_{j=1}^{i-1} 2^{i-j} x_j = 2^0 x_i = x_i$. Soit $k \in \mathbf{N}$. On a : $\pi_k(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{d_j(x)}{2^j} = \sum_{j=1}^{k} \frac{x_j}{2^j}$ d'après Q28 car $x \in D_n \subset [0, 1[$. Comme pour $j \geqslant n+1$, on a

$x_j = 0$, on peut conclure que $\pi_k(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{\min(n,k)} \frac{x_j}{2^j}$.

Partie 3 : il n'existe pas de bijection entre $[0,1[$ et N

Q33. — On suppose qu'il existe $f\colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{N})$ bijective. En considérant $A = \{x \in \mathbf{N} \ : \ x \notin f(x)\}$, établir une contradiction.

On considère $A = \{x \in \mathbf{N} / \ x \notin f(x)\}$. On a $A \in \mathcal{P}(\mathbf{N})$. Soit a l'antécédent de A par f de sorte que $f(a) = A$. On a alors $a \in A \iff a \notin A$ ce qui est absurde. Il n'existe pas d'application f : $\mathbf{N} \to \mathcal{P}(\mathbf{N})$ bijective.

Q34. — Pour toute partie A de N, on définit l'application $\mathbf{1}_A$ par :

$$\mathbf{1}_A \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \{0,1\} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } n \in A \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases} \end{array} \right.$$

Montrer que l'application

$$\Phi \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathbf{N}) & \longrightarrow & \{0,1\}^{\mathbf{N}} \\ A & \longmapsto & \mathbf{1}_A \end{array} \right.$$

est bijective.

On considère $\varphi \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}$.

Injectivité : Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbf{N})$ tel que $\mathbf{1}_A = \Phi(A) = \varphi$ Alors $\forall n \in \mathbf{N}$, $\varphi(n) = 1 \iff \mathbf{1}_A(n) = 1 \iff n \in A$ donc $A = \{n \in \mathbf{N} \mid \varphi(n) = 1\}$ ce qui prouve l'injectivité.

Surjectivité : Je pose $A = \{n \in \mathbf{N} \mid \varphi(n) = 1\}$ Soit $n \in \mathbf{N}$. Si $n \in A$, alors $\varphi(n) = 1 = \mathbf{1}_A(n)$ Si $n \notin A$, alors $\varphi(n) = 0 = \mathbf{1}_A(n)$ Ainsi φ et $\mathbf{1}_A : \mathbf{N} \longrightarrow \{0,1\}$ et $\forall n \in \mathbf{N}, \ \varphi(n) = \mathbf{1}_A(n)$ donc $\mathbf{1}_A = \varphi$ (surjectivité).

Q35. — Montrer que l'application

$$\Psi \left| \begin{array}{ccc} \{0,1\}^{\mathbf{N}} & \longrightarrow & [0,1] \\ (x_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}} \end{array} \right.$$

est bien définie et surjective. Est-elle injective ?

Soit $(x_n) \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}$. La série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{x_n}{2^{n+1}}$ étant à termes positifs, on a par calcul dans $[0, +\infty]$:

$$0 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 < +\infty$$

pour la majoration on a reconnu une série géométrique de raison $1/2 \in]-1,1[$. Ceci prouve la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{x_n}{2^{n+1}}$ de somme $\Psi\left((x_n)_n\right) \in [0,1]$. L'application Ψ est donc bien définie.

Je prends les suites (y_n) et (z_n) définies par $y_0 = 0$, $z_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ y_n = 1$ et $z_n = 0$. On a $(y_n) \neq (z_n)$ éléments de $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ et $\Psi\left((y_n)_n\right) = 1/2 = \Psi\left((z_n)_n\right)$ (somme géométrique). L'application Ψ n'est donc pas injective.

Passons à la surjectivité de Ψ.

Premier cas : soit $X = 1$. Je considère la suite $(x_n)_n \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ constante égale 1. On a alors $\Psi\left((x_n)_n\right) = 1 = X$.

