10. Convexité

§ 1 Parties convexes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Dans toute cette partie, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Le cas où $E = \mathbb{R}^2$ jouera un rôle prépondérant dans ce chapitre.

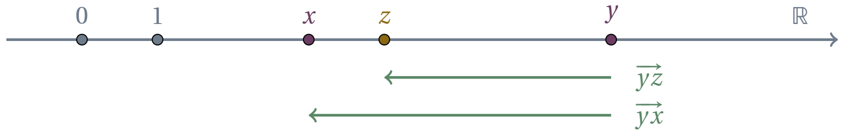
§ 1.1 Segment

Nous avons déjà rencontré la notion de segment dans le contexte des nombres réels. Si x et y sont deux réels tels que $x < y$, alors le segment $[x, y]$ est défini par :

$$[x, y] := \left\{z \in \mathbb{R} \,:\, x \leqslant z \leqslant y\right\} .$$

Nous ne pouvons étendre immédiatement cette définition au $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, puisque nous ne disposons pas *a priori* de relation d'ordre sur E. Nous pouvons observer, au moyen d'une figure qu'un réel z appartient au segment $[x, y]$ si et seulement si :

$$\exists \lambda \in [0,1], \quad \underbrace{\overrightarrow{yz}}_{z-y} = \lambda \underbrace{\overrightarrow{yx}}_{x-y}$$



i.e. si et seulement s'il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que $z = \lambda x + (1 - \lambda) y$. Ces considérations conduisent à formuler l'énoncé suivant.

C10.1. Lemme (Description en extension d'un segment réel) Soient x, y des nombres réels tels que $x < y$. Alors :

$$\left\{z \in \mathbb{R} \,:\, x \leqslant z \leqslant y\right\} = \left\{\lambda x + (1 - \lambda) y \,:\, \lambda \in [0, 1]\right\} .$$

Démonstration

$\boxed{\supset}$ Soit $z \in \left\{\lambda x + (1 - \lambda) y \,:\, \lambda \in [0, 1]\right\}$.
- Comme $x \leqslant y$ et $\lambda \geqslant 0$, $\lambda x \leqslant \lambda y$, d'où $z = \lambda x + (1 - \lambda) y \leqslant \lambda y + (1 - \lambda) y = y$.
- Comme $x \leqslant y$ et $1 - \lambda \geqslant 0$, $(1 - \lambda) x \leqslant (1 - \lambda) y$, d'où $x = \lambda x + (1 - \lambda) x \leqslant \lambda x + (1 - \lambda) y = z$.

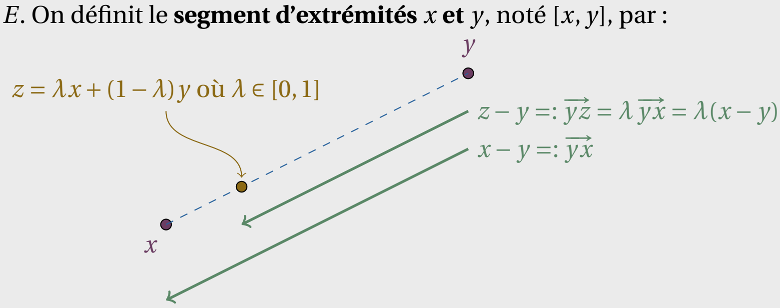
Ainsi $x \leqslant z \leqslant y$.

$\boxed{\subset}$ Soit $z \in \mathbb{R}$ tel que $x \leqslant z \leqslant y$. Nous devons déterminer un $\lambda \in [0, 1]$ tel que $z = \lambda x + (1 - \lambda) y$. L'étude ci-dessous, nous invite à poser $\lambda := \dfrac{z - y}{x - y} = \dfrac{y - z}{y - x}$. Vérifions que ce choix convient.
- Comme $y - z \geqslant 0$ et $y - x > 0$, $\lambda = \dfrac{y - z}{y - x} \geqslant 0$.
- Comme $x \leqslant z$, $-z \leqslant -x$ et donc $y - z \leqslant y - x$. Puisque $y - x > 0$, il vient $\lambda = \dfrac{y - z}{y - x} \leqslant 1$.
- $\lambda x + (1 - \lambda) y = \dfrac{z - y}{x - y} x + \left(1 - \dfrac{z - y}{x - y}\right) y = \dfrac{z - y}{x - y} x + \dfrac{x - z}{x - y} y = \dfrac{zx - yx + xy - zy}{x - y} = z$

Nous en déduisons que si x et y sont deux réels tels que $x < y$, alors $[x, y] = \left\{\lambda x + (1 - \lambda) y \,:\, \lambda \in [0, 1]\right\}$. On peut à présent étendre la notion de segment de $\mathbb{R}$ au $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

C10.2. Définition (Segment) Soient $x, y \in E$. On définit le **segment d'extrémités** x **et** y, noté $[x, y]$, par :

$$[x, y] := \left\{\lambda x + (1 - \lambda) y \,:\, \lambda \in [0, 1]\right\} .$$



C10.3. Rédaction Soient $x, y \in E$. Un vecteur $z \in [x, y]$ s'écrit $\lambda x + (1 - \lambda) y$ avec $\lambda \in [0, 1]$.

C10.4. Remarque Soient $x, y \in E$. En raisonnant par double inclusion, on démontre :

$$\left\{\lambda x + (1 - \lambda) y \,:\, \lambda \in [0, 1]\right\} = \left\{\mu y + (1 - \mu) x \,:\, \mu \in [0, 1]\right\} .$$

Ainsi les segments $[x, y]$ et $[y, x]$ sont égaux.

§ 1.2 Partie convexe de E

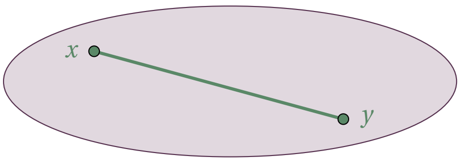
Grâce à la notion de segment de E, nous pouvons définir la notion de partie convexe de E : une partie C de E est convexe si pour tout couple (x,y) de point de E le segment $[x,y]$ est inclus dans E, ce qui s'exprime formellement comme suit.

C10.5. Définition (Partie convexe de E) Une partie C de E est dite **convexe** si :

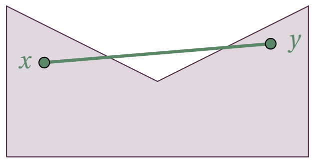
$$\forall\,(x,y)\in C^2,\quad [x,y]\subset C.$$

C10.6. Illustration

Partie convexe de $\mathbb{R}^2$



Partie non convexe de $\mathbb{R}^2$



C10.7. Exercice (Parties convexes de $\mathbb{R}$) On rappelle qu'une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si :

$$\forall\,(x,y)\in I^2,\quad \forall\, z\in\mathbb{R},\quad x\leqslant z\leqslant y\Longrightarrow z\in I\,.$$

Démontrer qu'une partie C de $\mathbb{R}$ est convexe si et seulement si C est un intervalle.

Esquisse de solution

On raisonne par double implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit C une partie convexe de $\mathbb{R}$. Soient $(x,y)\in C^2$ et $z\in\mathbb{R}$ tel que $x\leqslant z\leqslant y$.

- Si $x=y$, alors $z=y$ et donc $z=\lambda x+(1-\lambda)y$, où $\lambda=1\in[0,1]$.
- Il reste à étudier le cas où $x<y$. En raisonnant par analyse et synthèse, on démontre l'existence d'un réel λ tel que $z=\lambda x+(1-\lambda)\,y$ ... On aura soin de vérifier $\lambda\in[0,1]$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que C est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $(x,y)\in C^2$ et $z\in[x,y]$. Sans perte de généralité, on peut supposer $x\leqslant y$. En exploitant l'appartenance de z au segment $[x,y]$, on démontre $x\leqslant z\leqslant y$...

C10.8. Exercice (L'épigraphe de la fonction carré est une partie convexe)

L'épigraphe de la fonction carré, noté $\mathscr{E}$, est la partie du plan qui est la réunion de son graphe et de la partie du plan située au-dessus de son graphe. Formellement :

$$\mathscr{E}:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ y\geqslant x^2\right\}.$$

On se propose de démontrer que $\mathscr{E}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

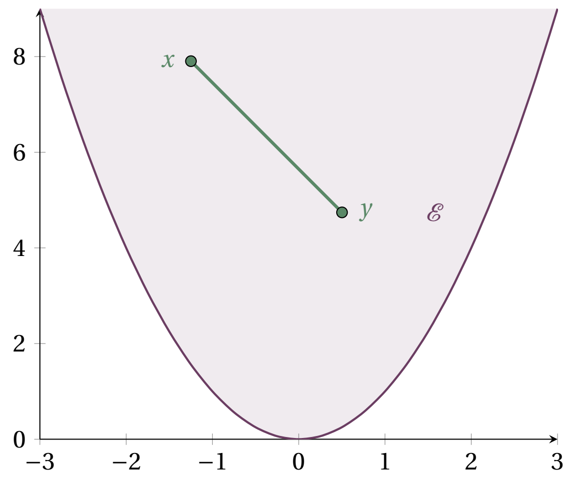
Soient (x_1,y_1) et (x_2,y_2) deux points de $\mathscr{E}$. Ainsi :

$$y_1\geqslant x_1^2\quad\text{et}\quad y_2\geqslant x_2^2\,.$$

Soient $\lambda\in[0,1]$ et :

$$(x_3,y_3):=\lambda(x_1,y_1)+(1-\lambda)(x_2,y_2)\,.$$

Démontrer $y_3\geqslant x_3^2$.

