TD6 – calcul différentiel et révisions

Exercice 1 ★★☆☆☆. **[Indication(s)]** **[Un corrigé]**
Titre. Norme 1 tordue sur $\mathbb{R}^n$.
Énoncé. *Soit $n \geq 2$ un nombre entier.*
Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$.
Démontrer que l'application

$$N_\alpha \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_i \, |x_i| \end{array} \right.$$

est une norme sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $\alpha_i > 0$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Exercice 2 ★★★☆☆. **[Indication(s)]** **[Un corrigé]**
Titre. Différentiabilité, différentielle et lieu de submersion d'une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.
Énoncé. *Soit l'application*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y + z, xyz)\,. \end{array} \right.$$

1. *Démontrer que la fonction f est différentiable en tout point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et écrire sa matrice Jacobienne en (x, y, z).*
2. *On dit que f est une submersion en un point (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ si l'application $df(x, y, z) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ est surjective. On note*

$$U := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; f \text{ est une submersion au point } (x, y, z)\right\}.$$

   (a) *Démontrer que $\mathbb{R}^3 \setminus U$ est la réunion de quatre droites que l'on explicitera.*
   (b) *Démontrer que U est une partie ouverte de $\mathbb{R}^3$.*

Exercice 3 ★★★☆☆. **[Indication(s)]** **[Un corrigé]**
Titre. Fonction de deux variables à dérivées partielles nulles sur un carré.
Énoncé. *Soient*

- *$a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$;*
- *r un réel strictement positif;*
- *$\Omega :=]a_1 - r, a_1 + r[\times]a_2 - r, a_2 + r[\subset \mathbb{R}^2$;*
- *une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$; $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2)$.*

On suppose que

(H1) *pour tout $x \in \Omega$, la fonction f admet une dérivée partielle en x suivant la variable x_1 et suivant la variable x_2 ;*

(H2) *pour tout $x \in \Omega$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x) = 0_{\mathbb{R}}$.*

1. *Démontrer que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.*

2. *Justifier que la fonction f est différentiable sur Ω.*

3. *Calculer la différentielle $df(x)$ de f en tout point x de Ω.*

4. *Démontrer que l'application f est constante sur Ω.*

Exercice 4 ★★★☆☆. [Indication(s)] [Un corrigé]
Titre. Vrai ou Faux sur les équivalents pour les suites numériques.
Énoncé. *Répondre par Vrai ou Faux aux questions suivantes.*
Si la réponse est « Vrai », donner une démonstration du résultat, étayée par des propriétés du cours.
Si la réponse est « Faux », argumenter au moyen d'un contre-exemple.

1. *Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de nombres réels telles que*
$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} c_n \quad \text{et} \quad b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} d_n\,.$$
L'assertion $a_n + b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} c_n + d_n$ est-elle vraie ?

2. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels telles que*
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \quad \text{et} \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\,.$$
L'assertion $\sin(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sin(v_n)$ est-elle vraie ?

3. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.*
L'assertion $\exp(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \exp(v_n)$ est-elle vraie ?

4. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels strictement positifs telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.*
L'assertion $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$ est-elle vraie ?

5. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels. Les deux assertions*
   (a) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$
   (b) $u_n = v_n + \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$

   sont-elles équivalentes ?

6. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels possédant une limite identique dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.*
L'assertion $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ est-elle vraie ?

7. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.*
L'assertion $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ est-elle vraie ?

8. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels telles que $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.*
L'assertion $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ est-elle vraie ?

9. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Les deux assertions*
   (a) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$
   (b) *la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle nulle à partir d'un certain rang*

   sont-elles équivalentes ?

10. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de nombres réels telles que* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
L'assertion $(u_n)^{2020} \underset{n\to+\infty}{\sim} (v_n)^{2020}$ *est-elle vraie ?*

11. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de nombres réels telles que* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
L'assertion $(u_n)^{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} (v_n)^{n}$ *est-elle vraie ?*

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 1. [Énoncé] [Un corrigé]

$\Longrightarrow$. *Si $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, que vaut $N_\alpha(e_i)$?*

$\Longleftarrow$. *Sous l'hypothèse $\alpha_1 > 0, \ldots, \alpha_n > 0$ démontrer*

- *pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $N_\alpha(x) \geq 0$;*
- *pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, si $N_\alpha(x) = 0$ alors $x = 0_{\mathbb{R}^n}$;*
- *pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $N_\alpha(\lambda x) = |\lambda|\, N_\alpha(x)$;*
- *pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, $N_\alpha(x + y) \leq N_\alpha(x) + N_\alpha(y)$;*

en mettant en valeurs les moments de la rédaction où l'hypothèse sur les signes de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ est utile.

