TD5 – calcul différentiel et révisions

Exercice 1 ★★☆☆☆. [Indication(s)] [Un corrigé]
Titre. Différentiabilité et différentielle pour d'une fonction de deux variables.
Énoncé. *Soit la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*

$$f(x, y) = \sin(x^2 - y^2) .$$

Démontrer que la fonction f est différentiable en tout vecteur $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et écrire sa matrice Jacobienne en (x, y).

Exercice 2 ★★☆☆☆. [Indication(s)] [Un corrigé]
Titre. Différentiabilité et différentielle d'un produit scalaire tordu.
Énoncé. *Soient*

- $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un espace euclidien ;*
- u *un endomorphisme de* E *;*
- $a \in E$.

Démontrer que l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \langle u(x), x \rangle \end{array} \right.$$

est différentiable en a et calculer sa différentielle en a.

Exercice 3 ★★★★☆. [Indication(s)] [Un corrigé]
Titre. Différentiabilité et différentielle du passage à l'inverse dans $GL_n(\mathbb{R})$.
Énoncé. *Soit $n \geq 2$ un entier.*
On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme d'algèbre unitaire, par exemple de la norme $\|\cdot\|$ définie par

$$\forall\, M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \|M\| := \max_{1\leq j\leq n} \left(\sum_{i=1}^{n} \left| [M]_{i,j} \right| \right).$$

On définit l'application f par

$$f \left| \begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A^{-1} . \end{array} \right.$$

1. *Démontrer que pour tout $H \in \mathscr{B}(0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}, 1)$, la série $\sum_{p\geq 0} (-1)^p H^p$ converge et calculer le produit*

$$(I_n + H) \left(\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p H^p \right)$$

en justifiant, avec le plus grand soin, les échanges éventuels entre $\sum_{p=0}^{+\infty}$ et produit matriciel.

2. *Justifier, avec le plus grand soin*

$$\sum_{p=2}^{+\infty} (-1)^p H^p \underset{H\to 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}}{=} o(\|H\|) .$$

3. *Démontrer que l'application f est différentiable en I_n et que pour tout $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$*

$$df(I_n)\cdot H = -H\,.$$

4. *Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$.*

   (a) *Justifier que pour tout $H \in \mathscr{B}\left(0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}, \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}\right)$, $(I_n + A^{-1}H)$ est inversible et exprimer son inverse comme une somme de série matricielle convergente.*

   (b) *Démontrer que f est différentiable en A et que pour tout $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$*

$$df(A)\cdot H = -A^{-1}\,H\,A^{-1}\,.$$

Exercice 4 ★★★☆☆. **[Indication(s)]** **[Un corrigé]**

Titre. Vrai ou Faux sur les suites et séries de fonctions I : modes de convergence.

Énoncé. *Répondre par Vrai ou Faux aux questions suivantes.*

Si la réponse est « Vrai », citer un résultat du Chapitre 11 « Suites et séries de fonctions » pour justifier.

Si la réponse est « Faux », argumenter au moyen d'un contre-exemple.

1. *Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $f_n \colon x \mapsto x^n$, alors la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ est normalement convergente sur tout segment de* $]-1,1[$.

2. *Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $f_n \colon x \mapsto x^n$, alors la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ est normalement convergente sur* $]-1,1[$.

3. *Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $f_n \colon x \mapsto \dfrac{(-1)^n\,x^n}{n}$, alors la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ est uniformément convergente sur* $[0,1]$.

4. *Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $f_n \colon x \mapsto e^{-nx^2}$, alors la suite de fonctions $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.*

5. *Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $f_n \colon x \mapsto e^{-nx^2}$, alors la suite de fonctions $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur* $]0,+\infty[$.

