

TD7 – calcul différentiel et révisions

Exercice 1 ★☆☆☆☆. [Indication(s)] [Un corrigé]

Titre. Dérivation le long d'un arc.

Énoncé. Soient

- $n \geq 2$ et $m \geq 2$ des nombres entiers;
- Ω une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$;
- I un intervalle de $\mathbb{R}$;
- des fonctions $x_1 : I \rightarrow \mathbb{R}, \dots, x_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tout $t \in I$, $(x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \Omega$;
- une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m : (y_1, \dots, y_n) \mapsto (f_1(y_1, \dots, y_n), \dots, f_m(y_1, \dots, y_n))$.

On suppose que

(H1) pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la fonction x_i est dérivable sur I ;

(H2) la fonction f est différentiable sur Ω .

1. Démontrer que l'arc g défini par

$$g \quad \left| \begin{array}{ll} I & \rightarrow \\ t & \mapsto \end{array} \right. \begin{array}{l} \mathbb{R}^m \\ f(x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{array}$$

est dérivable sur I .

2. Soit $t \in I$. Donner une expression de $g'(t) \in \mathbb{R}^m$ en fonction des dérivées des fonctions $x_1, \dots, x_n$ et des dérivées partielles de la fonction f .

Exercice 2 ★★☆☆☆. [Indication(s)] [Un corrigé]

Titre. Équation aux dérivées partielles d'ordre 1, avec changement de variable donné.

Énoncé.

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Démontrer qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \varphi(x).$$

2. (a) Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Démontrer que l'application

$$f \quad \left| \begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \\ (x, y) & \mapsto \end{array} \right. \begin{array}{l} \mathbb{R} \\ \varphi(x+y) \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et qu'elle vérifie

$$(E) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

(b) Réciproquement, soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que

$$(E) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Démontrer qu'il existe une fonction $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \varphi(x + y).$$

On pourra considérer la fonction $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (u, v) \mapsto f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$.

Exercice 3 ★★☆☆☆. [Indication(s)] [Un corrigé]

Titre. Fonctions homogènes.

Énoncé. Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto f(x, y)$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ fixé. On définit la fonction g par

$$g \quad \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto f(tx, ty) \end{array} \right.$$

Démontrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

2. On suppose que f est homogène, i.e. que

$$\forall (x, y, t) \in \mathbb{R}^3, \quad f(tx, ty) = t f(x, y).$$

- (a) Démontrer que pour tout $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3$

$$f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) y.$$

- (b) En déduire qu'il existe deux réels α et β tels que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \alpha x + \beta y.$$

Exercice 4 ★★☆☆☆. [Indication(s)] [Un corrigé]

Titre. Vrai ou Faux sur les révisions d'algèbre linéaire : sous-espaces vectoriels.

Énoncé. Répondre par Vrai ou Faux aux questions suivantes.

Si la réponse est « Vrai », donner une démonstration du résultat, étayée par des propriétés du cours.

Si la réponse est « Faux », argumenter au moyen d'un contre-exemple.

1. L'ensemble

$$\mathcal{G} := \{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite géométrique} \}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. L'ensemble

$$\mathcal{A} := \{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite arithmétique} \}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

3. Soit H un hyperplan d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E , non nécessairement de dimension finie. Soit u un vecteur de E qui n'appartient pas à H . Alors $\text{Vect}(u) \oplus H = E$.
4. Soient u, v, w trois vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

$$\text{Vect}(u, v) = \text{Vect}(u, w) \implies v = w.$$

5. Soient $u_1, \dots, u_n, u_{n+1}$ des vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . Alors

$$u_{n+1} \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n) \iff \text{Vect}(u_1, \dots, u_n, u_{n+1}) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n).$$

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 1. [Énoncé] [Un corrigé]

1. • Introduire l'arc γ défini par

$$\gamma \quad \left| \begin{array}{l} I \rightarrow \\ t \mapsto \end{array} \right. \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \\ (x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{array}.$$

- Que vaut l'arc $f \circ \gamma$?
- Appliquer le Corollaire 20.38 (dérivée le long d'un arc), en vérifiant ses hypothèses avec soin.

2. Deux approches sont possibles.

(A) À l'aide de la formule livrée par la dérivée le long d'un arc et la Jacobienne de f .