Deuxième cas : soit $X \in [0,1[$. Je définis la suite (x_n) par : $\forall n \in \mathbf{N},\ x_n = d_{n+1}(X)$. D'après Q29, on a $(x_n) \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ et pour $N \in \mathbf{N}^*$, on a selon Q28,

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{x_n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{N} \frac{d_{n+1}(X)}{2^{n+1}} = \sum_{j=1}^{N+1} \frac{d_j(X)}{2^j} = \pi_{N+1}(X)$$

or d'après Q27, on a $\pi_{N+1}(X) \leqslant X < \pi_{N+1}(X) + \frac{1}{2^{N+1}}$ d'où

$$\left| X - \sum_{n=0}^{N} \frac{x_n}{2^{n+1}} \right| \leqslant \frac{1}{2^{N+1}}$$

Ceci prouve la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{x_n}{2^{n+1}}$ de somme X. Donc $X = \Psi\left((x_n)\right) \in \Psi\left(\{0,1\}^{\mathbf{N}}\right)$.

Conclusion : On vient de montrer que $\forall X \in [0,1],\ \exists x \in \{0,1\}^{\mathbf{N}},\ \Psi(X) = x$. Ce qui signifie que Ψ est surjective.

On note $D^* = D \setminus \{0\}$. On pose pour tout $(x_n) \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}$:

$$\Lambda((x_n)) = \begin{cases} \Psi((x_n)) & \textit{si } \Psi((x_n)) \in [0,1[\setminus D^* \\[2ex] \dfrac{\Psi((x_n))}{2} & \textit{si } \Psi((x_n)) \in D \cup \{1\} \textit{ et } (x_n) \textit{ stationnaire à } 1 \\[2ex] \dfrac{1 + \Psi((x_n))}{2} & \textit{si } \Psi((x_n)) \in D^* \textit{ et } (x_n) \textit{ stationnaire à } 0 \end{cases}$$

Q36. — *Montrer que Λ réalise une bijection de $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ sur $[0,1[$.*

Propriétés préliminaires : On remarque les propriétés suivantes de Ψ et D :

- **(i)** D est stable par division par 2, $\forall x \in D,\ |2x-1| \in D \cup \{1\}$ et $\forall x, y \in D,\ x + y < 1 \Longrightarrow x + y \in D$;
- **(ii)** l'image d'une suite stationnaire à valeurs dans $\{0,1\}$ par Ψ est à valeur dans $D \cup \{1\}$;
- **(iii)** 1 (respectivement 0) n'a qu'un seul antécédent par Ψ qui est la suite constante égale à 1

(respectivement à 0) ;

(iv) tout élément de $]0,1[\setminus D^*$ admet un seul antécédent par Ψ qui n'est pas stationnaire ;

(v) Chaque élément de D^* admet exactement deux antécédents par Ψ qui sont stationnaires l'une à 1 et l'autre à 0.

À ce stade du sujet nous admettrons les trois premières propriétés.

Soit $x \neq y$ dans $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ tel que $\Psi(x) = \Psi(y)$. On a alors l'existence de

$$i_0 = \min\{n \in \mathbf{N} \mid x_n \neq y_n\}$$

car toute partie non vide de $\mathbf{N}$ admet un minimum. Sans perte de généralité, on suppose que $x_{i_0} = 0$ et $y_{i_0} = 1$. Il suffira alors d'établir (à l'aide de (ii) et de de la question précédente) que :

$$\forall n > i_0,\ x_n = 1 \ \text{ et } \ y_n = 0. \qquad (\star)$$

On aura alors $\Psi(x) = \Psi(y) \in D$. Ce qui prouvera bien que les éléments de $]0,1[\setminus D^*$ admettent au plus un antécédent par Ψ c'est à dire **(iv)**.

De plus vue la configuration de x et y, $\Psi(x)$ (qui est élément de D^*) admettra exactement deux antécédents ce qui permettra facilement de conclure quant à **(v)** car on sait que tout élément de D admet un antécédent par Ψ qui stationne à 0.

Il reste donc à établir $(\star)$.

On a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y_n}{2^{n+1}}$$

donc $\displaystyle\sum_{n=i_0+1}^{+\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{i_0+1}} + \sum_{n=i_0+1}^{+\infty} \frac{y_n}{2^{n+1}}$ d'où $\displaystyle 1 = \sum_{n=i_0+1}^{+\infty} \frac{x_n - y_n}{2^{n-i_0}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_{k+i_0} - y_{k+i_0}}{2^k}$.

