M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Devoir Maison n°3

Séries trigonométriques et nombres dyadiques

Pour le mardi 3 janvier 2022

David BLOTTIÈRE

Problème 1 : Séries trigonométriques

Il est utile en physique, notamment pour étudier des spectres d'énergie ou pour décomposer un signal périodique en harmoniques, de pouvoir écrire une fonction périodique en somme d'une série de fonctions trigonométriques.

Nous allons nous intéresser à l'aspect mathématique de cette décomposition pour les fonctions de période 2π.

Dans ce qui suit, on appelle "série trigonométrique" une série de fonctions du type

$$\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

où (a_n) et (b_n) sont deux suites de réels.

Dans la première partie, on étudie quelques exemples. Dans la deuxième partie, on s'intéresse plus particulièrement aux séries trigonométriques qui convergent normalement sur $\mathbf{R}$.

On notera $C_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Pour $f \in C_{2\pi}$ et $n \in \mathbf{N}$, on notera

$$\alpha_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \quad \textit{et} \quad \beta_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

On rappelle que pour tout $z \in \mathbf{C}$, la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente et que $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Partie 1 : exemples

Q1. — Démontrer que la série trigonométrique $\sum \left(\frac{1}{2^n} \cos(nx) + \frac{1}{3^n} \sin(nx) \right)$ converge normalement sur $\mathbf{R}$. Pour tout entier $p \geqslant 2$, déterminer la somme de la série $\sum_{n \geqslant 0} \left(\frac{e^{ix}}{p} \right)^n$ puis en déduire la valeur de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} \cos(nx) + \frac{1}{3^n} \sin(nx) \right)$$

(il n'est pas utile de réduire au même dénominateur).

Q2. — Écrire la fonction $\varphi \;:\; x \longmapsto \exp(\cos(x)) \cos(\sin(x))$ comme la somme d'une série trigonométrique. On pourra écrire la fonction $x \longmapsto \exp(e^{ix})$ comme somme de série de fonctions.

Q3. — Donner un exemple de suite (a_n) de limite nulle telle que la série trigonométrique $\sum a_n \cos(nx)$ ne converge pas simplement sur $\mathbf{R}$.

Q4. — On admet que la série trigonométrique $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(nx)$ converge simplement sur $\mathbf{R}$. Converge-t-elle normalement sur $\mathbf{R}$?

Partie 2 : propriétés

Une condition suffisante

Q5. — Démontrer que si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors la série trigonométrique $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ converge normalement sur $\mathbf{R}$.

Une condition nécessaire

Q6. — Soient $a, b \in \mathbf{R}$ quelconques. Démontrer que le maximum de la fonction $x \mapsto |a\cos(x)+b\sin(x)|$ est $\sqrt{a^2+b^2}$.

Q7. — Démontrer que si la série trigonométrique $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ converge normalement sur $\mathbf{R}$, alors les suites (a_n) et (b_n) convergent vers 0 et les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes.

Autres propriétés

Q8. — On note f la somme d'une série trigonométrique $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ qui converge normalement sur $\mathbf{R}$. Justifier que $f \in C_{2\pi}$.

Q9. — Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\, dx$ pour $n \neq 0$ et donner la valeur de $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(nx)\, dx$ pour k et n entiers.

Q10. — On note f la somme d'une série trigonométrique $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ qui converge normalement sur $\mathbf{R}$: pour tout réel x, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $\alpha_n(f) = a_n$ puis exprimer $\alpha_0(f)$ en fonction de a_0. On pourra utiliser sans démonstration que pour $k \neq n$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(nx)\, dx = 0$.

On admettra, pour la suite du problème, que pour tout entier naturel n non nul $\beta_n(f) = b_n$ et $\beta_0(f) = 0$ (la démonstration n'est pas demandée).

Q11. — Soit $f \in C_{2\pi}$. Pour tout réel x, on pose $u_0(x) = \dfrac{\alpha_0(f)}{2}$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $u_n(x) = \alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx)$. On suppose ici que la série trigonométrique $\sum (u_n(x))$ converge normalement sur $\mathbf{R}$ vers une fonction notée g :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ g(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (\alpha_k(f)\cos(kx) + \beta_k(f)\sin(kx))$$

Quelles relations a-t-on dans ce cas entre $\alpha_n(g)$ et $\alpha_n(f)$? $\beta_n(g)$ et $\beta_n(f)$?