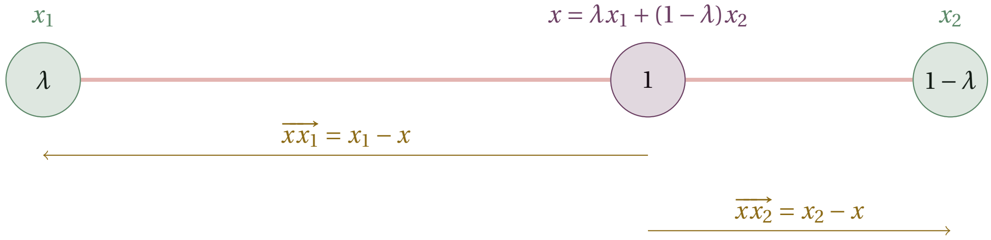


C10.9. Exercice (Les boules d'un e.v.n sont convexes) Soient (E,N) un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, $a\in E$ et $r>0$. Démontrer que les parties $B(a,r):=\{x\in E\ :\ N(x-a)<r\}$ et $\overline{B(a,r)}:=\{x\in E\ :\ N(x-a)\leqslant r\}$ sont des parties convexes de E.

C10.10. Exercice (L'adhérence d'un convexe est convexe) Soient (E,N) un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Soit C une partie convexe de E. Démontrer que l'adhérence $\overline{C}$ de C est encore une partie convexe de E.

§ 1.3 Barycentres

Soient x_1 et x_2 sont deux points de $\mathbb{R}^2$. Soit x un point du segment $[x_1,x_2]$. Alors il existe $\lambda\in[0,1]$ tel que $x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$. En mécanique, ce point x du plan est le centre de gravité (ou barycentre) d'un système de points pesants : l'un en x_1 affecté d'un poids λ et l'autre en x_2 affecté d'un poids $(1-\lambda)$. Le système $((x_1,\lambda),(x_2,1-\lambda))$ de points pondérés peut être ramené au seul point x, affecté du poids $\lambda+1-\lambda=1$.



Nous vérifions sans peine que x est l'unique vecteur de E tel que :

$$\lambda\underbrace{(x_1 - x)}_{\overrightarrow{xx_1}} + (1-\lambda)\underbrace{(x_2 - x)}_{\overrightarrow{xx_2}} = 0_E\,.$$

Cette propriété caractéristique de x va nous permettre de généraliser le cas de deux masses ponctuelles à une situation où nous disposons de $n \geqslant 2$ masses ponctuelles (concept de barycentre). Après avoir établi quelques propriétés élémentaires des barycentres, nous en serons en mesure de démontrer une caractérisation des parties convexes de E qui sera riche d'applications.

C10.11. Définition-Proposition (Barycentre d'une famille pondérée de vecteurs de E) Soient $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$. Alors il existe un unique $x_G \in E$ tel que :

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (x_k - x_G) = 0_E\,.$$

Le vecteur x_G est appelé **barycentre de la famille pondérée** $((x_1, \alpha_1), \ldots, (x_n, \alpha_n))$. On dispose en outre de l'expression suivante de x_G :

$$x_G = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\,.$$

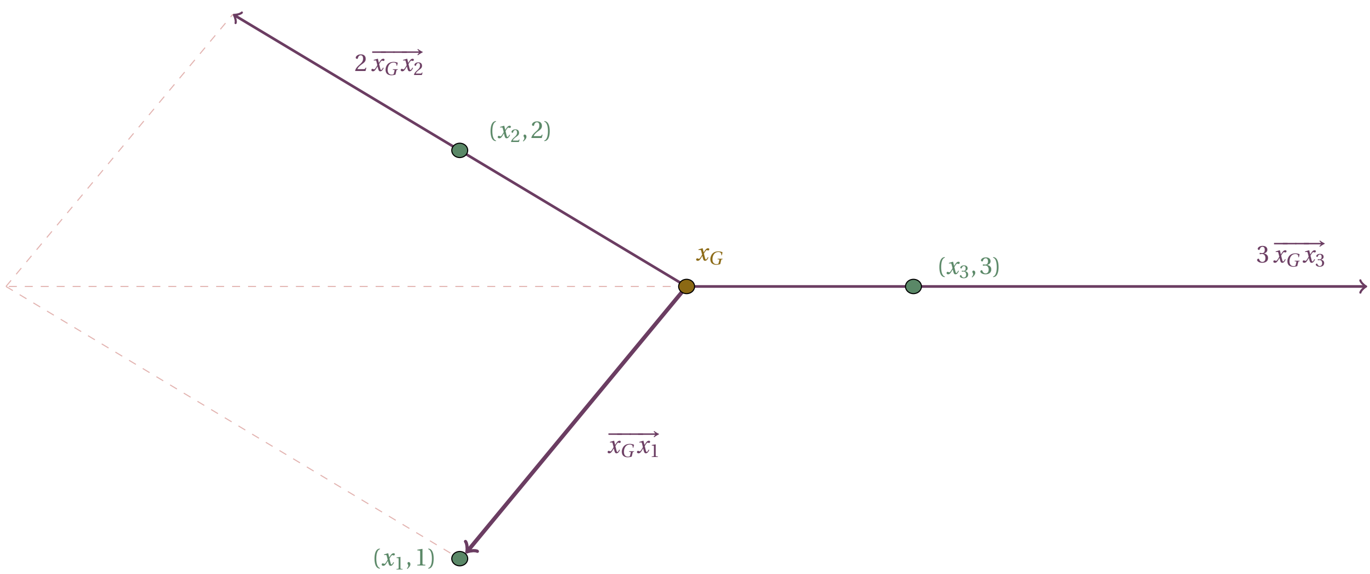
Démonstration

Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (x_k - x) = 0_E \quad &\Longleftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k - \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right) x = 0_E \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right) x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\,.\end{aligned}$$

Comme $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \neq 0$, nous en déduisons que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (x_k - x) = 0_E$ si et seulement si $x = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$, ce qui livre l'intégralité des résultats de l'énoncé précédent.

C10.12. Illustration Barycentre x_G de la famille pondérée $((x_1, 1), (x_2, 2), (x_3, 3))$ de points de $\mathbb{R}^2$.



C10.13. Exercice (Construction à la règle et au compas) On fixe un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan et on identifie un point M du plan avec le vecteur $\overrightarrow{OM}$. Soient $A(1,1)$ et $B(4,3)$. **En utilisant uniquement une règle non graduée et un compas**, construire le barycentre G de la famille pondérée $((A,3),(B,2))$.

Indication

Placer deux points distincts 0 et I et tracer la droite (OI). Tracer la perpendiculaire à (OI) passant par O et un point J sur cette perpendiculaire tel que $OJ = OI$. Le repère $\left(O; \vec{i} := \overrightarrow{OI}, \vec{j} := \overrightarrow{OI}\right)$ est ainsi construit.
Placer alors les points $A(1,1)$ et $B(4,3)$.
Le point G recherché vérifie $3\,\overrightarrow{AG} + 2\,\overrightarrow{BG} = \vec{0}$. Comme $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG}$, on en déduit $5\,\overrightarrow{AG} = 2\,\overrightarrow{AB}$ puis $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{5}\,\overrightarrow{AB}$.
Ainsi G est-il le point du segment $[A,B]$ tel que $AG = \frac{2}{5}\,AB$. Pour le placer précisément, on peut s'appuyer sur le théorème de Thalès en construisant des droites auxiliaires.

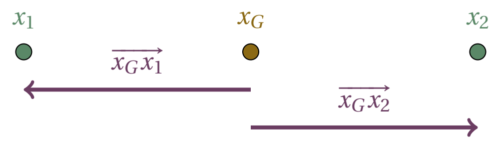
C10.14. Définition (Isobarycentre) Soient $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ et $(x_1,\dots,x_n) \in E^n$. Le barycentre x_G de la famille $((x_1,1),\dots,(x_n,1))$ de points pondérés de E est appelé **isobarycentre de la famille** $(x_1,\dots,x_n)$. On observe que $x_G = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} x_k$.

C10.15. Exemple (Isobarycentre de deux vecteurs du plan)

Soient x_1 et x_2 deux vecteurs discints de $\mathbb{R}^2$. Alors l'isobarycentre x_G de la famille (x_1,x_2) est :

$$x_G = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2.$$

Il s'agit donc du milieu du segment $[x_1,x_2]$.



C10.16. Exemple (Isobarycentre de trois vecteurs du plan)

Soient x_1, x_2, x_3 trois vecteurs distincts de $\mathbb{R}^2$. L'isobarycentre x_G de la famille (x_1,x_2,x_3) est caractérisé par :

$$(\star) \qquad \overrightarrow{x_G x_1} + \overrightarrow{x_G x_2} + \overrightarrow{x_G x_3} = \vec{0}\,.$$

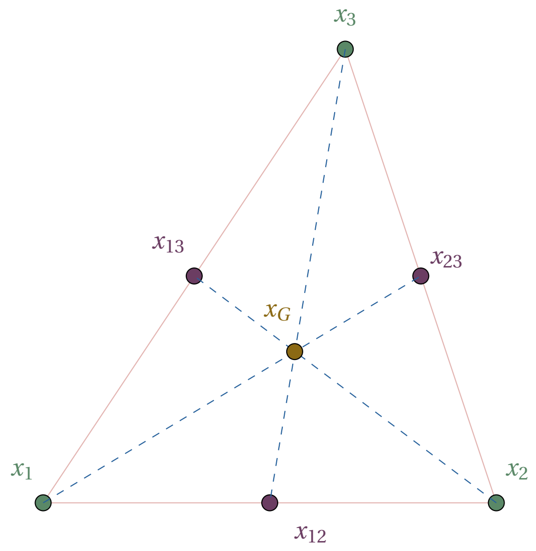
Introduisons x_{12} le milieu du segment $[x_1,x_2]$ et décomposons les vecteurs $\overrightarrow{x_G x_1}$ et $\overrightarrow{x_G x_2}$ à l'aide de ce point. Alors $(\star)$ s'écrit :

$$\overrightarrow{x_G x_{12}} + \overrightarrow{x_{12} x_1} + \overrightarrow{x_G x_{12}} + \overrightarrow{x_{12} x_2} + \overrightarrow{x_G x_3} = \vec{0}\,.$$

puis :

$$2\,\overrightarrow{x_G x_{12}} + \overrightarrow{x_G x_3} = \vec{0}\,.$$

car $\overrightarrow{x_{12} x_1} + \overrightarrow{x_{12} x_1} = \vec{0}$. Les points x_G, x_{12}, x_3 sont donc alignés, i.e. le point x_G appartient à la médiane du triangle $x_1x_2x_3$ issue du sommet x_3.
Par symétrie des rôles joués par x_1, x_2, x_3, le point x_G appartient aux trois médianes du triangle $x_1x_2x_3$; il est donc situé sur l'intersection de ces trois droites.



