TD4 – calcul différentiel et révisions

Exercice 1 ★★★☆☆. **[Indication(s)]** **[Un corrigé]**
Titre. Calcul de matrices Jacobiennes.
Énoncé. *On munit* $\mathbb{R}^2$ *de la norme* $\|\cdot\|$ *définie par*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \|(x,y)\| = \max(|x|, |y|)$$

et on note (e_1, e_2) *sa base canonique. On considère les fonctions* f *et* g *définies par*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,;\, (x,y) \mapsto \sin(x-y) \qquad et \qquad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,;\, (x,y) \mapsto (x+y, x-y)\,.$$

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

1. *Démontrer que* f *est différentiable en* (a,b) *et donner sa matrice Jacobienne en* (a,b).
2. *Justifier que* g *est différentiable en* (a,b) *et donner sa matrice Jacobienne en* (a,b).

Exercice 2 ★★★★☆. **[Indication(s)]** **[Un corrigé]**
Titre. Différentiabilité et différentielle du déterminant en I_n.
Énoncé. *Soit* $n \geq 2$ *un nombre entier.*
On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *de la norme* $\|\cdot\|$ *définie par*

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \|M\| := \max_{1 \leq i,j \leq n} \left|[M]_{i,j}\right|.$$

Soit l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & \mathrm{Det}(A)\,. \end{array} \right.$$

1. *Soit* $H = \left(h_{i,j}\right)_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) *Soit* σ *une bijection de l'ensemble* $[\![1,n]\!]$ *dans lui-même, i.e.* $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. *On suppose que* $\sigma \neq \mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}$. *On note*

   $$Fix(\sigma) := \left\{ i \in [\![1,n]\!] \,:\, \sigma(i) = i \right\}$$

   l'ensemble des points fixes de σ.
      i. *Justifier que* $c := Card(Fix(\sigma)) \leq n-2$.
      ii. *Démontrer*

      $$\prod_{i=1}^{n} [I_n + H]_{i,\sigma(i)} = \underset{H \to 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}}{o}(\|H\|)\,.$$

   (b) *Démontrer que pour tout* $k \in [\![1,n]\!]$

   $$\prod_{i=1}^{k} (1 + h_{i,i}) = 1 + \sum_{i=1}^{k} h_{i,i} + \underset{H \to 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}}{o}(\|H\|)\,.$$

2. *Démontrer*

$$f(I_n + H) = 1 + \mathrm{Tr}(H) + \underset{H \to 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}}{o}(\|H\|)$$

3. *Que peut-on déduire du résultat de la question 2, pour l'application* f *?*

Exercice 3 ★★☆☆☆. **[Indication(s)]** **[Un corrigé]**
Titre. L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
Énoncé. *Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 2. On note*

$$\mathscr{D}'_n(\mathbb{C}) := \left\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \ : \ M \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{C}\right\} .$$

On souhaite démontrer que $\mathscr{D}'_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. *Soit T une matrice de triangulaire supérieure de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.*

   (a) *Supposons que les coefficients diagonaux de T, sont tous égaux. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, posons*

   $$T_p := T + D_p, \text{ où } D_p := \begin{pmatrix} \frac{1}{p} & & & 0 \\ & \frac{1}{2p} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{np} \end{pmatrix} .$$

   Démontrer $\left(T_p\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de matrices de $\mathscr{D}'_n(\mathbb{C})$, qui converge vers T.

   (b) *Supposons que les coefficients diagonaux de T, notés $[T]_{1,1}, [T]_{2,2}, \ldots, [T]_{n,n}$, ne sont pas tous égaux. On pose*

   $$A := \left\{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \ : \ [T]_{i,i} \neq [T]_{j,j}\right\} \neq \emptyset .$$

   et

   $$\alpha := \inf_{(i,j)\in A} \left|[T]_{i,i} - [T]_{j,j}\right| > 0 .$$

   Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, posons

   $$T_p := T + D_p, \text{ où } D_p := \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{p} & & & 0 \\ & \frac{\alpha}{2p} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{\alpha}{np} \end{pmatrix} .$$

   Démontrer $\left(T_p\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de matrices de $\mathscr{D}'_n(\mathbb{C})$, qui converge vers T.

   N.B. *On a démontré que la matrice T est, dans tous les cas, limite d'une suite de matrices de $\mathscr{D}'_n(\mathbb{C})$.*

2. *Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$. Démontrer que l'application*

   $$\sigma \ \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & P\,M\,P^{-1} \end{array} \right.$$

   est continue.