Q12. — Il est admis que si une fonction $h \in C_{2\pi}$ vérifie : pour tout entier naturel n, $\alpha_n(h) = \beta_n(h) = 0$, alors h est la fonction nulle. Démontrer que pour tout réel x, $g(x) = f(x)$.

En résumé, lorsque la série trigonométrique $\sum(\alpha_n(f)\cos(nx)+\beta_n(f)\sin(nx))$ *d'une fonction* $f \in C_{2\pi}$ *converge normalement que* $\mathbf{R}$ *alors pour tout réel* x*, on a*

$$f(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n(f)\cos(nx)+\beta_n(f)\sin(nx))$$

Q13. — Si $f \in C_{2\pi}$ est une fonction paire, que vaut $\beta_n(f)$? Exprimer, sans démonstration, $\alpha_n(f)$ en fonction de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$.

Q14. — Exemple. Soit $f \in C_{2\pi}$ définie ainsi : pour tout $x \in [-\pi,\pi]$, $f(x) = x^2$ et f est 2π-périodique sur $\mathbf{R}$. Construire la courbe de cette fonction paire f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$ puis déterminer, pour tout entier naturel, les coefficients $\alpha_n(f)$ et $\beta_n(f)$. Donner une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbf{R}$ vers f.

Q15. — En déduire les sommes

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

Déduire alors de la seconde somme la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

Q16. — La somme d'une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbf{R}$ est-elle nécessairement une fonction dérivable sur $\mathbf{R}$?
Proposer une condition suffisante sur les séries $\sum na_n$ et $\sum nb_n$ pour que la somme de la série trigonométrique $\sum(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$, qui converge normalement sur $\mathbf{R}$ soit une fonction dérivable sur $\mathbf{R}$.

Q17. — Déterminer la somme de la série trigonométrique $\displaystyle\sum \frac{n}{3^n}\cos(nx)$.

Problème 2 : Nombres dyadiques

Partie 1 : une suite de fonctions

On définit la fonction sinc*, appelée sinus cardinal, par :*

$$\operatorname{sinc} \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \textit{si } t = 0 \\ \dfrac{\sin(t)}{t} & \textit{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$*, on définit la fonction* φ_n *par :*

$$\varphi_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{t}{2^k}\right) \end{array} \right. .$$

Q18. — Soit n un entier naturel non nul et t un réel. Démontrer :

$$\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)\varphi_n(t) = \frac{\sin(t)}{2^n}\ .$$

Q19. — Déterminer la limite simple de la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$.

Q20. — Étudier la continuité de la fonction $\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi_n$.

Q21. — La suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbf{R}$?

Partie 2 : écriture binaire

Pour tout réel x, on note $\lfloor x\rfloor$ sa partie entière.

On note :

- $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ A_n = \left\{\sum_{j=1}^{n} x_j 2^{n-j}\ :\ (x_j)_{j\in[\![1,n]\!]}\in\ \{0,1\}^n\right\}$;
- $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ D_n = \left\{\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{2^j}\ :\ (x_j)_{j\in[\![1,n]\!]}\in\ \{0,1\}^n\right\}$ *et* $D = \bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} D_n$;
- $\forall n\in\mathbf{N},\ \pi_n(x) = \frac{\lfloor 2^n x\rfloor}{2^n}$;
- $\forall (x,n)\in\mathbf{R}\times\mathbf{N},\ d_{n+1}(x) = 2^{n+1}(\pi_{n+1}(x)-\pi_n(x))$.

Soit n un entier naturel non nul. On pose :

$$\Phi_n \left|\begin{array}{ccc} \{0,1\}^n & \longrightarrow & [\![0,2^n-1]\!] \\ (x_j)_{j\in\,[\![1,n]\!]} & \longmapsto & \sum\limits_{j=1}^{n} x_j 2^{n-j}\ . \end{array}\right.$$

Q22. — Montrer que Φ_n est bien définie en vérifiant que $\mathrm{Im}(\Phi_n)\subset[\![0,2^n-1]\!]$.