C10.17. Proposition (Segment comme ensemble des barycentres à coefficients positifs ou nuls) Soit $(x_1,x_2) \in E^2$. Le segment $[x_1,x_2]$ est l'ensemble de tous les barycentres de (x_1,x_2) à coefficients positifs ou nuls, i.e. :

$$[x_1,x_2] = \left\{ \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}x_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}x_2 \ : \ (\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{R}_{\geqslant 0} \text{ tel que } \alpha_1+\alpha_2 \neq 0 \right\}.$$

Démonstration

$\boxed{\subset}$ Si $x \in [x_1,x_2]$, alors il existe $\lambda \in [0,1]$ tel que $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$. En posant $\alpha_1 := \lambda \geqslant 0$ et $\alpha_2 := 1-\lambda \geqslant 0$, on observe que $x = \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}x_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}x_2$.

$\boxed{\supset}$ Soit $(\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ tel que $\alpha_1+\alpha_2 \neq 0$. Alors $\alpha_1+\alpha_2 > 0$ et comme $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_1+\alpha_2$, le réel $\lambda := \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}$ appartient à $[0,1]$. Le point $\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}x_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}x_2 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ appartient donc au segment $[x_1,x_2]$.

C10.18. Théorème (Associativité du barycentre) Soient $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$, $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in E^{n+1}$ et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \neq 0$ et $\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \neq 0$. On introduit

- y_n le barycentre de la famille pondérée $((x_1, \alpha_1), \ldots, (x_n, \alpha_n))$
- y_{n+1} le barycentre de la famille pondérée de vecteurs $((x_1, \alpha_1), \ldots, (x_n, \alpha_n), (x_{n+1}, \alpha_{n+1}))$.

Alors y_{n+1} est la barycentre de la famille pondérée de deux vecteurs $\left(\left(y_n, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right), (x_{n+1}, \alpha_{n+1})\right)$.

Démonstration

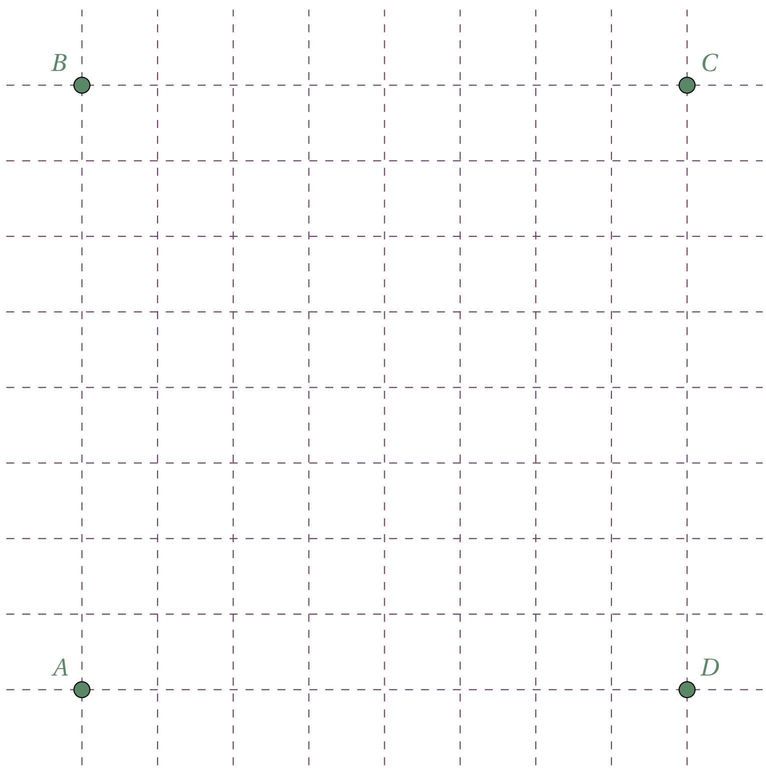
Comme y_{n+1} est le barycentre de la famille pondérée de vecteurs $((x_1, \alpha_1), \ldots, (x_n, \alpha_n), (x_{n+1}, \alpha_{n+1}))$:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \frac{1}{\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k} \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k \\ &= \frac{1}{\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k + \alpha_{n+1} x_{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k} \left(\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \right) \underbrace{\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k}_{y_n} + \alpha_{n+1} x_{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k + \alpha_{n+1}} \left(\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \right) y_n + \alpha_{n+1} x_{n+1} \right). \end{aligned}$$

Cette dernière expression de y_{n+1} nous permet d'affirmer que y_{n+1} est la barycentre de la famille pondérée $\left(\left(y_n, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right), (x_{n+1}, \alpha_{n+1})\right)$.

C10.19. Application Soit $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. L'associativité du barycentre offre l'opportunité de réduire l'étude du barycentre d'une famille pondérée de n vecteurs à $(n-1)$ études de barycentres de familles pondérées de deux vecteurs. Des raisonnements par récurrence sur le nombre de vecteurs d'une famille pondérée peuvent ainsi être envisagés. Cf. démonstration du théorème suivant.

C10.20. Exercice (Construction du barycentre d'une famille pondérée de 4 vecteurs) Soient A, B, C, D les quatres points du plan ci-dessous. Construire le barycentre G de la famille pondérée $((A, 1), (B, 1), (C, 6), (D, 8))$.



Indication

On applique tout d'abord deux fois l'associativité du barycentre C10.18.
- Le point G à déterminer est le barycentre de la famille pondérée $((G_1, 8), (D, 8))$, où G_1 est le barycentre de la famille pondérée $((A, 1), (B, 1), (C, 6))$.
- Le point G_1 est le barycentre de la famille pondérée $((G_2, 2), (C, 6))$, où G_2 est le barycentre de la famille pondérée $((A, 1), (B, 1))$.

Comme la construction du barycentre d'une famille pondérée de deux points est aisée, on peut construire le point G_2, puis le point G_1 et enfin le point G.

C10.21. Théorème (Caractérisation de la convexité à l'aide des barycentres) Soit C une partie non vide de E. Alors, C est convexe si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$, pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C^n$, pour tout $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \left(\mathbb{R}_{\geqslant 0}\right)^n$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \neq 0$:

$$\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \in C$$

i.e. si et seulement si tout barycentre à coefficients positifs de toute famille de points de C appartient encore à C.

Démonstration

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que tout barycentre à coefficients positifs de toute famille de points de C appartient encore à C. Soient $(x_1, x_2) \in C^2$ et $\lambda \in [0, 1]$. Démontrons que $x := \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$ appartient à C. Posons $\alpha_1 := \lambda \geq 0$ et $\alpha_2 := 1 - \lambda \geqslant 0$. Comme :

$$x = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} \left(\alpha_1 x + \alpha_2 y\right)$$

le vecteur x est le barycentre de la famille pondérée $((x_1, \alpha_1), (x_2, \alpha_2))$ de points de C à coefficients positifs ou nuls. Il appartient donc à C.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons C convexe. On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$.

- *Définition du prédicat.* Pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$, on définit la prédicat $\mathscr{P}(n)$ par :

$$\mathscr{P}(n) \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{pour tout } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in C^n, \text{ pour tout } (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \left(\mathbb{R}_{\geqslant 0}\right)^n \text{ tel que } \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \neq 0, \\ \displaystyle\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \in C\ . \end{array} \right.$$

- *Initialisation à $n = 2$.* Soient $(x_1, x_2) \in C^2$ et $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{R}_{\geqslant 0}$. D'après C10.17, le vecteur

$$\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} \left(\alpha_1 x + \alpha_2 y\right)$$

appartient à $[x_1, x_2]$ donc à C, puisque x_1 et x_2 appartiennent à C convexe.

- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vrai. Soient $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in C^{n+1}$, $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}) \in \left(\mathbb{R}_{\geqslant 0}\right)^{n+1}$ tel que $\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \neq 0$. Démontrons que $x := \frac{1}{\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k} \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k \in C$.
  - 1[er] cas : $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 0$. Comme $\alpha_1 \geqslant 0, \dots, \alpha_n \geqslant 0$, cela implique $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Ainsi $x = \frac{1}{\alpha_{n+1}} \alpha_{n+1} x_{n+1} = x_{n+1} \in C$.
  - 2[ème] cas : $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \neq 0$. Nous pouvons alors appliquer l'associativité du barycentre C10.18. Le vecteur x est le barycentre de la famille pondérée $\left(\left(x_G, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right), (x_{n+1}, \alpha_{n+1})\right)$ où x_G est le barycentre de la famille pondérée $((x_1, \alpha_1), \dots, (x_n, \alpha_n))$. D'après $\mathscr{P}(n)$, $x_G \in C$. De l'initialisation, nous déduisons alors $x \in C$.

C10.22. Application Le théorème précédent sera un outil précieux pour produire des inégalités de convexité/concavité, dites généralisées, pour des fonctions. Nous donnons un exemple qui repose sur la convexité de l'épigraphe de la fonction carré C10.8.