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 1. [Énoncé] [Un corrigé]

- *Fixer* $y \in \mathbb{R}$*, justifier la dérivabilité de la fonction d'une variable réelle*

$$f(\cdot, y) : x \longmapsto f(x, y)$$

puis calculer sa dérivée qui est, par définition, la première dérivée partielle de la fonction f *notée* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

- *Fixer* $x \in \mathbb{R}$*, justifier la dérivabilité de la fonction d'une variable réelle*

$$f(x, \cdot) : y \longmapsto f(x, y)$$

puis calculer sa dérivée qui est, par définition, la deuxième dérivée partielle de la fonction f *notée* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

- *Appliquer le critère* $\mathscr{C}^1$*, après avoir vérifié ses hypothèses, avec le plus grand soin.*

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 2. [Énoncé] [Un corrigé]

- *Pour $h \in E$, développer $f(a+h)$.*
- *Dans le développement, faire apparaitre $f(a)$, une expression linéaire en h et un reste.*
- *Démontrer, avec le plus grand soin, que le reste est un $\underset{h \to 0_E}{o}(\|h\|)$.*

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 3. [Énoncé] [Un corrigé]

1.
   - *Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toute série absolument convergente est convergente.*
   - *Pour* $H \in \mathscr{B}(0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}, 1)$*, calculer, pour tout* $q \in \mathbb{N}$, $(I_n + H) \times \left(\sum_{p=0}^{q} (-1)^q H^p \right)$*, puis rédiger un passage à la limite soigné, en faisant tendre* q *vers* $+\infty$*, avec un argument de continuité à mettre en valeur.*

2.
   - *Pour* $H \in \mathscr{B}(0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}, 1)$ *et* $q \in \mathbb{N}_{\geq 2}$*, justifier*

$$\left\| \sum_{p=2}^{q} (-1)^p H^p \right\| \leq \sum_{p=2}^{q} \|H\|^p$$

   puis faire tendre q *vers* $+\infty$ *en donnant les argument nécessaires pour ce passage à la limite.*
   - *Utiliser la valeur de la somme d'une série géométrique numérique convergente.*
   - *Théorème d'encadrement.*

3. *Calculer* $f(I_n + H)$ *pour* $H \in \mathscr{B}(0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}, 1)$*, à l'aide de ce qui précède, en faisant apparaître un* $f(I_n)$*, une expression linéaire en* H *et un* $\underset{H \to 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}}{o}(\|H\|)$*, pour conclure.*

4. (a) *Justifier que les résultats de la question 1 peuvent être spécialisés à* $H \leftarrow A^{-1}H$ *et en déduire le résultat demandé.*

   (b)
   - *Pour* $H \in \mathscr{B}\left(0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}, \frac{1}{\|A^{-)1}\|}\right)$*, la matrice* $(I_n + A^{-1}H)$ *est inversible d'après le question 4.(a).*
   - *En déduire que la matrice*

$$(\star) \qquad A + H = A\,(I_n + A^{-1}H)$$

   est également inversible.
   - *À l'aide de* $(\star)$ *et de la question 4.(a), développer* $f(A+H)$ *pour obtenir*

$$f(A+H) = f(A) + \textit{ expression linéaire en } H + \textit{ reste en } H$$

   - *Démontrer, avec le plus grand soin, en s'aidant notamment de la question 2 dont le résultat peut être spécialisés à* $H \leftarrow A^{-1}H$*, que*

$$\textit{reste en } H = \underset{H \to 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}}{o}(\|H\|)\,.$$

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 4. [Énoncé] [Un corrigé]

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $a \in]0,1[$, étudier les variations de la fonction f_n sur $[-a,a]$ pour déterminer son sup (qui est un max) sur ce segment.*

2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, étudier les variations de la fonction f_n sur $]-1,1[$ pour déterminer son sup sur cet intervalle.*

3. *Critère spécial des séries alternées : convergence et majoration du reste en valeur absolue.*

4. *Si $x \in \mathbb{R}$ est fixé, étudier la suite numérique $(e^{-nx^2})_{n\in\mathbb{N}}$, en distinguant plusieurs cas.*

5. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, étudier les variations de la fonction f_n sur $]0,+\infty[$ pour déterminer son sup sur cet intervalle.*

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1. [Énoncé] [Indication(s)]

- **Étude de la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$.**
  Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. L'application
  $$f(\cdot, y): x \mapsto f(x, y) = \sin(x^2 - y^2)$$
  est la composée d'une fonction polynomiale par sin*, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. La dérivée partielle de f par rapport à x existe donc sur $\mathbb{R}^2$ tout entier et elle est donnée par*
  $$\frac{\partial f}{\partial x}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,;\ (x, y) \mapsto 2x\cos(x^2 - y^2)$$
  est continue sur $\mathbb{R}^2$.