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 2. [Énoncé] [Un corrigé]

1.
   - *Introduire les fonctions coordonnées de* f

$$f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,;\ (x,y,z) \mapsto x+y+z \qquad \text{et} \qquad f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,;\ (x,y,z) \mapsto xyz$$

     puis justifier l'existence de

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z)\,,\ \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z)\,,\ \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z)\,,\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z)\,,\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z)\,,\ \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z)$$

     en tout point $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ *et expliciter ces six dérivées partielles.*
   - *Appliquer le critère* $\mathscr{C}^1$, *arpès avoir vérifié ses hypothèses avec le plus grand soin.*

2. (a)
   - *Justifier, avec soin, que* $\mathbb{R}^3 \setminus U$ *est l'ensemble des points* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ *tels que*

$$\operatorname{Rg}\left(Mat_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_2}(\,df(x,y,z))\right) = 1\,.$$

   - *La matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ *est de rang 1 si et seulement si* $\alpha = \beta = \gamma$.
   - *Remarquer par exemple que, pour tout* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $(yz = xz) \iff ((z=0)\ ou\ (x=y))$.
   - *L'intersection est distributive par rapport à la réunion.*

   (b)
   - *Une partie est ouverte si et seulement si son complémentaire est fermé.*
   - *Quelle propriété topologique possède un sous-espace vectoriel de dimension finie ?*

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 3. [Énoncé] [Un corrigé]

1. *La partie* Ω *de* $\mathbb{R}^2$ *ne serait-elle pas une boule ouverte, pour une norme à définir sur* $\mathbb{R}^2$ *?*

2. *Appliquer le critère* $\mathscr{C}^1$*, après avoir vérifié ses hypothèses.*

3. *Cf. expression de la différentielle d'une fonction différentiable via ses dérivées partielles (Proposition 20.23).*

4. - *Fixer* $(b_1, b_2) \in \Omega =]\,a_1 - r, a_1 + r\,[\times]\,a_2 - r, a_2 + r\,[$*, puis remarquer que* $(b_1, a_2) \in \Omega$ *et que*

   $$f(b_1, b_2) - f(a_1, a_2) = f(b_1, b_2) - f(b_1, a_2) + f(b_1, a_2) - f(a_1, a_2) \ .$$

   - *Exprimer sous forme d'intégrales le second membre de la précédente identité.*

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 4. [Énoncé] [Un corrigé]

On rappelle que, par définition, deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels sont équivalentes s'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $(\alpha_n)_{n\geq N}$ une suite convergeant vers 1 tels que

$$\forall\, n \geq N, \quad u_n = \alpha_n\, v_n \ .$$

1. *On peut par exemple remarquer que* $n+2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n+1$ *et proposer une suite* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de nombres réels telle que* $n+2+b_n \underset{n\to+\infty}{\not\sim} n+1+b_n$.
2.
   - *Quelle est le comportement asymptotique de la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *?*
   - *Utiliser un équivalent de* $\sin(x)$ *lorsque* x *tend vers* 0 *et en déduire des équivalents des suites* $(\sin(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(\sin(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$.
   - *La relation* $\sim$ *est une relation d'équivalence sur les suites numériques.*
3. *Par exemple, on peut commencer par considérer la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_n = n$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
4. *Considérer par exemple deux suites qui convergent vers* 1, *mais avec des vitesses de convergence différentes.*
5.
   - *Analyser la définition de deux suites équivalentes rappelée au début et celle de o, rappelée ci-après.*
   - *Soient* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de nombres réels. On écrit* $a_n = \underset{n\to+\infty}{o}(b_n)$ *s'il existe* $N \in \mathbb{N}$ *et* $(\varepsilon_n)_{n\geq N}$ *une suite convergeant vers 0 tels que*

   $$\forall\, n \geq N, \quad a_n = \varepsilon_n\, b_n \ .$$

6. *Considérer par exemple deux suites qui convergent vers* 0, *mais avec des vitesses de convergence différentes.*
7. *Par exemple, on peut commencer par considérer la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_n = n$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
8. *Considérer par exemple deux suites qui convergent vers* 0, *mais avec des vitesses de convergence différentes.*
9.
   - *Analyser la définition de deux suites équivalentes rappelée au début et celle de suite nulle à partir d'un certain rang, rappelée ci-après.*
   - *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels. On dit que la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est nulle à partir d'un certain rang s'il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que*