- Le Corollaire 20.38 (dérivée le long d'un arc) livre une formule pour $g'(t)$ en fonction de la différentielle de f et de la dérivée de γ .
- Traduire matriciellement cette formule, en introduisant la base canonique $\mathcal{B}_n$ de $\mathbb{R}^n$ et la base canonique $\mathcal{B}_m$ de $\mathbb{R}^m$.
- Observer qu'une matrice Jacobienne de f apparaît et calculer un produit matriciel.

(B) À l'aide de la règle de la chaîne.

- Justifier que la fonction

$$\gamma \quad \left| \begin{array}{l} I \rightarrow \\ t \mapsto \end{array} \right. \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \\ (x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{array}$$

est différentiable sur I .

- Vérifier que les hypothèses de la règle de la chaîne sont satisfaites, puis l'appliquer pour calculer les dérivées partielles de la fonction

$$g \quad \left| \begin{array}{l} I \rightarrow \\ t \mapsto \end{array} \right. \begin{array}{l} \mathbb{R}^m \\ f(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \left(\underbrace{f_1(x_1(t), \dots, x_n(t))}_{g_1(t_1, \dots, t_n)}, \dots, \underbrace{f_m(x_1(t), \dots, x_n(t))}_{g_m(t_1, \dots, t_n)} \right) \end{array}$$

et en déduire $g'(t) = (g'_1(t), \dots, g'_m(t))$.

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 2. [Énoncé] [Un corrigé]

1. • Démontrer que, si x est un réel fixé, alors la fonction

$$f(x, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y \mapsto f(x, y)$$

est constante, avec des valeurs toutes égales à $f(x, 0)$.

- Démontrer avec soin que la fonction

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x, 0) \end{array} \right.$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. (a) • Écrire f comme la composée de deux applications de classe $\mathcal{C}^1$, en justifiant avec soin le caractère $\mathcal{C}^1$ de chacune.
 • Calculer la différentielle de f grâce à la formule de la différentielle d'une composée d'applications différentiables et en déduire des expressions pour ses dérivées partielles.

- (b) • Introduire l'application

$$\psi \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u, v) & \mapsto & \left(\underbrace{\frac{u+v}{2}}_{\psi_1(u,v)}, \underbrace{\frac{u-v}{2}}_{\psi_2(u,v)} \right) \end{array} \right.$$

et justifier son caractère $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

- Calculer $\frac{\partial g}{\partial v}(u, v)$, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, en appliquant la règle des chaînes après avoir vérifié ses hypothèses avec soin.
 • Appliquer le résultat de la question 1.
 • Considérer le changement de variable inverse à celui soufflé dans l'énoncé.

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 3. [Énoncé] [Un corrigé]

1.
 - Introduire un arc γ tel que $g = f \circ \gamma$.
 - Appliquer le résultat sur la dérivation le long d'un arc, après avoir vérifié soigneusement les hypothèses.
 - Exprimer la différentielle de f à l'aide de ses dérivées partielles.
 - Pour tout $t \in \mathbb{R}$, expliciter $g'(t)$, en fonction de x, y, t et des dérivées partielles de f .
2. (a) À l'aide de la propriété d'homogénéité vérifiée par la fonction f , calculer $g'(t)$ d'une autre manière, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
(b) Spécifier le résultat de la question 2.(a) en un réel t bien choisi.

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 4. [Énoncé] [Un corrigé]

1. La somme des suites $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(3^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle une suite géométrique? Argumenter avec soin.
2. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est arithmétique si et seulement si

$$\exists r \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + n r .$$

Interpréter ce résultat en termes de combinaison linéaire de deux suites.

3.
 - Un hyperplan de E est par définition un sous-espace vectoriel de E qui admet une droite pour supplémentaire.
 - Introduire un vecteur $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $E = H \oplus \text{Vect}(x)$.
 - Décomposer le vecteur u relativement à la décomposition $E = H \oplus \text{Vect}(x)$ de E .
 - Analyser alors si $E \subset H \oplus \text{Vect}(u)$ et $H \cap \text{Vect}(u) \subset \{0_E\}$.
4. Ya-t-il une unique manière de compléter la famille libre $((1, 0))$ en une base de $\mathbb{R}^2$?
5. Une des deux implications est claire. Analyser la seconde en s'appuyant sur la propriété de minimalité d'un sous-espace vectoriel engendré.