3. *Démontrer que $\mathscr{D}'_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.*

Exercice 4 ★★☆☆☆. **[Indication(s)]** **[Un corrigé]**
Titre. Vrai ou Faux sur les familles sommables.
Énoncé. *Répondre par Vrai ou Faux aux questions suivantes.*
Si la réponse est « Vrai », citer un résultat du Chapitre 12 « Familles sommables » pour justifier.
Si la réponse est « Faux », argumenter au moyen d'un contre-exemple.

1. *L'ensemble des nombres entiers premiers est dénombrable.*
2. *La famille* $\left(\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est sommable et on peut calculer explicitement sa somme.*
3. *La famille* $\left(\dfrac{1}{2^n 7^m}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ *est sommable et on peut calculer explicitement sa somme.*
4. *La famille* $\left(\dfrac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ *est sommable et on peut calculer explicitement sa somme.*
5. *Si* $r \in]-1,1[$, *la série* $\sum_{n\geq 0} r^n \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{r^k (k+1)^2}$ *est convergente on peut calculer explicitement sa somme.*

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 1. [Énoncé] [Un corrigé]

1. • . *Pour* $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, *développer* $f((a,b)+(h_1,h_2))$, *en utilisant des formules de trigonométrie et des DL usuels.*
   . *Dans le développement, faire apparaitre* $f(a,b)$, *une expression linéaire en* (h_1, h_2) *et un reste.*
   . *Démontrer, avec le plus grand soin, que le reste est un* $\underset{(h_1,h_2)\to(0,0)}{o}(\|(h_1,h_2)\|)$.
   • *Par définition, la matrice Jacobienne de* f *en* (a,b) *est*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} df(a,b)\cdot e_1 & df(a,b)\cdot e_2 \end{pmatrix} = \dots$$

2. • *Observer que* g *possède une propriété algébrique remarquable.*
   • *Par définition, la matrice Jacobienne de* g *en* (a,b) *est*

$$Mat_{(e_1,e_2)}(\,dg(a,b)) = \dots$$

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 2. [Énoncé] [Un corrigé]

1. (a) i.
   - *Raisonner par l'absurde.*
   - *Que dire d'une permutation de* $[\![1,n]\!]$ *qui possède au moins* $(n-1)$ *points fixes ?*

   ii.
   - *Scinder le produit en deux, un premier suivant les* i *dans Fix*(σ) *et un second pour les* i *dans le complémentaire.*
   - *En utilisant l'inégalité triangulaire et le fait que la norme sur* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *est la norme sup, démontrer*

   $$\left|\prod_{i=1}^{n}[I_n+H]_{i,\sigma(i)}\right| \leq (1+\|H\|)^c\ \|H\|^{n-c}$$

   où $c :=$ *Card*$($*Fix*$(\sigma))$.

   (b)
   - *Raisonner par récurrence finie sur* $k \in [\![1,n]\!]$.
   - *Utiliser l'inégalité triangulaire et le fait que la norme sur* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *est la norme sup.*

2.
   - *Considérer* $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *et écrivez* $f(I_n+H) = \operatorname{Det}(I_n+H)$ *comme une somme indexée par les* $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
   - *Scinder la somme en deux parties, en isolant le terme pour* $\sigma =$.
   - *Appliquer les résultats des questions 1.(a).ii et 1.(b).*

3. *N'aurait-on pas établi à la question 2 un DL1 pour la fonction* f *en* I_n *?*

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 3. [Énoncé] [Un corrigé]

1. (a)
   - *Quelles sont les valeurs propres de T_p ?*
   - *Que dire d'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ qui possède n valeurs propres deux-à-deux distinctes ?*
   - *Une suite de matrices converge vers une matrice donnée si et seulement s'il y a convergence coefficient par coefficient.*

   (b)
   - *Démontrer tout d'abord, avec le plus grand soin, que les valeurs propres de T_p sont deux-à-deux distinctes.*
   - *Adapter les arguments donnés pour répondre à la question 1 à la situation nouvelle.*

2.
   - *Observer une propriété algébrique remarquable de l'application σ.*
   - *Quelle est la dimension de la source et du but de σ ?*

3.
   - *Quelle propriété de réduction remarquable possède une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$?*
   - *Assembler, avec le plus grand soin, les résultats précédents pour conclure.*

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 4. [Énoncé] [Un corrigé]

