TD9 – calcul différentiel et révisions

Exercice 1 ★★☆☆☆. **[Indication(s)]** **[Un corrigé]**
Titre. Norme subordonnée sur une espace d'applications linéaires.
Énoncé. *Soient*

- E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme* N_E *;*
- F *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie muni, d'une norme* N_F *;*
- $S_E(0_E, 1) := \{x \in E \,:\, N_E(x) = 1\}$ *la sphère unité de* E.

1. *Démontrer que, pour tout* $f \in \mathscr{L}(E,F)$, *le nombre*
$$|||f||| := \max_{x \in S_E(0_E,1)} N_F(f(x))$$
est bien défini.
2. *Démontrer que l'application* $|||\cdot|||$ *définie par*
$$|||\cdot||| \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \to & \mathbb{R}_+ \\ f & \mapsto & |||f||| := \max_{x \in S_E(0_E,1)} N_F(f(x)) \end{array} \right.$$
est une norme sur $\mathscr{L}(E,F)$.
3. *Démontrer que pour tout* $f \in \mathscr{L}(E,F)$, *pour tout* $(x,y) \in E^2$
$$N_F\left(f(x) - f(y)\right) \leq |||f||| \ N_E(x-y)\,.$$

Exercice 2 ★☆☆☆☆. **[Indication(s)]** **[Un corrigé]**
Titre. Application différentiable dont la différentielle est égale à la trace.
Énoncé. *Soient*

- $n \geq 2$ *un nombre entier;*
- $\mathrm{Tr}\colon \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}\,;\ M \mapsto \sum_{1 \leq i \leq n} [M]_{i,i}$ *l'application trace.*

Déterminer toutes les applications $f\colon \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, *différentiables sur* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, *telles que*
$$\forall\, A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad df(A) = \mathrm{Tr}\,.$$
On pourra raisonner par analyse et synthèse.

Exercice 3 ★★★★☆. **[Indication(s)]** **[Un corrigé]**
Titre. Équation des cordes vibrantes.
Énoncé.

1. *Soit une fonction*
$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & g(u,v) \end{array} \right.$$
de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que
$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(u,v) = 0\,.$$
Démontrer qu'il existe $\varphi \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\psi \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que
$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad g(u,v) = \varphi(u) + \psi(v)\,.$$

2. *Soit $c \in \mathbb{R}^*$. Soit une fonction*
$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & f(x,t) \end{array} \right.$$
de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que
$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t)\,;$$
   (a) *Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ fixés. On considère la fonction g définie par*
$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & f(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v)\,. \end{array} \right.$$
   Démontrer que la fonction g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et exprimer, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(u,v)$ en fonction de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et des dérivées partielles d'ordre 2 de f.

   (b) *En choisissant $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tels que*
   - *la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ est inversible ;*
   - *pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(u,v) = 0$;*

   démontrer qu'il existe $\varphi \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\psi \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que
$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)\,.$$

Exercice 4 ★★☆☆☆. **[Indication(s)]** **[Un corrigé]**
Titre. Vrai ou Faux sur les révisions d'algèbre linéaire : Applications linéaires.
Énoncé. *Répondre par Vrai ou Faux aux questions suivantes.*
Si la réponse est « Vrai », donner une démonstration du résultat, étayée par des propriétés du cours.
Si la réponse est « Faux », argumenter au moyen d'un contre-exemple.

1. *Soit f un endormorphisme de E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.*
   Alors $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$.

2. *L'application*
$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, y+z, z) \end{array} \right.$$
   est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

3. *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.*
Si f est sujectif, alors f est injectif.

4. *Soit $f: E \to F$ une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On suppose E de dimension finie $n \geq 1$ et on considère une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E.*
Si la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre, alors f est injective.

5. *Soit f un endormorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $2n$, on $n \in \mathbb{N}^*$.*
Si $\dim \operatorname{Ker}(f) = n$ et $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(f)$, alors $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(f)$.

6. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. L'application*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(a_0), P(a_1), \ldots, P(a_n)) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme si et seulement si les scalaires $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont deux-à-deux disctincts.

7. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit E le sous-espace de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ défini par*

$$E = \operatorname{Vect}\left(f_0 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^t \end{array} \right., f_1 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t\, e^t \end{array} \right., f_2 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^2\, e^t \end{array} \right., \ldots, f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^n\, e^t \end{array} \right. \right).$$

L'application

$$d \left| \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & f' \end{array} \right.$$

est bien définie et c'est un automorphisme de E.

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 1. [Énoncé] [Un corrigé]

1.
   - *Quelle propriété topologique remarquable possède la sphère unité $S_E(0_E, 1)$ de E ?*
   - *Quelle propriété remarquable possède l'application $N_F \circ f : E \to \mathbb{R}_+$?*
2.
   - *Justifier que, pour tout $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $|||f||| \in \mathbb{R}^+$.*
   - *Pour la propriété de séparation de $|||\cdot|||$, démontrer que si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ vérifie $|||f||| = 0$, alors pour tout $x \in E$, $f(x) = 0_F$, en distinguant les cas $x = 0_E$ et $x \neq 0_E$. Remarquer que, si $x \in E \setminus \{0_E\}$, alors $\dfrac{x}{N_E(x)} \in S_E(0_E, 1)$.*
   - *Pour l'homogénéité, distinguer deux cas, suivant la nullité ou la non-nullité du scalaire λ. Dans le cas où $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $f \in \mathscr{L}(E,F)$, commencer par majorer*

     $$N_F\big((\lambda.f)(x)\big)$$

     pour $x \in S_E(0_E, 1)$, par une quantité indépendante de x. On pourra, à un moment opportun, utiliser la substitution à présent classique

     $$\lambda \leftarrow \frac{1}{\lambda} \qquad \text{et} \qquad f \leftarrow \lambda.f\,.$$

   - *Pour l'inégalité triangulaire, si $f, g \in \mathscr{L}(E,F)$, commencer par majorer*

     $$N_F((f+g)(x))$$

     pour $x \in S_E(0_E, 1)$, par une quantité indépendante de x.
3.
   - *Commencer par démontrer que, pour tout $f \in \mathscr{L}(E,F)$, pour tout $z \in E$*

     $$(\star) \qquad N_F(f(z)) \leq |||f|||\ N_E(z)$$

     en distinguant les cas $z = 0_E$ et $z \neq 0_E$, puis expliquer pourquoi le résultat demandé découle de $(\star)$.
   - *Dans le cas où $z \in E \setminus \{0_E\}$, remarquer que le vecteur $\dfrac{z}{N_E(z)}$ appartient à $S_E(0_E, 1)$, pour établir $(\star)$.*

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 2. [Énoncé] [Un corrigé]

- *Raisonner par analyse et synthèse comme soufflé dans l'énoncé.*
- *Justifier que la trace est différentiable sur* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *et calculer* $d\mathrm{Tr}(A)$, *pour tout* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
- *Une combinaison linéaire d'applications différentiables est différentiable.*
- *La différentielle est linéaire.*
- *Caractérisation des applications constantes sur un ouvert connexe par arcs.*

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 3. [Énoncé] [Un corrigé]

1.
- *Soit $u \in \mathbb{R}$ fixé. Justifier que la fonction $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,\cdot)$ est constante sur $\mathbb{R}$ et donc que*

$$\forall\, v \in \mathbb{R}, \qquad \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,0)\,.$$

- *Soit $v \in \mathbb{R}$ fixé. Remarquer que la fonction*

$$g(\cdot,v) \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & g(u,v) \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée à l'aide d'une dérivée partielle de g. Appliquer alors le Théorème fondamental de l'analyse, pour obtenir une expression intégrale de $g(u,v) - g(0,v)$, pour tout $u \in \mathbb{R}$.