   $$\forall\, n \geq N, \quad u_n = 0\,.$$

10. *Écrire la définition de* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ *et utiliser la continuité de la la fonction* $x \mapsto x^{2020}$ *en 1.*
11. *Si une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de nombre réels converge vers 1, la suite* $((u_n)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge-t-elle nécessairement vers 1 ? Par exemple, quel est le comportement asymptotique de la suite* $\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *?*

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1. **[Énoncé]** **[Indication(s)]**

Notons $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^n$.

$\Longrightarrow$. *Supposons que l'application*

$$N_\alpha \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_i \, |x_i| \end{array} \right.$$

est une norme sur $\mathbb{R}^n$. *Alors pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$

$$\alpha_i = N_\alpha(e_i) > 0.$$

Le résultat est démontré.

$\Longleftarrow$. *Supposons que, pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_i > 0$.

- *Pour tout* $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
$$N_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\alpha_i}_{>0} \underbrace{|x_i|}_{\geq 0} \geq 0\,.$$
- *Soit* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *tel que*
$$N_\alpha(x) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\alpha_i}_{>0} \underbrace{|x_i|}_{\geq 0} = 0\,.$$
Si une somme de nombres positifs ou nuls est nulle, alors tous les termes de la somme sont nuls. Donc, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$
$$\underbrace{\alpha_i}_{\neq 0} |x_i|$$
et ainsi, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = 0$. *Donc* $x = 0_{\mathbb{R}^n}$.
L'application N_α *vérifie la propriété de séparation de la norme.*
- *Soit* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$.
$$N_\alpha(\lambda.x) = N_\alpha(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_i \, |\lambda x_i| = \sum_{k=1}^{n} \alpha_i \, |\lambda| \; |x_i| = |\lambda| \sum_{k=1}^{n} \alpha_i \, |x_i| = |\lambda| \; N_\alpha(x)\,.$$
L'application N_α *vérifie la propriété d'homogénétié de la norme.*
- *Soient* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *et* $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.
$$\begin{array}{rcll} N_\alpha(x+y) & = & N_\alpha(x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n) & \\ & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_i \left| x_i + y_i \right| & \\ & \leq & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_i \, |x_i| \, + \alpha_i \left| y_i \right| \right) & \left[\textit{inégalité triangulaire pour } |\cdot| \textit{ et } \alpha_1 > 0, \ldots, \alpha_n > 0 \right] \\ & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_i \, |x_i| + \sum_{k=1}^{n} \alpha_i \left| y_i \right| & \\ & = & N_\alpha(x) + N_\alpha(y) & \end{array}$$
L'application N_α *vérifie l'inégalité triangulaire.*

Un corrigé de l'exercice 2. [Énoncé] [Indication(s)]

1.

- **Introduction des fonctions coordonnées.**
  Si on pose
  $$f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \,;\, (x,y,z) \mapsto x+y+z \qquad \text{et} \qquad f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \,;\, (x,y,z) \mapsto xyz$$
  alors pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z))$.

- **Étude de la dérivée partielle $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}$.**
  Soient $y,z \in \mathbb{R}$ *fixés. L'application*
  $$f_1(\cdot,y,z) : x \mapsto f_1(x,y,z) = x+y+z$$
  est une fonction affine, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. *La dérivée partielle de* f_1 *par rapport à* x *existe donc sur* $\mathbb{R}^3$ *tout entier et elle est donnée par*
  $$\frac{\partial f_1}{\partial x} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \,;\, (x,y,z) \mapsto 1$$
  qui est continue sur $\mathbb{R}^3$.

- **Étude de la dérivée partielle $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}$.**
  Soient $x,z \in \mathbb{R}$ *fixés. L'application*
  $$f_1(x,\cdot,z) : y \mapsto f_1(x,y,z) = x+y+z$$
  est une fonction affine, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. *La dérivée partielle de* f_1 *par rapport à* y *existe donc sur* $\mathbb{R}^3$ *tout entier et elle est donnée par*
  $$\frac{\partial f_1}{\partial y} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \,;\, (x,y,z) \mapsto 1$$
  qui est continue sur $\mathbb{R}^3$.