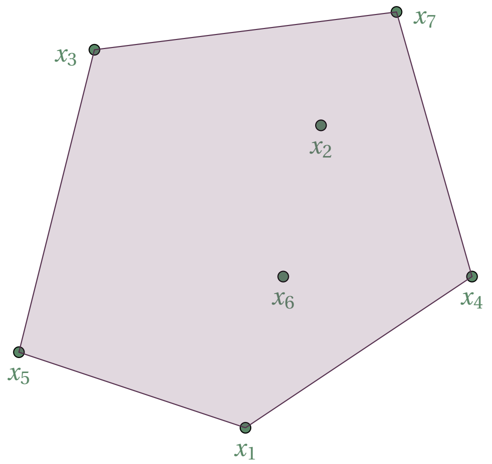
Soit $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, pour tout $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \left(\mathbb{R}_{\geqslant 0}\right)^n$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$. Les points $(x_1, x_1^2), \dots, (x_n, x_n^2))$ sont sur le graphe de la fonction carrée donc sur son épigraphe. D'après C10.21, le point $\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left(x_k, x_k^2\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k^2\right)$

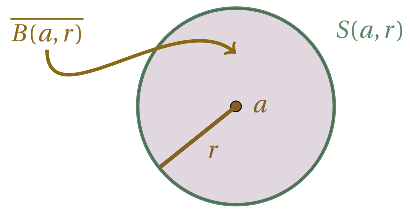
appartient également à l'épigraphe de la fonction carré et donc :

$$(\star) \qquad \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k^2 .$$

Un des objectifs de la prochaine partie sera d'établir des inégalités analogues à $(\star)$ pour d'autres fonctions que la fonction carrée, e.g. sin, exp, ln.

C10.23. EXERCICE (ENVELOPPE CONVEXE)





1. Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille de parties convexes de E. Démontrer que $\bigcap_{i\in I} C_i$ en encore convexe.
2. Soit A une partie de E. On pose :

$$\operatorname{Conv}(A) := \bigcap_{\substack{A\subset C \\ C \text{ convexe}}} C .$$

Comme $\operatorname{Conv}(A)$ est l'intersection de tous les parties convexes de E contenant A, il s'agit d'un convexe contenant A. Démontrer qu'il s'agit du plus petit (au sens de l'inclusion) convexe contenant A.
Le convexe $\operatorname{Conv}(A)$ caractérisé par cette propriété de minimalité est appelé **enveloppe convexe de** A.

3. Soient $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$ et $(x_1,\dots,x_n) \in E^n$. Démontrer :

$$\operatorname{Conv}(\{x_1,\dots,x_n\}) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \,:\, (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \left(\mathbb{R}_{\geqslant 0}\right)^n \text{ tel que } \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1 \right\}.$$

4. Supposons ici que E est distinct de $\{0_E\}$ et qu'il est muni d'une norme N. Soient $a \in E$ et $r > 0$. Démontrer :

$$\operatorname{Conv}(S(a,r)) = \overline{B(a,r)}$$

où $S(a,r) := \{x \in E \,:\, N(x-a) = r\}$ et $\overline{B(a,r)} := \{x \in E \,:\, N(x-a) \leqslant r\}$.

Indication

1. Soient x et y deux éléments de $\bigcap_{i\in I} C_i$ et $\lambda \in [0,1]$. Il s'agit de démontrer que $\lambda x + (1-\lambda) y \in \bigcap_{i\in I} C_i$ en s'aidant de la convexité de chacun des C_i ...
2. On considère une partie convexe C de E qui contient la partie A. Il s'agit de justifier que $\operatorname{Conv}(A) \subset C$. On pourra analyser la définition de $\operatorname{Conv}(A)$ ...
3. Notons $P := \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \,:\, (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \left(\mathbb{R}_{\geqslant 0}\right)^n \text{ tel que } \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1 \right\}$. Pour démontrer $P = \operatorname{Conv}(\{x_1,\dots,x_n\})$, nous établissons que P est le plus petit convexe de E qui contient $\{x_1,\dots,x_n\}$, en trois étapes.
   - On démontre $\{x_1,\dots,x_n\} \subset P$. Soit $\ell \in [\![1,n]\!]$. On propose un n-uplet $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \left(\mathbb{R}_{\geqslant 0}\right)^n$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$ et $x_\ell = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$ ...
   - On démontre que P est convexe. Soient $y, z \in P$ et $\lambda \in [0,1]$. On démontrer que $\lambda y + (1-\lambda) z \in P$. Alors il existe $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ et $(\beta_1,\dots,\beta_n)$ dans $\left(\mathbb{R}_{\geqslant 0}\right)^n$ tels que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = \sum_{k=1}^{n} \beta_k = 1$ et $y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$, $z = \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k$. Nous pouvons alors écrire $\lambda y + (1-\lambda) z = \dots$
   - Soit C une partie convexe de E telle que $\{x_1,\dots,x_n\}$. On démontre que $P \subset C$ grâce à C10.21...
4. La partie $\overline{B(a,r)}$ de E contient $S(a,r)$ et est convexe (cf. C10.9). Il reste à vérifier qu'elle est minimale pour ces deux propriétés.
   Soit C une partie convexe de E telle que $S(a,r) \subset C$. Démontrons $\overline{B(a,r)} \subset C$, en considérant un point quelconque $x \in \overline{B(a,r)}$.
   - Si $x = a$, alors on s'appuie sur un vecteur non nul u de E pour construire deux points diamétralement opposés x_1 et x_2 de $S(a,r)$... ✎ **Faire un dessin.** Le point a sera alors le milieu de $[x_1, x_2]$...
   - Si $x \neq a$, alors on s'appuie sur le vecteur non nul $x - a$ pour construire deux points diamétralement opposés x_1 et x_2 de $S(a,r)$ tels que les points x, x_1, x_2 sont alignés... ✎ **Faire un dessin.** On démontrera alors que x appartient à $[x_1, x_2]$...

§ 2 Fonctions convexes

Dans toute cette partie, I désigne un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et on fixe un repère $\mathscr{R} = \left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan.

§ 2.1 Définition de la convexité d'une fonction via des inégalités

C10.24. Définition (Convexité/concavité d'une fonction) Soit une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

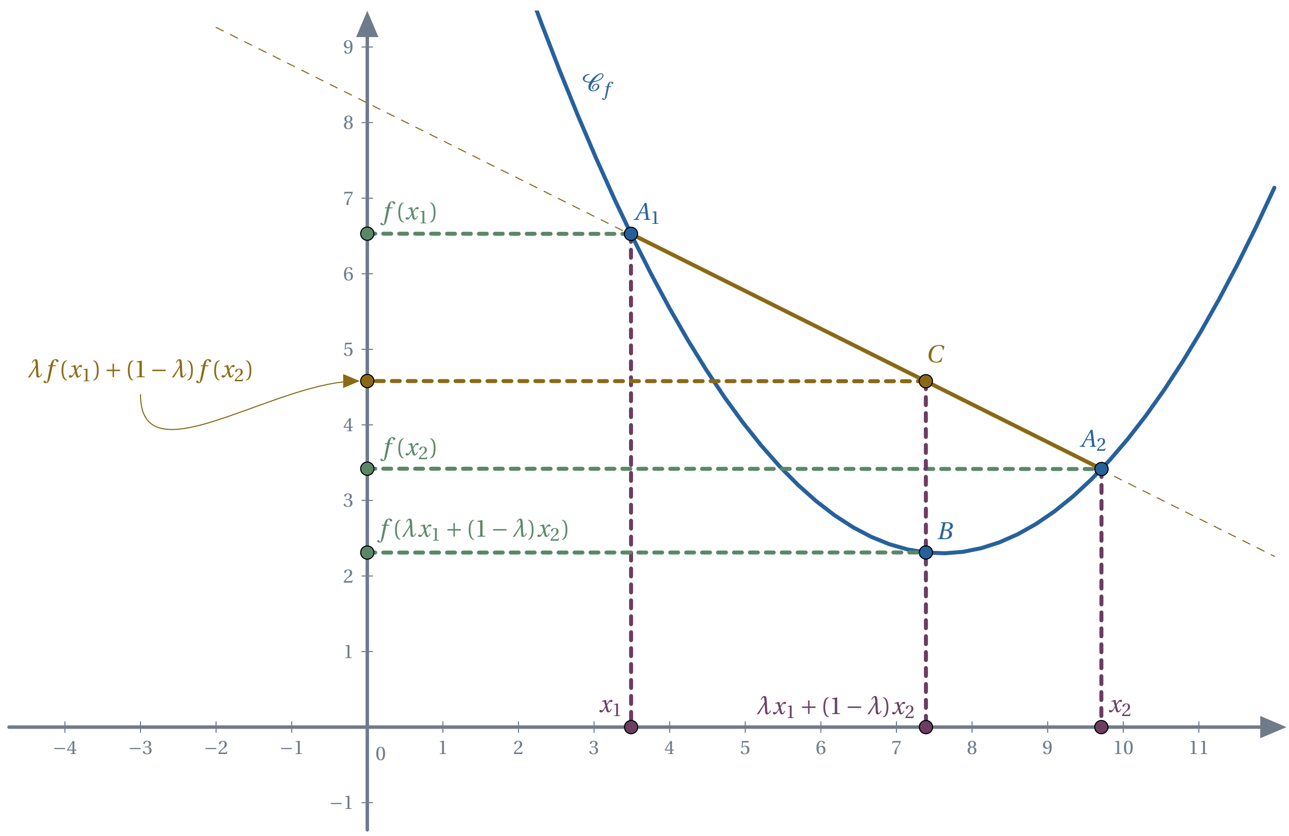
1. f est **convexe** si :
$$\forall (x,y) \in I^2, \quad \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$
2. f est **strictement convexe** si :
$$\forall (x,y) \in I^2, \quad \forall \lambda \in]0,1[, \quad x \neq y \quad \Longrightarrow \quad f(\lambda x + (1-\lambda) y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$
3. f est **concave** si :
$$\forall (x,y) \in I^2, \quad \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda x + (1-\lambda) y) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$
4. f est **strictement concave** si :
$$\forall (x,y) \in I^2, \quad \forall \lambda \in]0,1[, \quad x \neq y \quad \Longrightarrow \quad f(\lambda x + (1-\lambda) y) > \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

C10.25. Convexité vs. concavité Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est concave (resp. strictement concave) si et seulement si son opposée $-f$ est convexe (resp. strictement convexe). Nous allons étudier principalement les fonctions convexes dans la suite. Les résultats que nous établirons pour ces fonctions se transposeront aux fonctions concaves grâce à l'observation précédente.