- **Étude de la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$.**
  Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. L'application
  $$f(x, \cdot): y \mapsto f(x, y) = \sin(x^2 - y^2)$$
  est la composée d'une fonction polynomiale par sin*, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. La dérivée partielle de f par rapport à y existe donc sur $\mathbb{R}^2$ tout entier et elle est donnée par*
  $$\frac{\partial f}{\partial y}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,;\ (x, y) \mapsto -2y\cos(x^2 - y^2)$$
  est continue sur $\mathbb{R}^2$.

- **Conclusion.**
  D'après le critère $\mathscr{C}^1$, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, donc différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sa matrice Jacobienne en (x, y) est
  $$\begin{pmatrix} 2x\cos(x^2 - y^2) & -2y\cos(x^2 - y^2) \end{pmatrix}$$

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2. [Énoncé] [Indication(s)]

Soit $h \in E$.

$$\begin{array}{rcl} f(a+h) & = & \langle u(a+h), a+h \rangle \\ & = & \langle u(a)+u(h), a+h \rangle \quad [u \text{ est linéaire}] \\ & = & \underbrace{\langle u(a), a \rangle}_{f(a)} + \underbrace{\langle u(h), a \rangle + \langle u(a), h \rangle}_{\text{linéaire en } h} + \langle u(h), h \rangle \quad \left[\text{bilinéarité du produit scalaire}\right] \end{array}$$

Si l'on prouve

$$(\star) \qquad \langle u(h), h \rangle = \underset{h \to 0_E}{o}(\|h\|)$$

alors nous aurons le DL1 de f en a suivant

$$f(a+h) = f(a) + \underbrace{\langle u(h), a \rangle + \langle u(a), h \rangle}_{\text{linéaire en } h} + \underset{h \to 0_E}{o}(\|h\|)$$

et nous pourrons conclure à la différentiabilité de f en a et affirmer que $df(a)$ est donnée par

$$df(a) \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ h & \mapsto & \langle u(h), a \rangle + \langle u(a), h \rangle . \end{array} \right.$$

Démontrons $(\star)$. L'application u est un endomorphisme de E, qui est un espace vectoriel de dimension finie. Il existe donc $C > 0$ tel que

$$(\star\star) \qquad \forall\, x \in E, \quad \|u(x)\| \leq C\,\|x\| \ .$$

Soit $h \in E$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et $(\star\star)$

$$0 \leq |\langle u(h), h \rangle| \leq \|u(h)\|\ \|h\| \leq C\,\|h\|^2 \ .$$

Par Théorème d'encadrement

$$\langle u(h), h \rangle = \underset{h \to 0_E}{o}(\|h\|)$$

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3. [Énoncé] [Indication(s)]

1. *Soit $H \in \mathscr{B}(0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}, 1)$.*