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1. [Énoncé] [Indication(s)]

1. • Soit γ l'arc défini par

$$\gamma \quad \left| \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R}^n \\ t \mapsto (x_1(t), \dots, x_n(t)). \end{array} \right.$$

Par hypothèse, pour tout $t \in \Omega$, $\gamma(t) \in \Omega$. Donc l'arc γ est tracé sur Ω . De plus la fonction γ est dérivable sur I , car ses fonctions coordonnées $x_1, \dots, x_n$ le sont (hypothèse H1).

- D'après l'hypothèse H2, la fonction f est différentiable sur Ω .
- Les hypothèses du Corollaire 20.38 (dérivée le long d'un arc) sont vérifiées. En l'appliquant, il vient
(C1) l'arc $f \circ \gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^m$; $t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_n(t))$, qui coïncide avec l'arc g , est dérivable sur I ;
(C2) pour tout $t \in I$

$$(\star) \quad g'(t) = (f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t).$$

2. Nous donnons deux solutions.

(A) À l'aide de la formule livrée par la dérivée le long d'un arc et la Jacobienne de f . Nous notons $\mathcal{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}_m$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$.

- Nous savons que

$$\gamma'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_n(t))$$

et donc les coordonnées de $\gamma'(t)$ dans la base $\mathcal{B}_n$ sont données par

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_n}(\gamma'(t)) = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix}.$$

- D'après la Proposition 20.23 (expression de la différentielle d'une application différentiable via ses dérivées partielles), la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_m}(df(\gamma(t))) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_m}(df(x_1(t), \dots, x_n(t)))$ est donnée par (cf. Jacobienne de f en $\gamma(t)$)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x_1(t), \dots, x_n(t)) & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(x_1(t), \dots, x_n(t)) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(x_1(t), \dots, x_n(t)) & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(x_1(t), \dots, x_n(t)) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(x_1(t), \dots, x_n(t)) & \frac{\partial f_m}{\partial y_2}(x_1(t), \dots, x_n(t)) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_n}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{pmatrix}.$$

- De $(\star)$ on déduit

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_m}(g'(t)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_m}(df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_m}(df(\gamma(t))) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_n}(\gamma'(t)).$$

Ainsi $\text{Mat}_{\mathcal{B}_m}(g'(t))$ égale

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x_1(t), \dots, x_n(t)) & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(x_1(t), \dots, x_n(t)) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(x_1(t), \dots, x_n(t)) & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(x_1(t), \dots, x_n(t)) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(x_1(t), \dots, x_n(t)) & \frac{\partial f_m}{\partial y_2}(x_1(t), \dots, x_n(t)) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_n}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix}$$

En calculant ce produit matriciel, il vient

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_m}(g'(t)) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x'_i(t) \frac{\partial f_1}{\partial y_i}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \sum_{i=1}^n x'_i(t) \frac{\partial f_2}{\partial y_i}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n x'_i(t) \frac{\partial f_m}{\partial y_i}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{pmatrix}.$$

Donc

$$g'(t) = \left(\sum_{i=1}^n x'_i(t) \frac{\partial f_1}{\partial y_i}(x_1(t), \dots, x_n(t)), \sum_{i=1}^n x'_i(t) \frac{\partial f_2}{\partial y_i}(x_1(t), \dots, x_n(t)), \dots, \sum_{i=1}^n x'_i(t) \frac{\partial f_m}{\partial y_i}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \right).$$

(B) À l'aide de la règle de la chaîne.

- L'arc γ défini par

$$\gamma \quad \left| \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R}^n \\ t \mapsto (x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{array} \right.$$

est dérivable sur I . Comme γ est une fonction d'une variable, elle est différentiable sur I . Cf. Proposition 20.21 (Différentiabilité et différentielle de fonctions d'un ouvert de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^m$).

- D'après l'hypothèse H2, la fonction f est différentiable sur Ω .
- Nous pouvons donc appliquer la règle de la chaîne (Proposition 20.40) pour calculer la dérivée de

$$g \quad \left| \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R}^m \\ t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \left(\underbrace{f_1(x_1(t), \dots, x_n(t))}_{g_1(t_1, \dots, t_n)}, \dots, \underbrace{f_m(x_1(t), \dots, x_n(t))}_{g_m(t_1, \dots, t_n)} \right) \end{array} \right.$$

Nous obtenons, pour tout $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$

$$\frac{dg_k}{dt}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial y_i}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \times \frac{dx_i}{dt}(t)$$

i.e.

$$g'_k(t) = \sum_{i=1}^n x'_i(t) \frac{\partial f_k}{\partial y_i}(x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