- *Vérifier avec soin la régularité sur $\mathbb{R}$ des fonctions φ et ψ qui apparaissent.*

2. (a)
- *Introduire l'application θ définie par*

$$\theta \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \longmapsto & \Big(\underbrace{\alpha u + \beta v}_{\theta_1(u,v)}, \underbrace{\gamma u + \delta v}_{\theta_2(u,v)}\Big) \end{array} \right.$$

et exprimer g à l'aide de f et θ.
- *Une application linéaire est de classe $\mathscr{C}^2$.*
- *Appliquer la règle de la chaîne, plusieurs fois, pour calculer $\dfrac{\partial^2 g}{\partial v\, \partial u}(u,v)$, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.*

(b)
- *Choisir $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ comme préciser dans l'énoncé. Plusieurs choix sont possibles.*
- *Appliquer la Question 1.*
- *Modifier éventuellement les fonctions φ et ψ que nous livre la Question 1, en composant à la source par une fonction affine, qui est de classe $\mathscr{C}^2$.*

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 4. [Énoncé] [Un corrigé]

1. *L'assertion est-elle vraie si f est nilpotent d'indice 2 ?*
2. *Justifier la linéarité de f et analyser son noyau.*
3. *Ne manque-t-il pas une hypothèse sur la dimension de E ? Considérer par exemple un endomorphisme classique de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.*
4. *Écrire un vecteur x de $\mathrm{Ker}(f)$ sous la forme $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.e_k$, où $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, puis appliquer la linéarité de f pour expliciter $f(x)$.*
5. *Théorème du rang.*
6. • *Établir d'abord la linéarité de f.*

   $\Longrightarrow$. *Supposer que l'application f est bijective et considérer, pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, le polynôme*

$$P_i := \prod_{\substack{0\le j\le n\\ j\neq i}} (X-a_j) \in \mathbb{K}_n[X]\,.$$

   $\Longleftarrow$. *Supposer que les scalaires $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont deux-à-deux disctincts et étudier le nombre de racines d'un polynôme de $\mathrm{Ker}(f)$.*

7. • *Établir la liberté de la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ de vecteurs de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.*
   • *Expliciter, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, la fonction f_k' en fonction de $f_0, f_1, \dots, f_n$ et en déduire que $f_k' \in E$.*
   • *Écrire une fonction f de $\mathrm{Ker}(d)$ sous la forme $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k.f_k$, où $(\lambda_0,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$. Appliquer la linéarité de d pour expliciter df, puis appliquer la liberté de la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ pour obtenir un système linéaire dont $(\lambda_0,\dots,\lambda_n)$ est solution.*

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1. [Énoncé] [Indication(s)]

1. *Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.*

   - *La sphère $S_E(0_E,1)$ est une partie bornée de E, car*
   $$S_E(0_E,1) \subset \overline{B_E(0_E,1)} := \{x \in E \,:\, N_E(x) \leq 1\}\,.$$
   - *La sphère $S_E(0_E,1)$ est une partie fermée de E, car $S_E(0_E,1)$ est l'image inverse de la partie fermée $\{1\}$ de $\mathbb{R}$ par l'application continue N_E, qui est même 1-lipschitzienne d'après la deuxième inégalité triangulaire.*
   - *Comme E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, la partie $S_E(0_E,1)$ de E, qui est fermée et bornée, est compacte.*
   - *L'application f est linéaire de E dans F, qui sont tout deux des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie. Elle est donc continue. L'application N_F est continue et même 1-lipschitzienne d'après la deuxième inégalité triangulaire. Donc l'application $N_F \circ f$ est continue sur E.*
   - *D'après le Théorème des bornes atteintes, l'application*
   $$\left|\begin{array}{ccc} S_E(0_E,1) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & N_F\big(f(x)\big) \end{array}\right.$$
   possède un maximum. Donc le nombre $\displaystyle\max_{x \in S_E(0,1)} N_F(f(x))$ est bien défini.