- **Étude de la dérivée partielle $\dfrac{\partial f_1}{\partial z}$.**
  Soient $x,y \in \mathbb{R}$ *fixés. L'application*
  $$f_1(x,y,\cdot) : z \mapsto f_1(x,y,z) = x+y+z$$
  est une fonction affine, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. *La dérivée partielle de* f_1 *par rapport à* z *existe donc sur* $\mathbb{R}^3$ *tout entier et elle est donnée par*
  $$\frac{\partial f_1}{\partial z} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \,;\, (x,y,z) \mapsto 1$$
  qui est continue sur $\mathbb{R}^3$.

- **Étude de la dérivée partielle $\dfrac{\partial f_2}{\partial x}$.**
  Soient $y,z \in \mathbb{R}$ *fixés. L'application*
  $$f_2(\cdot,y,z) : x \mapsto f_2(x,y,z) = xyz$$
  est une fonction affine, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. *La dérivée partielle de* f_2 *par rapport à* x *existe donc sur* $\mathbb{R}^3$ *tout entier et elle est donnée par*
  $$\frac{\partial f_2}{\partial x} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \,;\, (x,y,z) \mapsto yz$$
  qui est continue sur $\mathbb{R}^3$.

- **Étude de la dérivée partielle $\frac{\partial f_2}{\partial y}$.**
Soient $x, z \in \mathbb{R}$ fixés. L'application

$$f_2(x,\cdot,z) : \ y \longmapsto f_2(x,y,z) = xyz$$

est une fonction affine, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. La dérivée partielle de f_2 par rapport à y existe donc sur $\mathbb{R}^3$ tout entier et elle est donnée par

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \,;\ (x,y,z) \longmapsto xz$$

qui est continue sur $\mathbb{R}^3$.

- **Étude de la dérivée partielle $\frac{\partial f_2}{\partial z}$.**
Soient $x, y \in \mathbb{R}$ fixés. L'application

$$f_2(x,y,\cdot) : \ y \longmapsto f_2(x,y,z) = xyz$$

est une fonction affine, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. La dérivée partielle de f_2 par rapport à z existe donc sur $\mathbb{R}^3$ tout entier et elle est donnée par

$$\frac{\partial f_2}{\partial z} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \,;\ (x,y,z) \longmapsto xy$$

qui est continue sur $\mathbb{R}^3$.

- *D'après le critère $\mathscr{C}^1$, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$, donc différentiable sur $\mathbb{R}^3$ et pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$*

$$Mat_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_2}(\,df(x,y,z)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

où $\mathscr{B}_3$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}_2$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Ainsi pour tout $(h_1,h_2,h_3) \in \mathbb{R}^3$

$$df(x,y,z)\cdot(h_1,h_2,h_3) = \left(h_1+h_2+h_3\ ,\ yz\,h_1 + xz\,h_2 + xy\,h_3\right)\ .$$

2. (a) *Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.*

$$\begin{aligned} df(x,y,z) \text{ n'est pas surjective} &\iff \operatorname{Rg}\big(\,df(x,y,z)\big) < 2 \\ &\iff \operatorname{Rg}\big(Mat_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_2}(\,df(x,y,z))\big) < 2 \\ &\iff \operatorname{Rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}\right) < 2 \\ &\iff \operatorname{Rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}\right) = 1 \quad [\text{le rang ne peut être nul ici}] \\ &\iff yz = xz = xy\,. \end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{R}^3 \setminus U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ yz = xz \ \text{ et } \ xz = xy\right\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ yz = xz\right\} \bigcap \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ xz = xy\right\}$$

Comme pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

$$(yz = xz) \iff ((z=0)\ \mathit{ou}\ (x=y)) \qquad \mathit{et} \qquad (xz = xy) \iff ((x=0)\ \mathit{ou}\ (y=z))$$

il vient

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^3 \setminus U &= \left(\underbrace{\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ z=0\right\}}_{P_1} \cup \underbrace{\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ x=y\right\}}_{P_2} \right) \\
&\quad \bigcap \left(\underbrace{\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ x=0\right\}}_{P_3} \cup \underbrace{\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ y=z\right\}}_{P_4} \right) \\
&= (P_1 \bigcap P_3) \bigcup (P_1 \bigcap P_4) \bigcup (P_2 \bigcap P_3) \bigcup (P_2 \bigcap P_4)\,.
\end{aligned}$$