1. *Que dire d'une partie infinie de* $\mathbb{N}$ *?*
2. - *Une famille de nombres complexes* $(a_i)_{i\in I}$ *est sommable si, par définition, la famille* $(|a_i|)_{i\in I}$ *de réels positifs ou nuls est sommable.*
   - *Que sait-on sur la sommabilité d'une famille de réels positifs ou nuls indexée par* $\mathbb{N}$ *?*
3. *Théorème de Fubini.*
4. - *Que dire d'une sous-famille d'une famille sommable ?*
   - *Que sait-on sur la sommabilité d'une famille de réels positifs ou nuls indexée par* $\mathbb{N}$ *?*
5. *Théorème sur le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.*

Un corrigé de l'exercice 1. [Énoncé] [Indication(s)]

1. • *Soit* $(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rcl} f((a,b)+(h_1,h_2)) & = & f(a+h_1,b+h_2) \\ & = & \sin(a-b+h_1-h_2) \\ & = & \sin(a-b)\cos(h_1-h_2)+\cos(a-b)\sin(h_1-h_2) \end{array}$$

Quand (h_1,h_2) *tend vers* $(0,0)$, h_1 *tend vers* 0 *et* h_2 *tend vers* 0. *Ainsi quand* (h_1,h_2) *tend vers* $(0,0)$, h_1-h_2 *tend vers* 0. *D'après les DL1 de* $\cos$ *et* $\sin$ *en* 0

$$\cos(h_1-h_2)=1+(h_1-h_2)\ \varepsilon_1(h_1-h_2) \quad \textit{et } \sin(h_1-h_2)=(h_1-h_2)+(h_1-h_2)\,\varepsilon_2(h_1-h_2)$$

où

$$\varepsilon_1(h_1-h_2)\xrightarrow[(h_1,h_2)\to(0,0)]{}0 \quad \textit{et} \quad \varepsilon_2(h_1-h_2)\xrightarrow[(h_1,h_2)\to(0,0)]{}0\ .$$

Ainsi

$$\begin{array}{rcl} f((a,b)+(h_1,h_2)) & = & \sin(a-b)(1+(h_1-h_2)\ \varepsilon_1(h_1-h_2))+\cos(a-b)((h_1-h_2)+(h_1-h_2)\,\varepsilon_2(h_1-h_2)) \\ & = & \underbrace{\sin(a-b)}_{f(a,b)}+\underbrace{\cos(a-b)(h_1-h_2)}_{\textit{linéaire en }(h_1,h_2)} \\ & + & \underbrace{(h_1-h_2)\ \left(\sin(a-b)\varepsilon_1(h_1-h_2)+\cos(a-b)\varepsilon_2(h_1-h_2)\right)}_{r(h_1,h_2)} \end{array}$$

On observe

$$0\le|r(h_1,h_2)|\le 2\,\|(h_1,h_2)\|\ (|\varepsilon_1(h_1-h_2)|+|\varepsilon_2(h_1-h_2)|)$$

et donc par Théorème d'encadrement

$$r(h_1,h_2)=\underset{(h_1,h_2)\to(0,0)}{o}(\|(h_1,h_2)\|)\ .$$

Ainsi

$$f((a,b)+(h_1,h_2))=\underbrace{\sin(a-b)}_{f(a,b)}+\underbrace{\cos(a-b)(h_1-h_2)}_{\textit{linéaire en }(h_1,h_2)}+\underset{(h_1,h_2)\to(0,0)}{o}(\|(h_1,h_2)\|)\ .$$

Comme nous avons obtenu un DL1 de f *en* (a,b), *l'application* f *est différentiable en* (a,b) *et de plus la différentielle de* f *en* a *est donnée par la composante linéaire de ce DL1, i.e.*

$$df(a,b)\ \left|\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (h_1,h_2) & \mapsto & \cos(a-b)(h_1-h_2)\ . \end{array}\right.$$

• *Par définition, la matrice Jacobienne de* f *en* (a,b) *est*

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} df(a,b)\cdot e_1 & df(a,b)\cdot e_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(a-b) & -\cos(a-b)\end{pmatrix}$$

2. • *L'application* g *est linéaire. Elle est donc différentiable sur* $\mathbb{R}^2$ *et sa différentielle en* (a,b) *(et en tout point de* $\mathbb{R}^2$*) est égale à* g. *Donc*

$$dg(a,b)=g\ .$$

• *Par définition, la matrice Jacobienne de* g *en* (a,b) *est*

$$Mat_{(e_1,e_2)}(\,dg(a,b))=Mat_{(e_1,e_2)}(g)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2. [Énoncé] [Indication(s)]