Comme $g'(t) = (g'_1(t), \dots, g'_m(t))$, il vient

$$g'(t) = \left(\sum_{i=1}^n x'_i(t) \frac{\partial f_1}{\partial y_i}(x_1(t), \dots, x_n(t)), \sum_{i=1}^n x'_i(t) \frac{\partial f_2}{\partial y_i}(x_1(t), \dots, x_n(t)), \dots, \sum_{i=1}^n x'_i(t) \frac{\partial f_m}{\partial y_i}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \right).$$

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2. [Énoncé] [Indication(s)]

1. • Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Comme pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ existe et est nul, la fonction

$$f(x, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y \mapsto f(x, y)$$

est dérivable et de dérivée nulle. Elle est donc constante. Ainsi

$$(\star) \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad f(x, y) = f(x, 0).$$

- L'application

$$i \quad \left| \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto (x, 0) \end{array} \right.$$

est linéaire, donc différentiable sur $\mathbb{R}$, avec une différentielle constante

$$di \quad \left| \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \\ x & \mapsto i. \end{array} \right.$$

Ainsi, l'application i est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

- Par composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, l'application $\varphi := f \circ i$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus, d'après $(\star)$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = f(x, 0) = \varphi(x).$$

2. (a) • L'application

$$s \quad \left| \begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto x + y \end{array} \right.$$

est linéaire donc différentiable sur $\mathbb{R}^2$, avec une différentielle constante

$$ds \quad \left| \begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \\ (x, y) & \mapsto s. \end{array} \right.$$

Ainsi, l'application s est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

- L'application φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Comme il s'agit d'une fonction d'une variable réelle, pour tout $x \in \mathbb{R}$, sa différentielle $d\varphi(x)$ au point x est

$$d\varphi(x) \quad \left| \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto t \varphi'(x). \end{array} \right.$$

- Par composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, l'application $f := \varphi \circ s$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad df(x, y) = d\varphi(x + y) \circ ds(x, y)$$

et donc, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, pour tout $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} df(x, y) \cdot (h_1, h_2) &= d\varphi(x + y) \cdot (ds(x, y) \cdot (h_1, h_2)) \\ &= d\varphi(x + y) \cdot (s \cdot (h_1, h_2)) \\ &= d\varphi(x + y) \cdot (h_1 + h_2) \\ &= \varphi'(x + y) (h_1 + h_2). \end{aligned}$$

- Donc, si on note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) := D_{e_1} f(x, y) = df(x, y) \cdot e_1 = \varphi'(x + y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) := D_{e_2} f(x, y) = df(x, y) \cdot e_2 = \varphi'(x + y).$$

Nous avons donc, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \varphi'(x + y) - \varphi'(x + y) = 0.$$

- (b) • L'application

$$\psi \left| \begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) & \mapsto \left(\underbrace{\frac{u+v}{2}}_{\psi_1(u,v)}, \underbrace{\frac{u-v}{2}}_{\psi_2(u,v)} \right) \end{array} \right.$$

est linéaire, donc différentiable sur $\mathbb{R}^2$, avec une différentielle constante

$$d\psi \left| \begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \\ (x, y) & \mapsto \psi. \end{array} \right.$$

Ainsi, l'application ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

- Par composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, l'application $g = f \circ \psi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
- D'après la règle de la chaîne, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) \times \frac{\partial \psi_1}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) \times \frac{\partial \psi_2}{\partial v}(u, v) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) - \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) \\ &= 0 \quad [f \text{ est solution de (E).}] \end{aligned}$$

- D'après la question 1, il existe une fonction $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$

$$(\star\star) \quad f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) =: g(u, v) = \varphi(u).$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. En appliquant $(\star\star)$ à $u \leftarrow x + y$ et $v \leftarrow x - y$, il vient

$$f(x, y) = \varphi(x + y).$$

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3. [Énoncé] [Indication(s)]

1. • On introduit l'arc γ défini par

$$\gamma \quad \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (tx, ty) \end{array} \right.$$

Comme ses composantes $t \mapsto tx$ et $t \mapsto ty$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, l'arc γ est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\gamma'(t) = (x, y).$$

- Comme la fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}$, les résultats sur la dérivation le long d'un arc s'appliquent. L'application $g = f \circ \gamma$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$g'(t) = df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = df(\gamma(t)) \cdot (x, y).$$