C10.26. Interprétation graphique de la convexité Soient une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \in I^2$ et $\lambda \in [0,1]$. Considérons les trois points :

$$A_1(x_1, f(x_1)) \qquad A_2(x_2, f(x_2)) \qquad B(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2, f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2))$$

de la courbe représentative de f, notée $\mathscr{C}_f$. Le segment $[A_1, A_2]$, dont les extrémités sont des points de $\mathscr{C}_f$, est appelé une **corde de** $\mathscr{C}_f$. Notons C le point de la corde $[A_1, A_2]$ d'abscisse $\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$.



La droite $(A_1 A_2)$ a comme coefficient directeur $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ et passe par le point de $A_1(x_1, f(x_1))$. Son équation cartésienne réduite est donc :

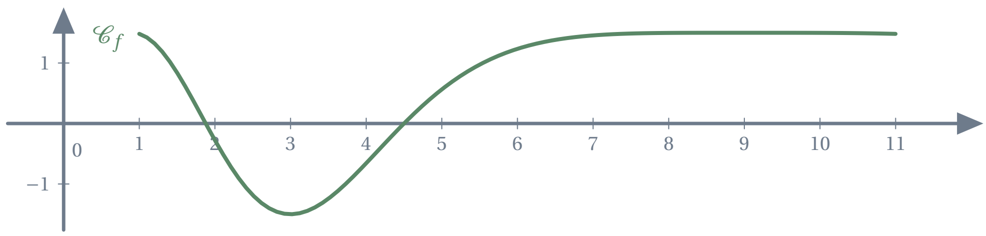
$$y = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1)$$

Ainsi l'ordonnée de C est-elle $\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$. Nous déduisons de cette étude que :

$$C \text{ est au-dessus de } B \iff \underbrace{f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)}_{\text{ordonnée de } B} \leqslant \underbrace{\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)}_{\text{ordonnée de } C}.$$

Ceci étant vrai pour tout $(x_1,x_2)\in I^2$ et pour tout $\lambda\in[0,1]$, nous en déduisons que **la fonction f est convexe si et seulement si toutes ses cordes sont au-dessus de sa courbe représentative**.

C10.27. Exercice On donne ci-contre le graphe d'une fonction $f\colon [1,11] \longrightarrow \mathbb{R}$. La fonction f est-elle convexe ? Justifier la réponse en complétant le graphique.



C10.28. Exercice (Une fonction affine est convexe et concave) Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et f la fonction affine définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax+b\,. \end{array} \right.$$

1. Démontrer que la fonction f est convexe et concave.
2. La fonction f est-elle strictement convexe (resp. strictement concave) ?

Indication

1. Soient $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Calculer $f(\lambda x+(1-\lambda)y)$ et $\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$.
2. La fonction f n'est pas strictement convexe si :

$$\exists (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \exists\lambda\in]0,1[,\quad x\neq y \quad \text{et} \quad f(\lambda x+(1-\lambda)y)\geqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)\,.$$

C10.29. Exercice (Fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ convexe et concave) Soit $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction convexe et concave. Démontrer que f est affine.

Indication

Il s'agit de démontrer qu'il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$. Raisonner par analyse et synthèse.

- *Analyse.* Supposons qu'il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$. En considérant $f(0)$ et $f(1)$, exprimer a et b à l'aide de $f(0)$ et $f(1)$.
- *Synthèse.* On confère à a et b les valeurs trouvées en fin d'analyse et on vérifie que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, en distinguant plusieurs cas.
  — Cas où $x=0$ ou $x=1$. Le résultat est immédiat d'après les valeurs imposées à a et b.
  — Cas où $x<0$. Comme $0\in]x,1[$, il existe $\lambda\in[0,1]$ tel que $0=\lambda x+(1-\lambda)$. Déterminer λ puis, en utilisant la concavité et la convexité de f, vérifier que $f(x)=ax+b$.
  — Cas où $0<x<1$. Adapter la stratégie présentée pour le cas $x<0$.
  — Cas où $x>$. Adapter la stratégie présentée pour le cas $x<0$.

C10.30. Exercice Démontrer que l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{>0} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \right.$$

est convexe.

Indication

Soient $x,y\in\mathbb{R}_{>0}$ et $\lambda\in[0,1]$. Étudier le signe de $\dfrac{\lambda}{x}+\dfrac{1-\lambda}{y}-\dfrac{1}{\lambda x+(1-\lambda)y}$ en réduisant au même dénominateur, puis en factorisant le numérateur.

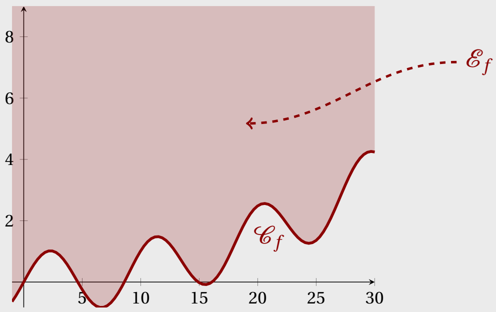
§ 2.2 Caractérisation géométrique de la convexité d'une fonction

C10.31. Définition (Épigraphe d'une fonction)

L'épigraphe d'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est la partie du plan définie par

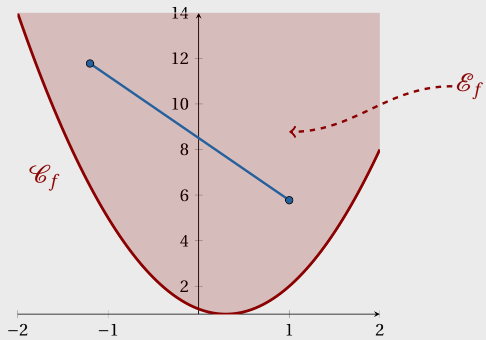
$$\mathscr{E}_f := \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} : f(x) \leqslant y\}.$$

La partie $\mathscr{E}_f$ du plan est donc la réunion du graphe $\mathscr{C}_f$ de f et de la partie du plan située au-dessus $\mathscr{C}_f$.



C10.32. Proposition (Caractérisation géométrique de la convexité d'une fonction)

Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si son épigraphe est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.



C10.33. Remarque (Lien entre deux notions de convexité) Ce résultat lie les deux notions de convexité rencontrées : celle pour une partie de $\mathbb{R}^2$ et celle pour une fonction de la variable réelle à valeurs réelles.

C10.34. Exemple Nous avons établi en C10.8 que l'épigraphe de la fonction carrée est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$. La fonction carrée est donc convexe.

§ 2.3 Inégalité de convexité généralisée

C10.35. Proposition (Inégalité de convexité généralisée) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in I^n$, pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in [0,1]^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

C10.36. Exercice Soit $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. Démontrer que pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leqslant n \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

Indication

La fonction carrée est convexe d'après C10.34. On dispose donc d'inégalités de convexité généralisées pour cette fonction, en particulier pour les isobarycentres.
Une autre solution repose sur l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

C10.37. Exercice Soit $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. Démontrer que pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_{>0})^n$, $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \geqslant n^2$.

Indication

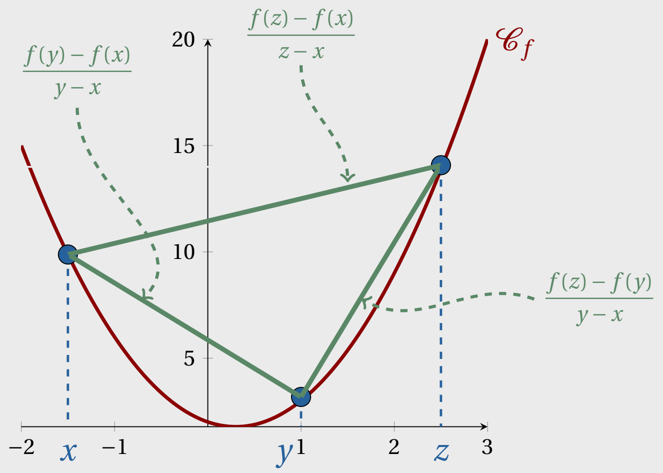
La fonction inverse est convexe sur $\mathbb{R}_{>0}$ d'après C10.30. On dispose donc d'inégalités de convexité généralisées pour cette fonction, en particulier pour les isobarycentres.

§ 2.4 Inégalité des trois pentes

C10.38. Proposition (Inégalités des trois pentes)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Pour tout $x < y < z$ dans I :

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$



Démonstration

• Nous observons que $y \in [x, z]$. Il existe donc λ dans $[0, 1]$ tel que $y = \lambda x + (1-\lambda)z$. On calcule $\lambda = \frac{z-y}{z-x}$. Comme la fonction f est convexe, $f(\lambda x + (1-\lambda)z) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(z)$, ce qui s'écrit encore :

$$(\star) \qquad f(y) \leqslant \frac{z-y}{z-x} f(x) + \frac{y-x}{z-x} f(z).$$

• Démontrons $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$. Comme $y-x>0$:

$$\begin{aligned}\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \quad &\Longleftrightarrow \quad f(y)-f(x) \leqslant \frac{y-x}{z-x}(f(z)-f(x)) \\ &\Longleftrightarrow \quad f(y) \leqslant \frac{y-x}{z-x}(f(z)-f(x)) + f(x) = \frac{z-y}{z-x} f(x) + \frac{y-x}{z-x} f(z).\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est vraie d'après $(\star)$. La première l'est donc également.

• Démontrons $\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$. Comme $z-y>0$:

$$\begin{aligned}\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{z-y}{z-x}(f(z)-f(x)) \leqslant f(z)-f(y) \\ &\Longleftrightarrow \quad f(y) \leqslant f(z) - \frac{z-y}{z-x}(f(z)-f(x)) = \frac{z-y}{z-x} f(x) + \frac{y-x}{z-x} f(z).\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est vraie d'après $(\star)$. La première l'est donc également.

Remarque. En analysant la démonstration ci-dessus, on peut observer que l'une quelconque des deux égalités de l'inégalité des trois pentes implique la convexité de la fonction f, d'où une forme de réciproque.

C10.39. Exercice Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soit $x_0 \in I$. Démontrer que la fonction « pente de f en x_0 » est définie par :

$$p_{x_0} \left| \begin{array}{ccc} I \setminus \{x_0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \end{array} \right.$$

est croissante.