   - *Au moyen d'un raisonnement par récurrence et de la propriété d'homogénéité de la norme $\|\cdot\|$, on démontre que*
   $$\forall\ p \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \left\|(-1)^p\, H^p\right\| \leq \|H\|^p\ .$$
   D'après le cours sur les séries géométriques, comme $\|H\| < 1$, la série $\sum_{p\geq 0} \|H\|^p$ converge.
   Par théorème de domination sur les séries à termes réels positifs, la série numérique $\sum_{p\geq 0} \left\|(-1)^p\, H^p\right\|$ converge, i.e. la série matricielle $\sum_{p\geq 0} (-1)^p\, H^p$ est absolument convergente.
   Comme $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie, on en déduit que la série matricielle $\sum_{p\geq 0} (-1)^p\, H^p$ converge dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   - *Pour tout $q \in \mathbb{N}$*
   $$(\star) \quad (I_n + H) \times \left(\sum_{p=0}^{q} (-1)^p\, H^p\right) = I_n + (-1)^{q+1} H^{q+1} \quad \left[\textit{somme télescopique}\right]$$
   - *Pour tout $q \in \mathbb{N}$*
   $$0 \leq \left\|(-1)^{q+1}\, H^{q+1}\right\| \leq \|H\|^{q+1}\ .$$
   Comme $\|H\| < 1$, $\|H\|^{q+1} \xrightarrow[q\to+\infty]{} 0$. Par Théorème d'encadrement, $\left\|(-1)^{q+1}\, H^{q+1}\right\| \xrightarrow[q\to+\infty]{} 0$, i.e;
   $$(\star\star) \qquad (-1)^{q+1}\, H^{q+1} \xrightarrow[q\to+\infty]{} 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}\ .$$
   - *L'application*
   $$\mu \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & (I_n + H)M \end{array} \right.$$
   est linéaire. Comme $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie, l'application μ est continue et donc
   $$(\star\star\star) \quad (I_n{+}H){\times}\left(\sum_{p=0}^{q} (-1)\, H^p\right) = \mu\left(\sum_{p=0}^{q} (-1)^p\, H^p\right) \xrightarrow[q\to+\infty]{} \mu\left(\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p\, H^p\right) = (I_n{+}H){\times}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p\, H^p\right).$$
   - *De $(\star)$, $(\star)$ et $(\star\star\star)$, nous déduisons, en faisant tendre q vers $+\infty$, que*
   $$(I_n + H) \times \left(\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p\, H^p\right) = I_n\ .$$
   La matrice $I_n + H$ est donc inversible, d'inverse $\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p\, H^p$.

2. *Soit $H \in \mathscr{B}(0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}, 1)$. Soit $q \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. D'après l'inégalité triangulaire, l'homogénéité de la norme $\|\cdot\|$ et le fait que la norme $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre unitaire*
$$(\star) \qquad \left\|\sum_{p=2}^{q} (-1)^p H^p\right\| \leq \sum_{p=2}^{q} \|H\|^p\ .$$

Comme la série matricielle $\sum_{p \geq 0} (-1)^p\, H^p$ *converge et que la norme* $\|\cdot\|$ *est continue (elle est 1-lipschtizienne)*

$$\left\| \sum_{p=2}^{q} (-1)^p H^p \right\| \xrightarrow[q\to+\infty]{} \left\| \sum_{p=2}^{+\infty} (-1)^p H^p \right\| .$$

D'après les résultats sur les séries géométriques

$$\sum_{p=2}^{q} \|H\|^p \xrightarrow[q\to+\infty]{} \frac{1}{1-\|H\|} - 1 - \|H\| = \frac{\|H\|^2}{1-\|H\|} .$$

En faisant tendre q *vers* $+\infty$ *dans* $(\star)$*, il vient donc*

$$0 \leq \left\| \sum_{p=2}^{+\infty} (-1)^p H^p \right\| \leq \frac{\|H\|^2}{1-\|H\|} .$$

Par Théorème d'encadrement, $\displaystyle\sum_{p=2}^{+\infty} (-1)^n H^n \underset{H\to 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}}{=} o(\|H\|)$.

3. *Soit* $H \in \mathscr{B}(0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}, 1)$*. D'après la question 1,* $I_n + H \in GL_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} f(I_n+H) & = & (I_n+H)^{-1} \\ & = & \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p H^p \quad \left[\textit{question 1}\right] \\ & = & I_n - H + \sum_{p=2}^{+\infty} (-1)^p H^p \\ & = & \underbrace{I_n}_{f(I_n)} + \underbrace{(-H)}_{\textit{linéaire en } H} + \underset{H\to 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}}{o}(\|H\|) \quad \left[\textit{question 2}\right] \end{array}$$

Nous avons établi un DL1 de f *en* I_n*. Nous pouvons conclure à la différentiabilité de* f *en* I_n *et affirmer que* $df(I_n)$ *est donnée par*

$$df(I_n) \; \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ H & \mapsto & -H . \end{array} \right.$$

