M P

Lycée Chrestien de Troyes

Mathématique

Devoir Maison n°1

Suites et séries numériques

Pour le mardi 12 octobre 2021

David BLOTTIÈRE

Soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites d'éléments de $\mathbf{R}_{>0}$. On suppose que la suite $(a_n)_{n\in\,\mathbf{N}}$ est décroissante et que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 1 \ .$$

On pose, pour $n \in \mathbf{N}$

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \ .$$

Q1. — Soient m et n deux entiers naturels tels que $m > n$. Démontrer que

$$a_n \leqslant \frac{1}{B_n} \ \text{ et } \ 1 \leqslant a_n B_{m-n} + a_0(B_m - B_{m-n}) \ .$$

Q2. — On suppose dans cette question qu'il existe $(m_n)_{n\in\,\mathbf{N}}$ vérifiant $m_n > n$ pour n assez grand et

$$B_{m_n - n} \underset{n\to+\infty}{\sim} B_n \ \text{ et } \ B_{m_n} - B_{m_n - n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \ .$$

Démontrer que

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{B_n} \ .$$

Q3. — On suppose dans cette question qu'il existe $C > 0$ tel que

$$b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{n} \ .$$

En utilisant la question **Q2** pour une suite $(m_n)_{n\in\,\mathbf{N}}$ bien choisie, montrer que

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{C\ln(n)} \ .$$