Indication

Soient x, y dans $I \setminus \{x_0\}$ tels que $x < y$. Il s'agit de démontrer que $p_{x_0}(x) \leqslant p_{x_0}(y)$. Pour cela, on distingue trois cas : $x < y < x_0$, $x < x_0 < y$ et $x_0 < x < y$. Pour chaque cas, on s'appuie sur l'inégalité des trois pentes.

§ 2.5 Quelques propriétés remarquables des fonctions convexes au travers d'exercices

C10.40. Exercice (Antécédents du minimum d'une fonction convexe continue sur un segment) Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe continue. Démontrer que l'ensemble des points où f admet son minimum est un segment.

Indication

• Justifier tout d'abord que f admet un minimum m sur le segment $[a,b]$.
• Notons $A = \{x \in [a,b]\,;\, f(x) = m\}$. Nous savons que A est non vide et nous devons démontrer que A est un segment. On commence par établir que I est un intervalle, i.e. une partie convexe de $\mathbb{R}$ (cf. C10.7). Considérons donc deux points $x < y$ de A et $\lambda \in [0,1]$. Il s'agit de prouver que $\lambda x + (1-\lambda) y \in A$, i.e. que $f(\lambda x + (1-\lambda) y) = m$ ou encore que $f(\lambda x + (1-\lambda) y) \geqslant m$ et $f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant m$. Une inégalité est claire. L'autre se déduit de la convexité de f et de l'appartenance de x et y à A.
• Justifier que $\alpha := \inf(A)$ et $\beta := \sup(A)$ existent dans $\mathbb{R}$.
• Nous savons que A est l'un des quatre intervalles suivants : $]\alpha,\beta[$, $[\alpha,\beta[$, $]\alpha,\beta]$, $[\alpha,\beta]$. En utilisant la caractérisation séquentielle d'un inf (resp. d'un sup), démontrer que $\alpha \in A$ (resp. $\beta \in A$).

C10.41. Exercice (Antécédents du maximum d'une fonction convexe continue sur un segment) Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe continue. Démontrer que f atteint son maximum en a ou en b.

Indication

• Justifier tout d'abord que f admet un maximum M sur le segment $[a,b]$.
• Nous démontrons que $f(a) = M$ ou $f(b) = M$ en raisonnant par l'absurde. On suppose donc que $f(a) < M$ et $f(b) < M$. Le maximum M de f est donc atteint en un point $x_M \in]a,b[$. Ainsi, il existe $\lambda \in]0,1[$ tel que $x_M = \lambda a + (1-\lambda) b$. Obtenir alors une contradiction en utilisant la convexité de f.

C10.42. Exercice (L'équation $f(x) = 0$ où f est strictement convexe sur $\mathbb{R}$) Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement convexe. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au plus deux solutions.

Indication

On raisonne par l'absurde, en supposant que l'équation $f(x) = 0$ possède au moins trois solutions dans $\mathbb{R}$. Il existe donc trois réels $x < z < y$ tels que $f(x) = f(y) = f(z) = 0$. Déterminer $\lambda \in]0,1[$ tel que $z = \lambda x + (1-\lambda) y$ et obtenir une contradiction en utilisant la stricte convexité de f sur $\mathbb{R}$.

C10.43. Exercice (Fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ convexe majorée) Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe majorée. Démontrer que f est constante.

Indication

On démontre que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0)$, en raisonnant par l'absurde. Supposons donc qu'il existe $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $f(x) \neq f(0)$. Nous distinguons quatre cas.

(1) Cas où $x > 0$ et $f(x) > 0$.
(2) Cas où $x > 0$ et $f(x) < 0$.
(3) Cas où $x < 0$ et $f(x) > 0$.
(4) Cas où $x < 0$ et $f(x) < 0$.

Pour le cas (1), on considère $y > x$ et l'inégalité des trois pentes associée aux réels $0 < x < y$. On obtient une contradiction avec le caractère majoré de f en faisant tendre y vers $+\infty$.
Les cas (2), (3) et (4) se traitent de manière analogue en introduisant un réel y convenablement placé relativement à 0 et x.

C10.44. Exercice (Fonction convexe admettant un minimum local en un point intérieur) Soit $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe admettant un minimum local en un point intérieur de I. Démontrer qu'il s'agit d'un minimum global.

Indications

Par hypothèse il existe $x_m \in I$ et $\alpha > 0$ tel que $]x_m - \alpha, x_m + \alpha[\subset I$ et, pour tout $x \in]x_m - \alpha, x_m + \alpha[$, $f(x) \geqslant f(x_m) =: m$.
Il s'agit de démontrer que pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant m$. Nous distinguons deux cas.

(1) Cas où $x \geqslant x_m + \delta$
(2) Cas où $x \leqslant x_m - \delta$

Pour le cas (1), on considère l'inégalité des trois pentes associée aux réels $x_m < x_m + \dfrac{\alpha}{2} < x$ pour obtenir $f(x) \geqslant m$.
Le cas (2) se traite de manière analogue.

C10.45. Exercice (Dérivabilité à droite et à gauche en un point intérieur d'une fonction convexe et continuité)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. On note $\mathring{I}$ l'intérieur de I, qui est l'intervalle I éventuellement privé de ses extrémités.

1. Démontrer que f est dérivable à droite et à gauche en tout point de $\mathring{I}$.

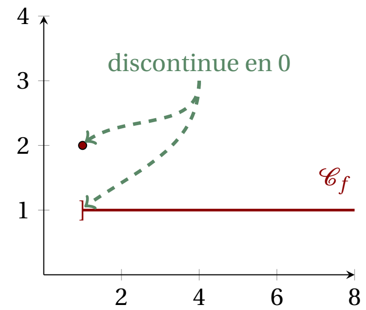
2. En déduire que f est continue sur $\mathring{I}$.

Indications

1. Soit $x_0 \in \mathring{I}$. Alors il existe $\alpha > 0$ tel que $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset I$. Nous savons, d'après C10.39, nous savons que l'application
$$p_{x_0} \left| \begin{array}{ccc}]x_0-\alpha, x_0[\cup]x_0, x_0+\alpha[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \end{array} \right.$$
est croissante. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ et $\displaystyle\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existent dans $\mathbb{R}$, puis que f est dérivable à gauche et à droite en x_0.
2. Soit $x_0 \in \mathring{I}$. D'après Q1, f est dérivable à gauche et à droite en x_0. En déduire que f est continue à gauche et à droite en x_0.

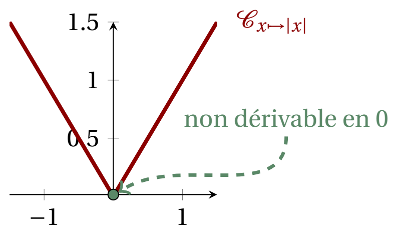
C10.46. Remarque (Une fonction convexe n'est pas nécessairement continue)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe sur I. D'après C10.45, la fonction f est continue en tout point de $\mathring{I}$, mais elle n'est pas nécessairement continue sur I (il peut y avoir discontinuité aux extrémités), comme le montre l'exemple de la fonction
$$f \left| \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x>1 \\ 2 & \text{si } x=1 \end{cases} \end{array} \right.$$
qui est convexe, mais discontinue en 1.



C10.47. Remarque (Une fonction convexe n'est pas nécessairement dérivable)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe sur I. D'après C10.45, la fonction f est dérivable à droite et à gauche en tout point de l'intérieur $\mathring{I}$ de I, mais elle n'est pas nécessairement dérivable en tout point de $\mathring{I}$, comme le montre l'exemple de la fonction valeur absolue (convexe sur $\mathbb{R}$, mais non dérivable en 0).

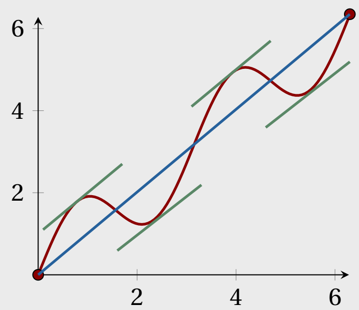


§ 3 Fonctions convexes dérivables

Un nombre dérivé est par essence une limite de taux d'accroissement, d'où un premier lien entre cordes et tangentes. Un deuxième très fécond est livré par le théorème des accroissements finis, dont nous rappelons l'énoncé.

C10.48. Théorème (Accroissements finis)

Soient $a < b$ des nombres réels et $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a,b]$ et dérivable sur l'ouvert $]a,b[$. Alors :
$$\exists c \in]a,b[, \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$



C10.49. Théorème (Fonctions convexes dérivables)

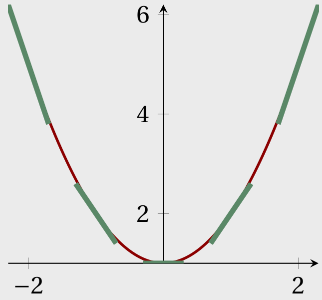
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. Si f est dérivable sur I alors

$$f \text{ est convexe} \iff f' \text{ est croissante.}$$

2. Si f est deux fois dérivable sur I alors

$$f \text{ est convexe} \iff f'' \geqslant 0.$$



C10.50. Corollaire (Fonctions concaves dérivables)