On observe

$$\begin{aligned}
P_1 \bigcap P_3 &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ z=0 \ \ \mathit{et} \ \ x=0\right\} = \mathrm{Vect}\,((0,1,0)) \\
P_1 \bigcap P_4 &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ z=0 \ \ \mathit{et} \ \ y=z\right\} = \mathrm{Vect}\,((1,0,0)) \\
P_2 \bigcap P_3 &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ x=y \ \ \mathit{et} \ \ x=0\right\} = \mathrm{Vect}\,((0,0,1)) \\
P_2 \bigcap P_4 &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ x=y \ \ \mathit{et} \ \ y=z\right\} = \mathrm{Vect}\,((1,1,1))
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{R}^3 \setminus U = \mathrm{Vect}\,((0,1,0)) \bigcup \mathrm{Vect}\,((1,0,0)) \bigcup \mathrm{Vect}\,((0,0,1)) \bigcup \mathrm{Vect}\,((1,1,1))\ .$$

(b) *Comme un sous-espace de dimension finie est fermé, les sous-espaces vectoriels* $\mathrm{Vect}\,((0,1,0))$, $\mathrm{Vect}\,((1,0,0))$, $\mathrm{Vect}\,((0,0,1))$ *et* $\mathrm{Vect}\,((1,1,1))$ *sont fermés dans* $\mathbb{R}^3$. *L'ensemble* $\mathbb{R}^3 \setminus U$ *est donc fermé dans* $\mathbb{R}^3$, *comme réunion d'un nombre fini de parties fermées de* $\mathbb{R}^3$. *On en déduit que* U *est une partie ouverte de* $\mathbb{R}^3$.

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3. [Énoncé] [Indication(s)]

1. *Si on introduit la norme infinie sur* $\mathbb{R}^2$

$$\|\cdot\|_\infty \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}_+ \\ (x_1, x_2) & \mapsto & \max(|x_1|, |x_2|) \end{array} \right.$$

alors

$$\begin{array}{rcl} \Omega & := &]\,a_1 - r, a_1 + r\,[\times]\,a_2 - r, a_2 + r\,[\\ & = & \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x_1 - a_1| < r \text{ et } |x_2 - a_2| < r\right\} \\ & = & \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \|(x_1, x_2) - (a_1, a_2)\|_\infty < r\right\} \\ & = & B_{\|\cdot\|_\infty}((a_1, a_2), r)\,. \end{array}$$

Comme une boule ouverte est un ouvert, la partie Ω *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$.

2. *La fonction* f *admet des dérivées partielles suivant les variables* x_1 *et* x_2*, en tout point de* Ω*, et les fonctions*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x) = 0 \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x) = 0 \end{array} \right.$$

sont clairement continues sur Ω. *D'après le critère* $\mathscr{C}^1$, *la fonction* f *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* Ω, *en particulier différentiable sur* Ω.

3. *D'après le cours (Proposition 20.23), pour tout* $x \in \Omega$, *pour tout* $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$

$$df(x) \cdot (h_1, h_2) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = 0\,.$$

Donc $df(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

4. *Soit* $(b_1, b_2) \in \Omega =]\,a_1 - r, a_1 + r\,[\times]\,a_2 - r, a_2 + r\,[$. *On observe que le point* $(b_1, a_2) \in \Omega$. *Comme les dérivées partielles de* f *existent et sont continues en tout point de* Ω, *le Théorème fondamental de l'analyse livre*

$$\begin{array}{rcl} f(b_1, b_2) - f(a_1, a_2) & = & f(b_1, b_2) - f(b_1, a_2) + f(b_1, a_2) - f(a_1, a_2) \\ & = & \displaystyle\int_{a_2}^{b_2} \frac{\partial f}{\partial x_2}(b_1, x_2)\, dx_2 + \int_{a_1}^{b_1} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, a_2)\, dx_1 \\ & = & 0\,. \end{array}$$

La fonction f *est donc constante sur* Ω.

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4. [Énoncé] [Indication(s)]

1. • *Faux.*
   • *On a les équivalences suivantes*

$$n+2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n+1 \quad \text{et} \quad -n \underset{n\to+\infty}{\sim} -n$$

   mais les suites constantes 2 *et* 1 *ne sont pas équivalentes.*

2. • *Vrai.*
   • *Comme* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ *et* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, *nous savons* $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   Comme $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, *nous en déduisons*

$$\sin(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \quad \text{et} \quad \sin(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n\,.$$

   La relation $\sim$ *étant une relation d'équivalence sur les suites numériques, il vient* $\sin(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sin(v_n)$.