Q23. — Préciser $\mathrm{Im}(\Phi_n)$ en fonction de A_n.

Q24. — Montrer par récurrence :

$$\forall k\in[\![0,2^n-1]\!],\ k\in\mathrm{Im}(\Phi_n)$$

Q25. — En déduire que Φ_n est bijective.

Q26. — Établir la monotonie au sens de l'inclusion de la suite $(D_n)_{n\geqslant 1}$ puis vérifier $D\subset[0,1[$.

Q27. — Établir :

$$\forall (x,n)\in\mathbf{R}\times\mathbf{N},\ \pi_n(x)\leqslant x<\pi_n(x)+\frac{1}{2^n}\ .$$

Q28. — Justifier :

$$\forall x \in [0,1[,\ \forall k \in \mathbf{N},\ \pi_k(x) = \sum_{j=1}^{k} \frac{d_j(x)}{2^j}\ .$$

Q29. — Établir :

$$\forall (x,j) \in \mathbf{R} \times \mathbf{N}^*,\ d_j(x) \in \{0,1\}\ .$$

Q30. — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Justifier $x \in D_n \iff 2^n x \in [\![0, 2^n - 1]\!]$.

Q31. — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que l'application Ψ_n définie par :

$$\Psi_n \left| \begin{array}{ccc} \{0,1\}^n & \longrightarrow & D_n \\ (x_j)_{j\in [\![1,n]\!]} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{2^j} \end{array} \right.$$

est bijective.

Q32. — Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{2^j}$ avec $(x_j)_{j\in [\![1,n]\!]} \in \{0,1\}^n$. Montrer :

$$\forall k \in \mathbf{N},\ \pi_k(x) = \sum_{j=1}^{\min(n,k)} \frac{x_j}{2^j}\ .$$

Partie 3 : il n'existe pas de bijection entre $[0,1[$ et $\mathbf{N}$

Q33. — On suppose qu'il existe $f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{N})$ bijective. En considérant $A = \{x \in \mathbf{N}\ :\ x \notin f(x)\}$, établir une contradiction.

Q34. — Pour toute partie A de $\mathbf{N}$, on définit l'application $\mathbf{1}_A$ par :

$$\mathbf{1}_A \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \{0,1\} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } n \in A \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases} \end{array} \right.$$

Montrer que l'application

$$\Phi \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathbf{N}) & \longrightarrow & \{0,1\}^{\mathbf{N}} \\ A & \longmapsto & \mathbf{1}_A \end{array} \right.$$

est bijective.

Q35. — Montrer que l'application

$$\Psi \left| \begin{array}{ccc} \{0,1\}^{\mathbf{N}} & \longrightarrow & [0,1] \\ (x_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}} \end{array} \right.$$

est bien définie et surjective. Est-elle injective ?

On note $D^* = D \setminus \{0\}$***. On pose pour tout*** $(x_n) \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ ***:***

$$\Lambda((x_n)) = \begin{cases} \Psi((x_n)) & \textbf{\textit{si}}\ \ \Psi((x_n)) \in [0,1[\setminus D^* \\ \\ \dfrac{\Psi((x_n))}{2} & \textbf{\textit{si}}\ \ \Psi((x_n)) \in D \cup \{1\}\ \ \textbf{\textit{et}}\ (x_n)\ \textbf{\textit{stationnaire à}}\ 1 \\ \\ \dfrac{1+\Psi((x_n))}{2} & \textbf{\textit{si}}\ \ \Psi((x_n)) \in D^*\ \ \textbf{\textit{et}}\ (x_n)\ \textbf{\textit{stationnaire à}}\ 0 \end{cases}$$

Q36. — ***Montrer que*** Λ ***réalise une bijection de*** $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ ***sur*** $[0,1[$.

Q37. — ***Conclure qu'il n'existe pas de bijection entre*** $[0,1[$ ***et*** $\mathbf{N}$.