M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Un corrigé du devoir Maison n°1

Suites et séries numériques

David BLOTTIÈRE

Soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites d'éléments de $\mathbf{R}_{>0}$. On suppose que la suite $(a_n)_{n\in\,\mathbf{N}}$ est décroissante et que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 1 \ .$$

On pose, pour $n \in \mathbf{N}$

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \ .$$

Q1. — Soient m et n deux entiers naturels tels que $m > n$. Démontrer que

$$a_n \leqslant \frac{1}{B_n} \ \text{ et } \ 1 \leqslant a_n B_{m-n} + a_0(B_m - B_{m-n}) \ .$$

• On a, par décroissance de la suite $(a_p)_{p\in\mathbf{N}}$ et stricte positivité de $(b_p)_{p\in\mathbf{N}}$:

$$1 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \geqslant \sum_{k=0}^{n} a_n b_{n-k} = a_n \sum_{j=0}^{n} b_j = a_n B_n$$

d'où, puisque $B_n > 0$:

$$a_n \leqslant \frac{1}{B_n} \ .$$

• De plus :

$$1 = \sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_{m-k} + \sum_{k=n}^{m} a_k b_{m-k} \leqslant a_0 \sum_{k=0}^{n-1} b_{m-k} + a_n \sum_{k=n}^{m} b_{m-k}$$

or :

$$\sum_{k=n}^{m} b_{m-k} = \sum_{j=0}^{m-n} b_j$$

et

$$\sum_{k=0}^{n-1} b_{m-k} = \sum_{j=m-n+1}^{m} b_j = B_m - B_{m-n}$$

d'où :

$$1 \leqslant a_n B_{m-n} + a_0(B_m - B_{m-n}).$$

Q2. — On suppose dans cette question qu'il existe $(m_n)_{n\in\,\mathbf{N}}$ vérifiant $m_n > n$ pour n assez grand et

$$B_{m_n - n} \underset{n\to+\infty}{\sim} B_n \ \text{ et } \ B_{m_n} - B_{m_n - n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \ .$$

Démontrer que

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{B_n} \ .$$

Pour n assez grand, on a $m_n > n$ donc à l'aide de la question précédente et par stricte positivité de la suite $(B_p)_{p\in\mathbf{N}}$, on a

$$\frac{1-a_0(B_{m_n}-B_{m_n-n})}{B_{m_n-n}} \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{B_n}$$

donc

$$\frac{B_n}{B_{m_n-n}}\left(1-a_0(B_{m_n}-B_{m_n-n})\right) \leqslant a_n B_n \leqslant 1 \ .$$

Par hypothèse

$$\frac{B_n}{B_{m_n-n}}\left(1-a_0(B_{m_n}-B_{m_n-n})\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \ .$$

D'après le théorème d'encadrement

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{B_n} \ .$$

Q3. — On suppose dans cette question qu'il existe $C > 0$ tel que

$$b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{n} \ .$$

En utilisant la question **Q2** pour une suite $(m_n)_{n\in\mathbf{N}}$ bien choisie, montrer que

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{C\ln(n)} \ .$$

• En utilisant une comparaison série/intégrale avec la fonction $t \mapsto \dfrac{C}{t}$ qui est continue, positive et décroissante sur $[1,+\infty[$, on établit :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{C}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} C\ln(n)$$

puis par sommation des relations de comparaison pour les séries à termes positifs ou nuls, on a

$$B_n \underset{n\to+\infty}{\sim} C\ln(n)$$

d'où

$$B_n \underset{n\to+\infty}{=} C\ln(n) + \mathrm{o}\left(\ln(n)\right) \ .$$

• On pose $m_n = \lfloor n\ln(n)\rfloor$ si $n \geqslant 1$ et $m_0 = 0$.

• Pour $n \geqslant e^2$, on a :

$$m_n \geqslant 2n > n \ . \tag{1}$$

• De plus pour $n \geqslant 1$, on a $n\ln(n) - 1 < m_n \leqslant n\ln(n)$ donc

$$m_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n) \ .$$

puis

$$m_n - n \underset{n\to+\infty}{=} n\ln(n) - n + \mathrm{o}\left(n\ln(n)\right) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln(n) + \mathrm{o}\left(n\ln(n)\right)$$

donc

$$B_{m_n-n} \underset{n\to+\infty}{=} C\ln\left(m_n - n\right) + \mathrm{o}\left(\ln\left(m_n-n\right)\right)\ .$$

Or

$$\begin{aligned} \ln\left(m_n - n\right) &\underset{n\to+\infty}{=} \ln\left(n\ln(n) + \mathrm{o}\left(n\ln(n)\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \ln(\ln(n)) + \ln(1+\mathrm{o}(1)) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \mathrm{o}\left(\ln(n)\right)\ . \end{aligned}$$

Ainsi

$$B_{m_n-n} \underset{n\to+\infty}{\sim} C\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} B_n \tag{2}$$

• Enfin $B_{m_n} - B_{m_n-n} = \displaystyle\sum_{k=m_n-n+1}^{m_n} b_k$. L'équivalent, $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C}{n}$, nous fournit $A\in\mathbf{N}$, tel que

$$\forall k \geqslant A, \quad 0 < b_k \leqslant \frac{2C}{k}\ .$$

Comme $m_n - n + 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ ceci nous fournit $N\in\mathbf{N}$, tel que

$$\forall\, n \geqslant N, \quad m_n - n + 1 \geqslant A\ .$$

Ainsi pour $n \geqslant N$, on a

$$0 \leqslant B_{m_n} - B_{m_n-n} \leqslant \sum_{k=m_n-n+1}^{m_n} \frac{2C}{k} \leqslant \frac{2Cn}{m_n - n + 1}\ .$$

Or $\dfrac{2Cn}{m_n-n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'où

$$B_{m_n} - B_{m_n-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\ . \tag{3}$$

• Avec 1, 2 et 3, les hypothèses de **Q2** sont vérifiées et donc on a bien

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{C\ln(n)}\ .$$