2. - *Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. D'après la Question 1, $|||f|||$ est un nombre bien défini. Comme*
   $$|||f||| := \max_{x \in S_E(0_E,1)} N_F(f(x)) = \max\big(\{N_F(f(x)) \,:\, x \in S_E(0_E,1)\}\big)$$
   est le maximum d'un ensemble formé de nombres réels positifs ou nuls, $|||f||| \in \mathbb{R}_+$.
   - *Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ tel que $|||f||| = 0$.*
     . *Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$. Comme le vecteur $\dfrac{x}{N_E(x)}$ appartient à $S_E(0_E,1)$, il vient*
     $$0 \leq N_F\left(f\left(\frac{x}{N_E(x)}\right)\right) \leq |||f||| = 0\,.$$
     Par antisymétrie de la relation d'ordre usuelle sur $\mathbb{R}$, $N_F\left(f\left(\dfrac{x}{N_E(x)}\right)\right)$. Par séparation de la norme N_F, nous en déduisons
     $$0_F = f\left(\frac{x}{N_E(x)}\right) = \frac{1}{N_E(x)}\, f(x)$$
     puis $f(x) = 0_F$.
     . *Nous avons établi que, pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, $f(x) = 0_F$. Comme f est une application linéaire, $f(0_E) = 0_F$. Ainsi, pour tout $x \in E$, $f(x) = 0_F$, i.e.*
     $$f = 0_{\mathscr{L}(E,F)}\,.$$

   Donc l'application $|||\cdot|||$ vérifie la propriété de séparation.
   - . *Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\lambda = 0 \in \mathbb{R}$. Nous observons*
     $$|||\lambda.f||| = |||0.f||| = |||0_{\mathscr{L}(E,F)}||| = 0 = 0.\,|||f||| = \lambda.\,|||f|||\,.$$

. *Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Soit $x \in S_E(0_E,1)$.*

$$N_F((\lambda.f)(x)) = N_F(\lambda.f(x)) = |\lambda|\ N_F(f(x)) \leq \underbrace{|\lambda|\ \left|\!\left|\!\left| f \right|\!\right|\!\right|}_{\textit{indépendant de } x}$$

Par passage au max sur $x \in S_E(0_E,1)$, il vient

$$(\star) \qquad \left|\!\left|\!\left| \lambda.f \right|\!\right|\!\right| \leq |\lambda|\ \left|\!\left|\!\left| f \right|\!\right|\!\right| .$$

On appliquant cette inégalité avec $f \leftarrow \lambda.f$ et $\lambda \leftarrow \dfrac{1}{\lambda}$, nous obtenons

$$\|f\| = \left|\!\left|\!\left| \frac{1}{\lambda}.(\lambda.f) \right|\!\right|\!\right| \leq \left|\frac{1}{\lambda}\right|\ \left|\!\left|\!\left| \lambda.f \right|\!\right|\!\right|$$

puis

$$(\star\star) \qquad |\lambda|\ \left|\!\left|\!\left| f \right|\!\right|\!\right| \leq \left|\!\left|\!\left| \lambda.f \right|\!\right|\!\right| .$$

De $(\star)$ et $(\star\star)$, on déduit $\left|\!\left|\!\left| \lambda.f \right|\!\right|\!\right| = |\lambda|\ \left|\!\left|\!\left| f \right|\!\right|\!\right|$.

Donc l'application $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ vérifie la propriété d'homogénéité.

- *Soient $f, g \in \mathscr{L}(E,F)$. Soit $x \in S_E(0_E,1)$. Nous avons*

$$N_F((f+g)(x)) = N_F(f(x)+g(x)) \leq N_F((f(x)) + N_F((g(x)) \leq \underbrace{\left|\!\left|\!\left| f \right|\!\right|\!\right| + \left|\!\left|\!\left| g \right|\!\right|\!\right|}_{\textit{indépendant de } x} .$$

Par passage au max sur $x \in S_E(0_E,1)$, il vient

$$\left|\!\left|\!\left| f+g \right|\!\right|\!\right| \leq \left|\!\left|\!\left| f \right|\!\right|\!\right| + \left|\!\left|\!\left| g \right|\!\right|\!\right| .$$

Donc l'application $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ vérifie l'inégalité triangulaire.