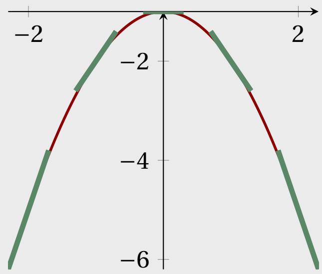
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. Si f est dérivable sur I alors

$$f \text{ est concave} \iff f' \text{ est décroissante.}$$

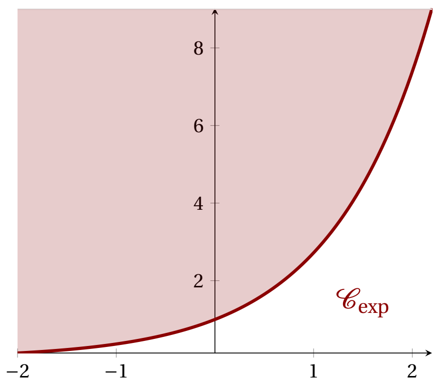
2. Si f est deux fois dérivable sur I alors

$$f \text{ est concave} \iff f'' \leqslant 0.$$

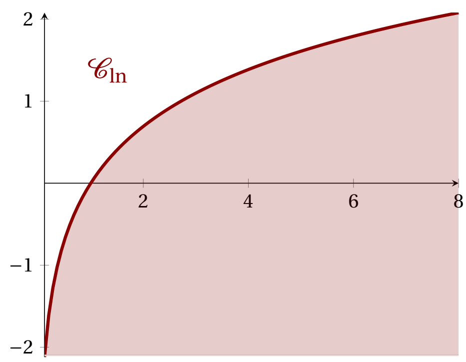


C10.51. Exemples fondamentaux

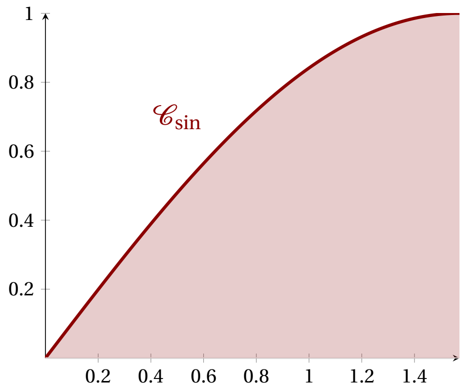
La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.



La fonction logarithme est concave sur $\mathbb{R}_{>0}$.

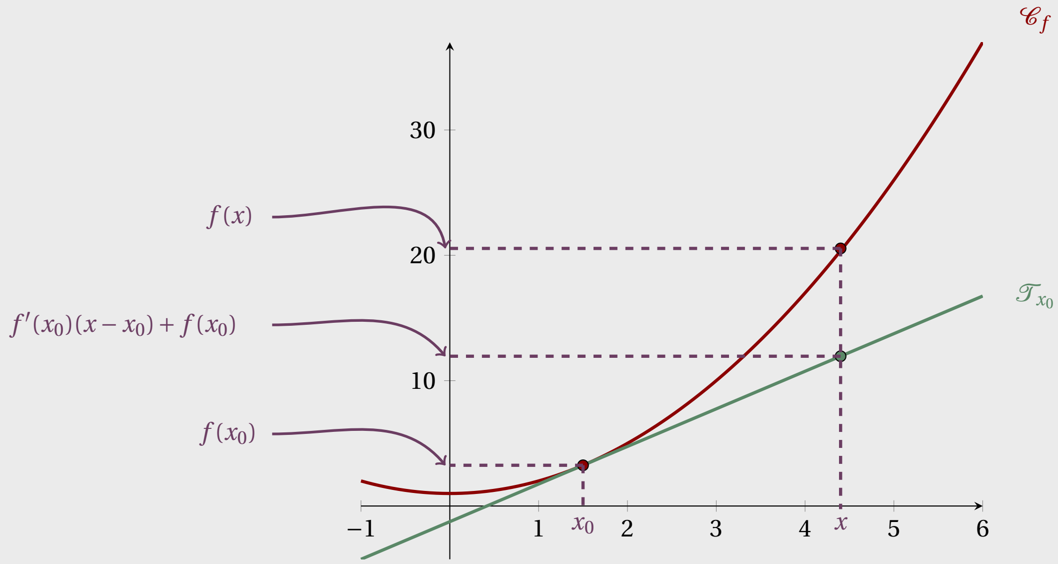


La fonction sinus est concave sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.



C10.52. Théorème (Le graphe d'une fonction convexe dérivable est au-dessus de ses tangentes)
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. La fonction f est convexe si et seulement si son graphe est au-dessus de toutes ses tangentes, i.e. si et seulement si :

$$\forall x_0 \in I \quad \forall x \in I \qquad f(x) \geqslant f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$



C10.53. Exercice On considère une fonction $q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$. Déterminer les solutions convexes de l'équation différentielle

$$y'' + q(x)y = 0$$

d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable.

Indications

Nous raisonnons par analyse et synthèse. Dans l'analyse, on considère une solution $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe, deux fois dérivable et vérifiant $y'' + q(x)y = 0$. Observer que l'on peut appliquer le résultat établi dans C10.43.

C10.54. Exercice Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe dérivable et soit $x_0 \in I$.

1. Démontrer que l'intersection du graphe de f et de sa tangente au point d'abscisse x_0 est un intervalle de $\mathbb{R}^2$.
2. Que dire de plus si f est strictement convexe ?

Indications

1. Le graphe $\mathscr{C}_f$ de f et sa tangente $\mathscr{T}_{x_0}$ au point d'abscisse x_0 admettent les descriptions suivantes :

$$\mathscr{C}_f := \left\{\left(x, f(x)\right) \,:\, x \in I\right\} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{T}_{x_0} := \left\{\left(x, f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)\right) \,:\, x \in \mathbb{R}\right\}.$$

Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux points de $\mathscr{C}_f \cap \mathscr{T}_{x_0}$ et $\lambda \in [0,1]$. Il s'agit de prouver que

$$(x_3, y_3) = \lambda(x_1, y_1) + (1-\lambda)(x_2, y_2) = (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \in \mathscr{C}_f \cap \mathscr{T}_{x_0}$$

i.e. que $y_3 = f(x_3)$ et $y_3 = f'(x_0)(x_3 - x_0) + f(x_0)$.
Pour établir ces deux identités, on pourra réfléchir au deux questions géométriques suivantes.
(a) Au-dessus du segment $[x_1, x_2]$, quelles sont les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}_f$, de la corde de $\mathscr{C}_f$ joignant (x_1, y_1) et (x_2, y_2) et de la tangente $\mathscr{T}_{x_0}$?
(b) Que peut-on dire de cette corde et de cette tangente, sachant que (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont deux points de $\mathscr{C}_f \cap \mathscr{T}_{x_0}$?

2. Supposons que f est strictement convexe. Bien sûr $(x_0, f(x_0)) \in \mathscr{C}_f \cap \mathscr{T}_{x_0}$. Il s'agit de démontrer que c'est le seul point dans cette intersection, en raisonnant par l'absurde.
Supposons que $\mathscr{C}_f \cap \mathscr{T}_{x_0}$ contienne un point (x_1, y_1) distinct de $(x_0, f(x_0))$. D'après Q1, le segment $[(x_0, f(x_0)), (x_1, y_1)]$ est inclus dans $\mathscr{C}_f \cap \mathscr{T}_{x_0}$. Son milieu $\frac{1}{2}(x_0, f(x_0)) + \frac{1}{2}(x_1, y_1)$ appartient donc à $\mathscr{C}_f \cap \mathscr{T}_{x_0}$.
On cherchera à en déduire une contradiction avec la définition de la stricte convexité de f, cf. inégalité stricte pour $x = x_0$, $y = x_1$ et $\lambda = \frac{1}{2} \in]0,1[$, en considérant de nouveau les deux questions géométriques énoncées dans l'indication pour Q1.

C10.55. Exercice (Inégalité de Jensen) Soit $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Justifier l'existence de réels a et b tels que pour tout $x \in [0;1]$, $a \leqslant f(x) \leqslant b$.
2. Justifier : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \in [a;b]$.
3. Soit $\varphi\colon [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe continue. Démontrer

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \int_0^1 \varphi(f(x))\,\mathrm{d}x.$$

Indications

1. Une fonction continue sur un segment...
2. Le résultat se déduit de Q1 et de la croissance de l'intégrale.
3. D'après le théorème sur les sommes de Riemann :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \varphi(f(t))\,\mathrm{d}t\,.$$

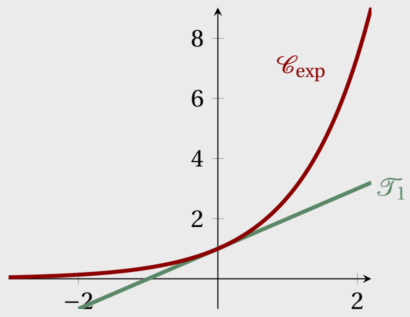
Utiliser la convexité de φ pour conclure.

§ 4 Exemples d'inégalités de convexité

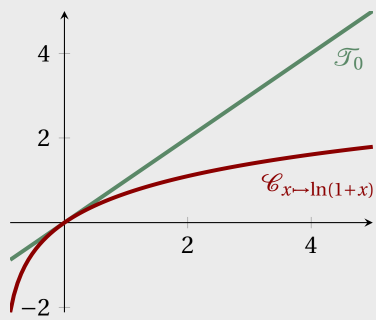
§ 4.1 Des inégalités de convexité pour exp, ln et sin

C10.56. Théorème (Des inégalités de convexité pour exp, ln et sin)

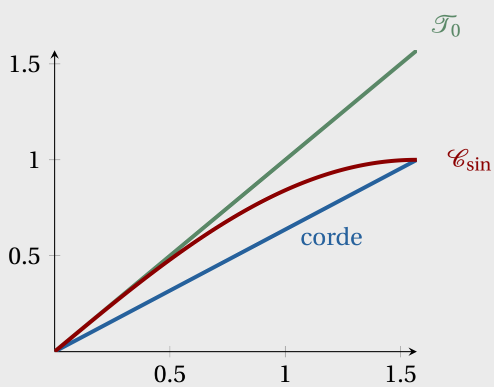
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad e^x \geqslant 1 + x$$



$$\forall\, x \in\,]-1,+\infty[, \qquad \ln(1+x) \leqslant x$$



$$\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad \frac{2}{\pi}x \leqslant \sin(x) \leqslant x$$



§ 4.2 Inégalité arithmético-géométrique

C10.57. Théorème (Inégalité arithmético-géométrique) Soit $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$ et soit $x_1, \dots, x_n > 0$. Alors

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

C10.58. Exercice L'inégalité arithmético-géométrique, pour $n = 2$, s'écrit $\sqrt{x_1 x_2} \leqslant \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, pour tout $x_1, x_2 > 0$. En donner une démonstration élémentaire.