3. • *Faux.*
   • *On a l'équivalence*

$$n \underset{n\to+\infty}{\sim} n+1$$

   mais les suites $(\exp(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(\exp(n+1))_{n\in\mathbb{N}} = \big(e\,\exp(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne sont pas équivalentes.*

4. • *Faux.*
   • *On a l'équivalence*

$$1+\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1+\frac{1}{n^2}\,.$$

   Comme $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, *nous en déduisons*

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}\,.$$

   Comme les suites $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *ne sont pas équivalentes, les suites*

$$\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \quad \text{et} \quad \left(\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

   ne sont pas équivalentes.

5. • *Vrai.*
   • *(a)* $\Longrightarrow$ *(b). Supposons* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. *Alors il existe* $N_1 \in \mathbb{N}$ *et* $(\alpha_n)_{n\geq N_1}$ *une suite convergeant vers 1 tels que*

$$\forall\, n \geq N_1, \quad u_n = \alpha_n\, v_n \;.$$

   On a donc

$$\forall\, n \geq N_1, \quad u_n = v_n + (1-\alpha_n) v_n\,.$$

   Comme $1-\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $u_n = v_n + \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$.

- *(b) $\Longrightarrow$ (a). Supposons $u_n = v_n + \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$. Alors il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ et $(\varepsilon_n)_{n\geq N_2}$ une suite convergeant vers 0 tels que*

$$\forall\, n \geq N_2, \quad u_n - v_n = \varepsilon_n\, v_n\ .$$

  On a donc

$$\forall\, n \geq N_2, \quad u_n = (1+\varepsilon_n)\, v_n\, .$$

  Comme $1+\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

6. - *Faux.*
   - *Les suites $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent toutes les deux vers 0, mais elles ne sont pas équivalentes.*

7. - *Faux.*
   - *On a l'équivalence*

$$n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$$

   mais la suite $n+1-n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \neq 0$.

8. - *Faux.*
   - *On*

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

   mais les suites $\dfrac{1}{n^2}$ et $\dfrac{1}{n}$ de sont pas équivalentes au voisinage de $+\infty$.

9. - *Vrai.*
   - *(a) $\Longrightarrow$ (b). Supposons $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ et $(\alpha_n)_{n\geq N}$ une suite convergeant vers 1 tels que*

$$\forall\, n \geq N, \quad u_n = \alpha_n \times 0\ = 0\, .$$

   Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a tous ses termes nuls à partir du rang N.
   - *(b) $\Longrightarrow$ (a). Supposons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nulle à partir d'un certain rang. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\forall\, n \geq N, \quad u_n = 0\, .$$

   Si on pose $\alpha_n = 1$, pour tout $n \geq N$, on définit une suite $(\alpha_n)_{n\geq N}$ convergeant vers 1 telle que

$$\forall\, n \geq N, \quad u_n = \alpha_n \times 0\, .$$

   Ainsi $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$, par définition.

10. - *Vrai.*
    - *Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $(\alpha_n)_{n\geq N}$ une suite convergeant vers 1 tels que*

$$\forall\, n \geq N, \quad u_n = \alpha_n\, v_n$$

    et donc

$$\forall\, n \geq N, \quad (u_n)^{2020} = (\alpha_n)^{2020}\, (v_n)^{2020}\ .$$

    La fonction $x \mapsto x^{2020}$ est continue en 1 donc

$$(\alpha_n)^{2020} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1\ .$$

    On en déduit que $(u_n)^{2020} \underset{n\to+\infty}{\sim} (v_n)^{2020}$.

11.
- *Faux.*
- *Les suites* $\left(1+\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $\left(1+\frac{2}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *sont équivalentes.*

  . *Comme* $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$*, nous en déduisons*

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

et donc

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 \neq 0$$

i.e.

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1\,.$$

Par continuité de la fonction exponentielle

$$\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e\,.$$

  . *De manière analogue, on établit*

$$\left(\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^2\,.$$

Les suites

$$\left(\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^n\right)_{n\in N^*} \quad et \quad \left(\left(\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right)^n\right)_{n\in N^*}$$

ne sont donc pas équivalentes.