3. - *Si nous démontrons que, pour tout $f \in \mathscr{L}(E,F)$, pour tout $z \in E$*

$$(\star\star\star) \qquad N_F(f(z)) \leq \left|\!\left|\!\left| f \right|\!\right|\!\right|\ N_E(z)$$

alors le résultat demandé en découlera en appliquant $(\star\star\star)$ avec $z \leftarrow x - y$, par linéarité de f.

- *Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $z \in E$.*

. *Supposons $z \neq 0_E$. Alors le vecteur $\dfrac{z}{N_E(z)}$ appartient à $S_E(0_E,1)$. Donc*

$$\frac{1}{N_E(z)}\ N_F(f(z)) = N_F\left(\frac{1}{N_E(z)}\ f(z)\right) = N_F\left(f\left(\frac{z}{N_E(z)}\right)\right) \leq \left|\!\left|\!\left| f \right|\!\right|\!\right| .$$

En multipliant chaque membre de l'inégalité entre les termes extrêmes par $N_E(z) > 0$, nous obtenons

$$N_F(f(z)) \leq \left|\!\left|\!\left| f \right|\!\right|\!\right|\ N_E(z) .$$

. *Supposons $z = 0_E$. Alors*

$$N_F(f(z)) = N_F(f(0_E)) = N_F(0_F) = 0 = 0\ \left|\!\left|\!\left| f \right|\!\right|\!\right| = \left|\!\left|\!\left| f \right|\!\right|\!\right|\ N_E(0_E) = \left|\!\left|\!\left| f \right|\!\right|\!\right|\ N_E(z) .$$

Dans tous les cas, $N_F(f(z)) \leq \left|\!\left|\!\left| f \right|\!\right|\!\right|\ N_E(z)$.

Nous avons donc établi que l'application f est $\left|\!\left|\!\left| f \right|\!\right|\!\right|$-lipschitzienne de (E, N_E) dans (F, N_F).

Un corrigé de l'exercice 2. [Énoncé] [Indication(s)]

- **Analyse.**
Soit f une application différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que
$$\forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad df(A) = \mathrm{Tr}\ .$$
La trace est une application linéaire donc différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. De plus
$$\forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad d\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}\ .$$
L'application $f - \mathrm{Tr}$ est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, comme combinaison linéaire d'applications différentiables sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par linéarité de la différentielle
$$\forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad d\big(f - \mathrm{Tr}\big)(A) = df(A) - d\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr} - \mathrm{Tr} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}\ .$$
L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert connexe par arcs (et même convexe) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par caractérisation des applications constantes sur un ouvert connexe par arcs, on en déduit que l'application $f - \mathrm{Tr}$ est constante sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, i.e. qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(A) = \mathrm{Tr}(A) + k\ .$$

- **Synthèse.**
Soit $k \in \mathbb{R}$ et f l'application définie par
$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & \mathrm{Tr}(A) + k\ . \end{array} \right.$$
La trace est linéaire. Elle est donc différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Une application constante sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donc
$$f = \mathrm{Tr} + k$$
est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, comme combinaison linéaire d'applications différentiables sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. D'après le cours, comme la trace est linéaire
$$d\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}$$
et comme k est constante
$$dk(A) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}\ .$$
Par linéarité de la différentielle
$$df(A) = d\mathrm{Tr}(A) + dk(A) = \mathrm{Tr}\ .$$
Donc la fonction f est solution du problème.

- **Conclusion.**
Les fonctions $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, différentiables sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telles que
$$\forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad df(A) = \mathrm{Tr}$$
sont les fonctions
$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & \mathrm{Tr}(A) + k \end{array} \right.$$
où k est une constante réelle.