4. (a) *Soit* $H \in \mathscr{B}\left(0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}, \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}\right)$*. Comme* $\|\cdot\|$ *est une norme d'algèbre unitaire*

$$\left\|A^{-1}H\right\| \leq \underbrace{\left\|A^{-1}\right\|}_{>0} \underbrace{\|H\|}_{<1/\left\|A^{-1}\right\|} < 1 .$$

On peut donc appliquer les résultats de la question 1 à $H \leftarrow A^{-1}H$*.*
La série matricielle $\sum_{p \geq 0} (-1)^p\, (A^{-1}H)^p$ *converge et*

$$(I_n + A^{-1}H) \times \left(\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p\, (A^{-1}H)^p \right) = I_n .$$

Ainsi

$$(I_n + A^{-1}H)^{-1} = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p\, (A^{-1}H)^p$$

(b) *Soit* $H \in \mathscr{B}\left(0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}, \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}\right)$*. D'après la question 4.(a), la matrice* $(I_n + A^{-1}H)$ *est inversible. Donc la matrice*

$$A\,(I_n + A^{-1}H) = A + H$$

est également inversible ($GL_n(\mathbb{R})$ *est stable par produit).*
On calcule

$$\begin{aligned} f(A+H) &= (A+H)^{-1} \\ &= \left(A\,(I_n + A^{-1}H)\right)^{-1} \\ &= (I_n + A^{-1}H)^{-1}\,A^{-1} \\ &= \left(\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p\,(A^{-1}H)^p\right) A^{-1} \quad [\textit{question 4.(a)}] \\ &= \left(I_n - A^{-1}H + \sum_{p=2}^{+\infty} (-1)^p\,(A^{-1}H)^p\right) A^{-1} \\ &= \underbrace{A^{-1}}_{f(A)} + \underbrace{(-A^{-1}HA^{-1})}_{\textit{linéaire en } H} + \left(\sum_{p=2}^{+\infty} (-1)^p\,(A^{-1}H)^p\right) A^{-1}. \end{aligned}$$

Le résultat sera donc établi si l'on prouve

$$(\star) \qquad \left(\sum_{p=2}^{+\infty} (-1)^p\,(A^{-1}H)^p\right) A^{-1} \underset{H \to 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}}{=} o\,(\|H\|).$$

Au cours de la question 2, nous avons établi

$$0 \leq \left\|\sum_{p=2}^{+\infty} (-1)^p H^p\right\| \leq \frac{\|H\|^2}{1 - \|H\|}.$$

pour toute matrice H *de norme strictement inférieure à 1. Comme ici* $A^{-1}H$ *à une norme strictement inférieure à 1 (cf. question 4.(a)), on peut spécialiser cette inégalité à* $H \leftarrow A^{-1}H$ *pour obtenir*

$$0 \leq \left\|\sum_{p=2}^{+\infty} (-1)^p (A^{-1}H)^p\right\| \leq \frac{\|A^{-1}H\|^2}{1 - \|A^{-1}H\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|^2}{1 - \|A^{-1}H\|}\ \|H\|^2\ .$$

Nous en déduisons

$$(\star\star) \qquad 0 \leq \left\|\left(\sum_{p=2}^{+\infty} (-1)^p\,(A^{-1}H)^p\right) A^{-1}\right\| \leq \left\|\sum_{p=2}^{+\infty} (-1)^p\,(A^{-1}H)^p\right\|\ \|A^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|^3}{1 - \|A^{-1}H\|}\ \|H\|^2\ .$$

L'application

$$\mu_{A^{-1}} \ \left|\ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & A^{-1}M \end{array}\right.$$

est linéaire et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *est un sous-espace vectoriel de dimension finie. Donc* $\mu_{A^{-1}}$ *est continue et*

$$A^{-1}H = \mu_{A^{-1}}(H) \xrightarrow[H \to 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}]{} \mu_{A^{-1}}\left(0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}\right) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$

i.e.