Je note pour $k \in \mathbf{N}^*$, $z_k = x_{k+i_0} - y_{k+i_0}$ et on a $z_k \in \{0,1,-1\}$. Pour obtenir le résultat voulu il suffit d'établir que $\forall k \in \mathbf{N}^*$, $x_{k+i_0} - y_{k+i_0} = z_k = 1$.
Par l'absurde, on suppose qu'il existe $p \in \mathbf{N}^*$, $z_p \neq 1$

On a $\displaystyle 1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z_k}{2^k}$ et on remarque que : $\displaystyle 1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1-z_k}{2^k} = 0$ d'où

$$0 = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1-z_k}{2^k} + \frac{1-z_p}{2^p} + \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1-z_k}{2^k}\ .$$

Or $\forall k \in \mathbf{N}^* \setminus \{p\}$, $\dfrac{1-z_k}{2^k} \geqslant 0$ et $\dfrac{1-z_p}{2^p} > 0$ d'où $0 > 0$ ce qui est absurde et ce qui permet de conclure.

Λ **bien définie** : Soit $x = (x_n) \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}$. On a $\Psi(x) \in [0,1]$.

D'après les remarques précédentes, on a :

$$\begin{array}{ll} & (\Psi(x) \in [0,1[\backslash D^*) \\ \text{ou} & \\ & (\Psi(x) \in D \cup \{1\} \text{ et } x \text{ stationne à } 1) \text{ ou } (\Psi(x) \in D^* \text{ et } x \text{ stationne à } 0) \end{array}$$

ainsi tous les cas sont envisagés. De plus $[0,1[$ est stable par $t \mapsto \dfrac{t}{2}$ et par $t \mapsto \dfrac{1+t}{2}$, donc si $\Psi(x) \neq 1$ alors $\Lambda(x) \in [0,1[$ et si $\Psi(x) = 1$ alors x stationne à 1 et $\Lambda(x) = \dfrac{1}{2} \in [0,1[$ Ainsi $\Lambda(x)$ et bien défini dans $[0,1[$. Ce qui prouve que Λ est bien définie.

Λ **surjective** : Soit $X \in [0,1[$. On montre l'existence de $x \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ tel que $\Lambda(x) = X$.

Si $X \in [0,1[\backslash D^*$:, alors la question précédente nous fournit $x \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ tel que $\Psi(x) = X$ et ainsi $X = \Lambda(x) = \Psi(x)$.

Si $X \in D^*$ et $0 < X \leqslant \dfrac{1}{2}$: alors $2X \in D^* \cup \{1\}$. donc $2X$ admet un antécédent $(x) \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ par Ψ qui stationne à 1. On a alors $\Psi(x) \in D \cup \{1\}$ et donc $\Lambda(x) = X$.

Si $X \in D^*$ et $\dfrac{1}{2} < X$: alors $2X - 1 \in D^*$ donc $2X - 1$ admet un antécédent $(x) \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ par Ψ qui stationne à 0 et ainsi $\Lambda(x) = X$.

Λ **injective** : Soit x et $y \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ telles que $\Lambda(x) = \Lambda(y)$.

Premier cas $\Lambda(x) \in [0,1[\backslash D^*$: alors $\Psi(x) = \Psi(y) = 0$ ou $\Psi(x) = \Psi(y) \in]0,1[\backslash D$ et donc $\Psi(x)$ admet un seul antécédent par Ψ d'où $x = y$.

Deuxième cas $\Lambda(x) \in D$ et $\Lambda(x) > \dfrac{1}{2}$: Alors $\Psi(x) = \Psi(y) \in D^*$ et x, y sont des suites qui ne stationnent pas à 1 donc elles stationnent à 0 puis $x = y$.

Troisième cas $\Lambda(x) \in D^*$ et $\Lambda(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$:
On obtient de même que ces suites stationnent à 1 puis que $x = y$.

Conclusion :Λ réalise une bijection de $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ sur $[0,1[$

Q37. — *Conclure qu'il n'existe pas de bijection entre* $[0,1[$ *et* $\mathbf{N}$.

On suppose par l'absurde qu'il existe une bijection $\theta \colon [0,1[\longrightarrow \mathbf{N}$. De Q36, on déduit l'existence d'une une bijection $\Lambda \colon \{0,1\}^{\mathbf{N}} \longrightarrow [0,1[$. D'après Q34, il existe une bijection $\Phi \colon \mathcal{P}(\mathbf{N}) \longrightarrow \{0,1\}^{\mathbf{N}}$. On en déduit que l'application :

$$\theta \circ \Lambda \circ \Phi \colon \mathcal{P}(\mathbf{N}) \longrightarrow \mathbf{N}$$

est bijective. Sa réciproque fournit une bijection de $\mathbf{N}$ dans $\mathcal{P}(\mathbf{N})$, ce qui contredit le résultat de Q33.

On conclut qu'il n'existe pas de bijection entre $[0, 1[$ et $\mathbf{N}$.