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3. [Énoncé] [Indication(s)]

1. • *Soit $u \in \mathbb{R}$ fixé. La fonction*

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,\cdot) \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$) et a pour dérivée la fonction

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial g}{\partial u}\right)(u,v) =: \dfrac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(u,v) = 0\,. \end{array} \right.$$

La fonction $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,\cdot)$ est donc constante sur $\mathbb{R}$. Ainsi

$$\forall\, v \in \mathbb{R}, \qquad \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,0)\,.$$

Comme u est quelconque dans $\mathbb{R}$, il vient

$$\forall\,(u,v) \in \mathbb{R}^2, \qquad \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,0)\,.$$

• *Soit $v \in \mathbb{R}$ fixé. La fonction*

$$g(\cdot,v) \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & g(u,v) \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$) et a pour dérivée la fonction

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,0)\,. \end{array} \right.$$

D'après le Théorème fondamental de l'analyse, pour tout $u \in \mathbb{R}$

$$\int_0^u \frac{\partial g}{\partial u}(t,0)\, dt = g(u,v) - g(0,v)\,.$$

Comme v est quelconque dans $\mathbb{R}$, nous en déduisons que

$$(\star) \quad \forall\,(u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad g(u,v) = \int_0^u \frac{\partial g}{\partial u}(t,0)\, dt + g(0,v)\,.$$

• *D'après le dernier point, la fonction*

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,0) \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Donc, d'après le Théorème fondamental de l'analyse, la fonction

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \displaystyle\int_0^u \frac{\partial g}{\partial u}(t,0)\, dt \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

- *Comme g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, la fonction*

$$\psi \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & g(0,v) \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

- *Avec ces nouvelles notations, l'identité $(\star)$ se réécrit*

$$\forall\,(u,v) \in \mathbb{R}^2, g(u,v) = \varphi(u) + \psi(v)\,.$$

2. (a) • *Soit θ l'application définie par*

$$\theta \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \mapsto & \Big(\underbrace{\alpha u + \beta v}_{\theta_1(u,v)}, \underbrace{\gamma u + \delta v}_{\theta_2(u,v)}\Big) \end{array} \right..$$

Comme l'application θ est linéaire, elle est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Comme $g = f \circ \theta$, l'application g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, comme composée d'applications de classe $\mathscr{C}^2$.

• *D'après la règle de la chaîne*

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u} &= \frac{\partial f \circ \theta}{\partial u} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \circ \theta \times \frac{\partial \theta_1}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial t} \circ \theta \times \frac{\partial \theta_2}{\partial u} \\ &= \alpha \frac{\partial f}{\partial x} \circ \theta + \gamma \frac{\partial f}{\partial t} \circ \theta \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right) &= \alpha \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \circ \theta \times \frac{\partial \theta_1}{\partial v} + \alpha \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \circ \theta \times \frac{\partial \theta_2}{\partial v} \\ &+ \gamma \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) \circ \theta \times \frac{\partial \theta_1}{\partial v} + \gamma \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) \circ \theta \times \frac{\partial \theta_2}{\partial v} \\ &= \alpha\,\beta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \circ \theta + \alpha\,\delta \frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial x} \circ \theta + \gamma\,\beta \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial t} \circ \theta + \gamma\,\delta \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \circ \theta \\ &= \alpha\,\beta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \circ \theta + (\alpha\delta + \gamma\,\beta) \frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial x} \circ \theta + \gamma\,\delta \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \circ \theta \quad [\textit{Théorème de Schwarz}] \\ &= (\alpha\beta + c^2\gamma\delta) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \circ \theta + (\alpha\delta + \gamma\,\beta) \frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial x} \circ \theta \quad \left[\textit{cf. hypothèse sur } f\right]. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v\,\partial u}(u,v) = (\alpha\beta + c^2\gamma\delta) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v) + (\alpha\delta + \gamma\,\beta) \frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial x}(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v)\,.$$

(b) • *Si on pose*

$$\alpha := c \qquad \beta := c \qquad \gamma := 1 \qquad \delta := -1$$

alors

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \mathrm{Det}\begin{pmatrix}c & c\\ 1 & -1\end{pmatrix} = -2c \neq 0$$

et donc la matrice $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ *est inversible. De plus, pour tout* $(u,v)\in\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}(u,v) &= (\alpha\beta + c^2\gamma\delta)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha u+\beta v,\gamma u+\delta v) + (\alpha\delta+\gamma\,\beta)\,\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x}(\alpha u+\beta v,\gamma u+\delta v)\\ &= (c^2-c^2)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha u+\beta v,\gamma u+\delta v) + (-c+c)\,\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x}(\alpha u+\beta v,\gamma u+\delta v)\\ &= 0\end{aligned}$$