D'après l'expression de la différentielle d'une fonction différentiable via ses dérivées partielles, on en déduit, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) x + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t)) y = \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) y.$$

2. (a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- D'après la question 1, la fonction

$$g \quad \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto f(tx, ty) \end{array} \right.$$

est dérivable et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) y.$$

- Compte tenu de l'hypothèse d'homogénéité vérifiée par la fonction f , on a également

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) = f(x, y).$$

- On en déduit que, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) y.$$

- (b) Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. En appliquant le résultat de la question 2.(a) avec $t \leftarrow 0$, il vient

$$f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) y.$$

Les réels $\alpha := \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\beta := \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ sont indépendants de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Donc

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \alpha x + \beta y.$$

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4. [Énoncé] [Indication(s)]

1.
 - Faux.
 - La suite $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la suite $(3^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites géométriques. Comme

$$\frac{2^1 + 3^1}{2^0 + 3^0} = \frac{5}{2} \neq \frac{13}{5} = \frac{2^2 + 3^2}{2^1 + 3^1}$$

la suite $(2^n)_{n \in \mathbb{N}} + (3^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas géométrique. L'ensemble

$$\mathcal{G} := \{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite géométrique} \}$$

n'est pas stable par somme. Ce n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2.
 - Vrai.
 - Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. D'après le cours sur les suites arithmétiques

$$\begin{aligned} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ est arithmétique} &\iff \exists r \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr \\ &\iff (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Vect}((1)_{n \in \mathbb{N}}, (n)_{n \in \mathbb{N}}). \end{aligned}$$

Donc

$$\mathcal{A} := \{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite arithmétique} \} = \text{Vect}((1)_{n \in \mathbb{N}}, (n)_{n \in \mathbb{N}})$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

3.
 - Vrai.
 - D'après la définition d'un hyperplan de E , H est un sous-espace vectoriel de E qui admet une droite pour supplémentaire. Soit donc $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $\text{Vect}(x) \oplus H = E$.
 - Comme $u \in E = \text{Vect}(x) \oplus H$, il existe $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$u = h + \lambda.x.$$

Comme $u \notin H$, $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$. Ainsi

$$x = -\frac{1}{\lambda}.h + \frac{1}{\lambda}.u.$$

Soit $y \in E$. Comme $E = \text{Vect}(x) \oplus H$, il existe $h' \in H$ et $\beta \in \mathbb{K}$ tel que $y = h' + \beta.x$. On a donc

$$y = h' + \beta.x = h' + \beta.\left(-\frac{1}{\lambda}.h + \frac{1}{\lambda}.u\right) = \underbrace{h' - \frac{\beta}{\lambda}.h}_{\in H} + \frac{\beta}{\lambda}.u \in \text{Vect}(u) \oplus H.$$

Donc $E \subset \text{Vect}(u) \oplus H$. Comme l'inclusion $\text{Vect}(u) \oplus H \subset E$ est claire, on a l'égalité $E = \text{Vect}(u) \oplus H$.

- Soit $y \in \text{Vect}(u) \cap H$. Alors il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $y = \alpha.u \in H$. Si $\alpha \neq 0_{\mathbb{K}}$, on en déduit $u \in H$, ce qui est contraire à l'hypothèse vérifiée par u . Ainsi $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$ et donc $y = 0_E$. Les sous-espaces vectoriels $\text{Vect}(u)$ et H de E sont donc en somme directe.

4.
 - Faux.

- Soient $u = (1, 0)$, $v = (0, 1)$ et $w = (1, 1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On a

$$\text{Vect}(u, v) = \mathbb{R}^2 = \text{Vect}(u, w)$$

mais $v \neq w$.

5. • *Vrai.*

- $\Rightarrow$. Supposons que $u_{n+1} \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$.
Ainsi $u_1, \dots, u_n, u_{n+1}$ appartiennent au sous-espace vectoriel $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ de E . Par minimalité d'un sous-espace engendré

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_n, u_{n+1}) \subset \text{Vect}(u_1, \dots, u_n) .$$

Comme l'inclusion $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n) \subset \text{Vect}(u_1, \dots, u_n, u_{n+1})$ est claire, il vient

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_n, u_{n+1}) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n) .$$

- $\Leftarrow$. Supposons $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n, u_{n+1}) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$.
Alors comme $u_{n+1} \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n, u_{n+1})$, il vient $u_{n+1} \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$.