Indications | Développer $\left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right)^2 \geqslant 0$.

C10.59. Exercice (Matrice bistochastique) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice bistochastique, i.e. telle que :
- (a) les coefficients de A sont positifs ou nuls ;
- (b) la somme des coefficients de chaque ligne de A vaut 1 ;
- (c) la somme des coefficients de chaque colonne de A vaut 1.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $x_1 > 0, \dots, x_n > 0$ et $Y = AX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Démontrer $\prod_{i=1}^{n} x_i \leqslant \prod_{i=1}^{n} y_i$.

Indications | Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, notons $a_{i,j}$ le coefficient de la matrice A d'adresse (i,j).
- Justifier qu'il suffit de d'établir $\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \ln(y_i)$.
- Par définition du produit matriciel, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i$. Utiliser la concavité de la fonction logarithme.

§ 4.3 Inégalités de Young, de Hölder, de Minkowski

C10.60. Théorème (Inégalité de Young) Soient $p > 0$ et $q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors

$$\forall\, x, y > 0 \qquad xy \leqslant \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q.$$

C10.61. Corollaire (Inégalité de Hölder) Soient $p > 0$ et $q > 0$ tels tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. Alors

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \quad \forall (y_1, \dots, y_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

C10.62. Remarque Pour $p = q = 2$, l'inégalité de Hölder redonne l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

C10.63. Théorème (Inégalité de Minkowski) Soit $p \geqslant 1$ et soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$. Alors

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

C10.64. EXERCICE (ESPACE L^p) Soit $p \geqslant 1$. Pour tout $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ on pose

$$||f||_p := \left(\int_0^1 |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Démontrer que pour tout $(f,g) \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})^2$

$$||f+g||_p \leqslant ||f||_p + ||g||_p.$$

Indications: La séparation et l'homogénéité sont aisées à établir. Pour l'inégalité triangulaire, combiner l'inégalité de Minkowski C10.63 et les résultats sur les sommes de Riemann (cf. stratégie pour établir l'inégalité de Jensen C10.55).

C10.65. EXERCICE (ESPACE ℓ^p) Soit $p \geqslant 1$. On pose

$$\ell^p := \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum |u_n|^p \text{converge}\right\}.$$

1. Démontrer que ℓ^p est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
2. Pour tout $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ on pose

$$||u||_p := \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Démontrer que pour tout $(u,v) \in \ell^p \times \ell^p$, $||u+v||_p \leqslant ||u||_p + ||v||_p$.

Indications:

1. • On commence par justifier que ℓ^p est non vide.
   • Soient $(u,v) \in \ell^p \times \ell^p$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. On doit démontrer que la série de terme général $\left|\lambda u_n + \mu v_n\right|^p$ converge. Comme tous ses termes sont positifs, cela revient à démontrer que ses sommes partielles $\sum_{k=0}^{n} \left|\lambda u_k + \mu v_k\right|^p$ sont majorées. On s'appuie sur l'inégalité de Minkowski C10.63 et sur l'appartenance de u et v à ℓ^p pour ce faire.
2. On commence par écrire l'inégalité de Minkowski C10.63 pour les sommes partielles.

§ 5 UNE SÉLECTION D'EXERCICES

C10.66. EXERCICE (CCINP) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Donner la définition d'une fonction convexe à valeurs dans $\mathbb{R}$.
2. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Démontrer la propriété suivante, où $n \geqslant 3$: si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des réels positifs tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ et si $x_1, \ldots, x_n \in I$, alors :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Indication : On pourra remarquer que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \left(1 - \sum_{i=3}^{n} \lambda_i x_i\right) \dfrac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{1 - \sum_{i=3}^{n} \lambda_i x_i} + \sum_{i=3}^{n} \lambda_i x_i$, *si* $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$.

C10.67. EXERCICE Soient I, J deux intervalles, soit $f : I \longrightarrow J$ une application convexe, bijective et croissante. Démontrer que $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est concave.

C10.68. EXERCICE Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_{>0}$.

1. Démontrer :

$$(x_1 \ldots x_n)^{1/n} \leqslant \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}.$$

2. Démontrer :

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_4} \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geqslant n.$$

C10.69. EXERCICE Démontrer que :

$$\forall x \in]1,+\infty[^2 \qquad \sqrt{\ln(x)\ln(y)} \leqslant \ln\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

C10.70. EXERCICE

1. Démontrer que la fonction

$$\left| \begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}_{>0} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & x\ln(x) \end{array} \right.$$

est convexe.

2. En déduire que pour tout $x, y, a, b > 0$:

$$(x+y)\ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right) \leqslant x\ln\left(\frac{x}{a}\right) + y\ln\left(\frac{y}{b}\right).$$

C10.71. EXERCICE

1. Établir la convexité de la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1+e^x) \end{array} \right. .$$

2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x_1, \ldots, x_n > 0$:

$$1 + \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leqslant \prod_{i=1}^{n} (1+x_i)^{1/n}.$$

3. En déduire que pour tout $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n > 0$:

$$\left(\prod_{i=1}^{n} (a_i+b_i)\right)^{1/n} \geqslant \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n} + \left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right)^{1/n}.$$

C10.72. EXERCICE Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Supposons qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) \leqslant ax + b.$$

Démontrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + c$.

C10.73. EXERCICE Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Supposons que $f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$. Démontrer que $f \geqslant 0$.
2. Supposons que f possède une asymptote oblique en $+\infty$, i.e. qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$f(x) - (ax+b) \xrightarrow[x \longrightarrow +\infty]{} 0.$$

Démontrer que f est au-dessus de son asymptote, i.e. que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant ax + b$.

C10.74. EXERCICE Soient $a < b$ des réels. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe continue.

1. Démontrer :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

2. Supposons f dérivable sur $[a,b]$. Démontrer :

$$(b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

C10.75. EXERCICE Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Supposons f dérivable sur I. Démontrer que f est convexe si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in I^2 \qquad f(y) \geqslant f(x) + f'(x)(y-x).$$

2. On ne suppose plus f dérivable. On suppose f convexe et l'intervalle I ouvert. Démontrer pour tout $x \in I$, il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $y \in I$:

$$f(y) \geqslant f(x) + m(y-x).$$

Étudier la réciproque.

C10.76. Exercice Soit $f : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Démontrer que $\dfrac{f(x)}{x}$ a une limite (éventuellement infinie) quand x tend vers $+\infty$.

C10.77. Exercice Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$, positive et bornée telle que $f \leqslant f''$.

1. Démontrer que f est convexe et décroissante.
2. Démontrer que f et f' tendent vers 0 en $+\infty$.
3. Soient les fonctions
$$g \;\left|\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \big(f(x) + f'(x)\big)\, e^{-x} \end{array}\right.$$
et
$$h \;\left|\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)\, e^{x} \end{array}\right. .$$
Étudier les variations de g et de h.
4. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) \leqslant f(0)\, e^{-x}$.

C10.78. Exercice Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$.

1. Supposons que $\ln(f)$ est convexe. Démontrer que f est convexe.
2. Démontrer que $\ln(f)$ est convexe si et seulement si pour tout $\alpha > 0$, f^α est convexe.
On pourra considérer, à x, y et $\lambda \in]0,1[$ fixés, les fonctions :
$$\varphi \;\left|\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & e^{t \ln(f(\lambda x + (1-\lambda) y))} \end{array}\right.$$
et
$$\psi \;\left|\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda e^{t f(x)} + (1-\lambda) e^{t f(y)} \end{array}\right. .$$
vérifier que $\varphi \leqslant \psi$, comparer $\varphi(0)$ et $\psi(0)$, et en déduire une inégalité entre $\varphi'(0)$ et $\psi'(0)$.

C10.79. Exercice Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction concave.

1. Démontrer que la fonction
$$\varphi \;\left|\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{>0} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)}{x} \end{array}\right.$$
est décroissante.
2. Démontrer :
$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_{>0})^2 \qquad f(x+y) \leqslant f(x) + f(y).$$

C10.80. Exercice On fixe un repère du plan. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe dérivable, soit $M = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Quel est le nombre maximal de droites tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f passant par M ?

C10.81. Exercice Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que :
$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } a < b,\ \exists ! c \in]a,b[\text{ tel que } f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a).$$

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Posons
$$p_a \;\left|\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array}\right.$$
Démontrer que p_a est monotone sur $]-\infty, a[$ et sur $]a, +\infty[$.
2. En déduire que f est strictement convexe ou strictement concave.

C10.82. Exercice

1. Soit I un intervalle, soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Démontrer que pour tout $(a,b) \in I^2$ tel que $a < b$, $f'([a,b])$ est un intervalle [1].
2. Soit I un intervalle, soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe dérivable. Démontrer que f' est continue sur I.

1. Il s'agit du théorème de Darboux, qui assure que la dérivée d'une fonction dérivable sur un intervalle vérifie la propriété des valeurs intermédiaires. Il est à noter qu'il n'y a aucune hypothèse de continuité sur la dérivée ici.

C10.83. **Exercice (X)** Soit I un intervalle, soit $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que :

$$\forall (x,y) \in I^2 \qquad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Démontrer que f est convexe.

C10.84. **Exercice (X)** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}^{+*}$, soit $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$. Démontrer que l'application

$$\varphi \;\left|\; \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\,f(x) \end{array}\right.$$

est convexe si et seulement si

$$\psi \;\left|\; \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{array}\right.$$

est convexe.

C10.85. **Exercice (ENS)** Soit n un entier $\geqslant 2$. Soient n fonctions $f_1,\dots,f_n$ convexes continues sur $[0,1]$ telles que pour tout $x \in [0,1]$, $\max\big(f_1(x),\dots,f_n(x)\big) \geqslant 0$. Démontrer qu'il existe $\alpha_1,\dots,\alpha_n \geqslant 0$ tels que $\alpha_1+\ldots+\alpha_n = 1$ et

$$\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n \geqslant 0.$$