• *D'après la question 1, il existe* $\varphi\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *et* $\psi\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *telles que*

$$\forall\,(u,v)\in\mathbb{R}^2,\quad f(\alpha u+\beta v,\gamma u+\delta v) =: g(u,v) = \varphi(u)+\psi(v)\,.$$

Soit $(x,t)\in\mathbb{R}^2$. *Comme*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& cu+cv\\ t &=& u-v\end{array}\right. \qquad\Longleftrightarrow\qquad \left\{\begin{array}{rcl} u &=& \dfrac{x+ct}{2c}\\[2ex] v &=& \dfrac{x-ct}{2c}\end{array}\right.$$

il vient

$$f(x,t) = \varphi\left(\frac{x+ct}{2c}\right)+\psi\left(\frac{x-ct}{2c}\right)\,.$$

• *Si on définit l'application* Δ *par*

$$\Delta\ \left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ z & \longmapsto & \dfrac{z}{2c}\end{array}\right.$$

qui est affine donc de classe $\mathscr{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}$, *alors on obtient*

$$\forall\,(x,t)\in\mathbb{R}^2,\qquad f(x,t) = \varphi\circ\Delta\,(x+ct)+\psi\circ\Delta\,(x-ct)\,.$$

avec $\varphi\circ\Delta\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *et* $\psi\circ\Delta\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4. [Énoncé] [Indication(s)]

1. - *Faux.*
   - *L'application*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (y,0) \end{array} \right.$$

est linéaire, puisque c'est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ *canoniquement associé à la matrice* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. *De plus* $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}((1,0)) = \operatorname{Im}(f)$. *La somme* $\operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Im}(f)$ *n'est donc ni directe, ni égale à* $\mathbb{R}^2$.

2. - *Vrai.*
   - *L'application* f *est linéaire, puisque c'est l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *canoniquement associé à la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *De plus si* $(x,y,z) \in \operatorname{Ker}(f)$, *alors*

$$x+y+z=0\ ,\ y+z=0\ ,\ z=0$$

et donc $x=y=z=0$. *Le noyau de* f *étant égal à* $\{(0,0,0)\}$, *l'application* f *est injective. Comme* $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 < \infty$, *l'application* f *est un automorphisme de* $\mathbb{R}^3$.

3. - *Faux.*
   - *L'application linéaire*

$$d \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{array} \right.$$

est linéaire, par linéarité de la dérivée. Si $g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, *alors d'après le Théorème fondamendal de l'analyse, l'application* f *définie par*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^x g(t)\,dt \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$ *et de plus* $d f = g$. *L'application* f *est donc surjective, mais elle n'est pas injective. Par exemple la fonction*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{array} \right.$$

est non nulle et appartient au noyau de d.

4. - *Vrai.*
   - *Soit* $x \in \operatorname{Ker}(f)$. *Alors, comme* $x \in E$, *il existe (un unique)* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ *tel que* $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.e_k$. *Par linéarité de* f

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.f(e_k)\,.$$

Comme la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ *est libre, il vient* $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}$. *Ainsi* $x = 0_E$. *Comme* $\operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$, *l'application linéaire* f *est injective.*

5. - *Vrai.*

- *D'après le Théorème du rang,* $\dim \mathrm{Im}(f) = 2n - n = n$. *Comme* $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$ *et* $\dim \mathrm{Ker}(f) = \dim \mathrm{Im}(f) = n < \infty$*, on a* $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$.