$$(\star\star\star) \qquad \left\| A^{-1} H \right\| \xrightarrow[H \to 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}]{} 0_{\mathbb{R}} \,.$$

De $(\star\star)$, $(\star\star\star)$ *et du Théorème d'encadrement, nous déduisons*

$$\left(\sum_{p=2}^{+\infty} (-1)^p \left(A^{-1} H\right)^p \right) A^{-1} = \underset{H \to 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}}{o} (\|H\|)$$

ce qui achève la démonstration. Soit

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4. [Énoncé] [Indication(s)]

1. - *Vrai.*
   - *Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $a \in]0,1[$. À l'aide d'une étude des variations de la fonction f_n sur $[-a,a]$, on démontre que*
   $$\|f_n\|_{\infty,[-a,a]} = a^n .$$
   - *Grâce aux résultats sur les séries géométriques, on sait que la série $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|_{\infty,[-a,a]}$ converge. Donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ est normalement convergente sur $[-a,a]$.*
   - *On en déduit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ est normalement convergente sur tout segment de $]-1,1[$.*
2. - *Faux.*
   - *Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide d'une étude des variations de la fonction f_n sur $]-1,1[$, on démontre que*
   $$\|f_n\|_{\infty,]-1,1[} = 1 .$$
   - *La série $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|_{\infty,]-1,1[}$ est grossièrement divergente.*
   - *On en déduit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ n'est pas normalement convergente sur $]-1,1[$.*
3. - *Vrai.*
   - *Soit $x \in [0,1]$. La série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n x^n}{n}$ vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées.*
     . *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{(-1)^n x^n}{n} \times \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{n+1} \leq 0$.*
     . *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*
     $$\left|\frac{(-1)^n x^n}{n}\right| - \left|\frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{n+1}\right| = x^n\left(\frac{1}{n} - \frac{x}{n+1}\right) = \frac{x^n}{n(n+1)}\,(n(1-x)+1) \geq 0 .$$
     Donc la suite $\left(\left|\frac{(-1)^n x^n}{n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
     . $\left|\frac{(-1)^n x^n}{n}\right| = \frac{x^n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

     Elle est donc convergente.
   - *La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ est donc simplement convergente sur $[0,1]$.*
   - *D'après l'inégalité donnée par le critère spécial des séries alternées, pour tout $x \in [0,1]$, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$*
   $$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}\right| \leq \left|\frac{(-1)^{N+1} x^{N+1}}{N+1}\right| \leq \frac{1}{N+1} \quad [\text{indépendant de } x] .$$
   Par passage au sup sur $x \in [0,1]$, il vient
   $$0 \leq \left\|\sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n\right\|_{\infty,[0,1]} \leq \frac{1}{N+1} .$$

- *Par Théorème d'encadrement*
$$\left\| \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n \right\|_{\infty,[0,1]} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$
et donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ *est uniformément convergente sur* $[0,1]$.

4.
- *Vrai.*
- *En distinguant les cas* $x=0$ *et* $x\in\mathbb{R}^*$, *on démontre que pour un réel x fixé*
$$e^{-nx^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 1 & si\ x=0 \\ 0 & si\ x\neq 0\,. \end{cases}$$
- *La suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge donc simplement sur* $\mathbb{R}$ *vers la fonction*
$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,;\ x\mapsto \begin{cases} 1 & si\ x=0 \\ 0 & si\ x\neq 0\,. \end{cases}$$

5.
- *Faux.*
- *D'après la question précédente, la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement vers la fonction nulle sur* $]0,+\infty[$.
- *Soit* $n\in\mathbb{N}$. *À l'aide d'une étude des variations de* f_n *sur* $]0,+\infty[$, *on démontre que*
$$\|f_n-0\|_{\infty,]0,+\infty[} := \sup_{x\in]0,+\infty[} |f_n(x)| = 1\,.$$
- *Donc la suite* $\left(\|f_n-0\|_{\infty,]0,+\infty[}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas vers* 0. *Ainsi la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas uniformément sur* $]0,+\infty[$.