6.
- *Vrai.*
- *L'application f est linéaire. En effet, si $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors*

$$\begin{aligned} f(\lambda.P + \mu.Q) &= \big((\lambda.P+\mu.Q)(a_0), (\lambda.P+\mu.Q)(a_1), \ldots, (\lambda.P+\mu.Q)(a_n)\big) \\ &= \big(\lambda P(a_0) + \mu Q(a_0), \lambda P(a_1) + \mu Q(a_1), \ldots, \lambda P(a_n) + \mu Q(a_n)\big) \\ &= \lambda.(P(a_0), P(a_1), \ldots, P(a_n)) + \mu.(Q(a_0), Q(a_1), \ldots, Q(a_n)) \\ &= \lambda.f(P) + \mu.f(Q)\,. \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$. *Supposons que l'application f est bijective et notons $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$.*
Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Le polynôme

$$P_i := \prod_{\substack{0 \le j \le n \\ j \ne i}} (X - a_j) \in \mathbb{K}_n[X]$$

et a pour image par f le vecteur

$$\left(\prod_{\substack{0 \le j \le n \\ j \ne i}} (a_i - a_j)\right).\ e_{i+1} \in \mathbb{K}^{n+1}$$

qui est non nul, car f est injective et $P_j \neq 0_{\mathbb{K}_n[X]}$. Ainsi a_i est distinct de $a_0, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$.
On en déduit que les scalaires $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont deux-à-deux disctincts.

$\Longleftarrow$. *Supposons que les scalaires $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont deux-à-deux disctincts.*
Soit $P \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors P possède au moins $n+1 > \deg(P)$ racines deux-à-deux distinctes. Donc $P = 0_{\mathbb{K}_n[X]}$. Comme l'application linéaire f est injective et comme

$$\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1 = \dim \mathbb{K}^{n+1}$$

l'application f est un isomorphisme.

7.
- *Vrai.*
- *La famille $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ de vecteurs de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est libre. En effet, si $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ vérifie*

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k.f_k = 0_{\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})}$$

alors

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k t^k e^t = 0$$

et donc, puisque exp *ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}$

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k t^k = 0\,.$$

Comme le polynôme $P := \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k$ possède une infinité de racines, il s'agit du polynôme nul et donc $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n$.

- *Comme*
$$f_0' = f_0 \in E \qquad \textit{et} \qquad \forall\, k \in [\![1,n]\!],\ f_k' = k f_{k-1} + f_k \in E\,.$$
la dérivée d'une fonction de E appartient à E. Donc l'endomorphisme f de E est bien défini.
- *Soit* $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ *tel que* $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k . f_k \in \operatorname{Ker}(f)$. *Alors* $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k . f_k' = 0_{\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})}$. *Donc*
$$\begin{aligned} 0_{\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})} &= \lambda_0 . f_0 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k . (k f_{k-1} + f_k) \\ &= \lambda_0 . f_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k+1} . (k+1) f_k + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k . f_k \\ &= (\lambda_0 + \lambda_1) . f_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (\lambda_{k+1} . (k+1) + \lambda_k) . f_k + \lambda_n . f_n\,. \end{aligned}$$
Comme la famille $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ *est libre, il vient*
$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_n &=& 0 \\ \lambda_{n-1} &=& -n\lambda_n \\ \lambda_{n-2} &=& -(n-1)\lambda_{n-1} \\ & \vdots & \\ \lambda_2 &=& -3\lambda_3 \\ \lambda_1 &=& -2\lambda_2 \\ \lambda_0 &=& -\lambda_1 \end{array} \right.$$
puis $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. *D'où* $\operatorname{Ker}(f) = \{0_{\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})}\}$.
L'application linéaire f est un endomorphisme de E injectif et $\dim(E) = n+1 < \infty$. *Donc f est un automorphisme de E.*

Remarque. *On déduit de ce résultat que pour tout polynôme P de degré $n \geq 0$, il existe un unique uplet* $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ *tel que*
$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \frac{d}{dt}\left(\left(a_0 + a_1\, t + \ldots + a_n\, t^n\right) e^t\right) = P(t)\, e^t$$
d'où une méthode pour primitiver des fonctions de la forme « polynôme × exponentielle ».