1. (a) i. *Raisonnons par l'absurde et supposons que σ possède au moins $(n-1)$ points fixes. Comme σ n'est pas l'identité, σ ne peut avoir n points fixes. Donc σ possède $(n-1)$ points fixes.*
Soit i le point de $[\![1,n]\!]$ tel que $\sigma(i) \neq i$. Comme $\sigma(i) \neq i$, $\sigma(i)$ est un point fixe de σ et donc $\sigma(\sigma(i)) = \sigma(i)$. Comme σ est injective, $\sigma(i) = i$. Contradiction.
Ainsi $c := \text{Card}(\text{Fix}(\sigma)) \leq n-2$.

ii. *On calcule*

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}[I_n+H]_{i,\sigma(i)} &= \left(\prod_{i\in \text{Fix}(\sigma)}[I_n+H]_{i,\sigma(i)}\right)\left(\prod_{i\in[\![1,n]\!]\setminus \text{Fix}(\sigma)}[I_n+H]_{i,\sigma(i)}\right)\\ &= \left(\prod_{i\in \text{Fix}(\sigma)}(1+h_{i,i})\right)\left(\prod_{i\in[\![1,n]\!]\setminus \text{Fix}(\sigma)}h_{i,\sigma(i)}\right)\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}0 &\leq \left|\prod_{i=1}^{n}[I_n+H]_{i,\sigma(i)}\right|\\ &\leq \left(\prod_{i\in \text{Fix}(\sigma)}|1+h_{i,i}|\right)\left(\prod_{i\in[\![1,n]\!]\setminus \text{Fix}(\sigma)}|h_{i,\sigma(i)}|\right)\\ &\leq \left(\prod_{i\in \text{Fix}(\sigma)}(1+|h_{i,i}|)\right)\left(\prod_{i\in[\![1,n]\!]\setminus \text{Fix}(\sigma)}|h_{i,\sigma(i)}|\right) \quad [\textit{inégalité triangulaire}]\\ &\leq \left(\prod_{i\in \text{Fix}(\sigma)}(1+\|H\|)\right)\left(\prod_{i\in[\![1,n]\!]\setminus \text{Fix}(\sigma)}\|H\|\right) \quad [\|\cdot\| \textit{ est la norme sup}]\\ &\leq (1+\|H\|)^c\ \|H\|^{n-c} \quad [c := \text{Card}(\text{Fix}(\sigma))]\ .\end{aligned}$$

Donc

$$0 \leq \frac{\left|\prod_{i=1}^{n}[I_n+H]_{i,\sigma(i)}\right|}{\|H\|} \leq (1+\|H\|)^c\ \|H\|^{n-c-1}\ .$$

D'après la question 1, $c \leq n-2$ et donc $n-c-1 \geq 1$. Aussi a-t-on

$$(1+\|H\|)^c\ \|H\|^{n-c-1} \xrightarrow[H\to 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}]{} 0_{\mathbb{R}}\ .$$

Par Théorème d'encadrement, il vient donc

$$\prod_{i=1}^{n}[I_n+H]_{i,\sigma(i)} \underset{H\to 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}}{=} o(\|H\|)\ .$$

(b) *On démontre le résultat par récurrence finie sur $k \in [\![1,n]\!]$.*

- *Initialisation à $k=1$.*

$$\prod_{i=1}^{1}(1+h_{i,i}) = 1+h_{1,1} = 1+\sum_{i=1}^{1}h_{i,i}\ .$$

Le résultat est donc observé pour $k=1$.

- *Hérédité. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ tel que*
$$\prod_{i=1}^{k}(1+h_{i,i}) = 1 + \sum_{i=1}^{k} h_{i,i} + \underset{H\to 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}}{o}(\|H\|)\,.$$
On calcule
$$\begin{array}{rcl}
\displaystyle\prod_{i=1}^{k+1}(1+h_{i,i}) & = & (1+h_{k+1,k+1})\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{k}(1+h_{i,i})\right)\\
& = & (1+h_{k+1,k+1})\left(1+\displaystyle\sum_{i=1}^{k} h_{i,i} + \underset{H\to 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}}{o}(\|H\|)\right)\\
& = & 1+h_{k+1,k+1}+\displaystyle\sum_{i=1}^{k} h_{i,i} + h_{k+1,k+1}\displaystyle\sum_{i=1}^{k} h_{i,i} + (1+h_{k+1,k+1})\underset{H\to 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}}{o}(\|H\|)\\
& = & 1+\displaystyle\sum_{i=1}^{k+1} h_{i,i} + \underbrace{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} h_{i,i}h_{k+1,k+1} + (1+h_{k+1,k+1})\underset{H\to 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}}{o}(\|H\|)}_{r(H)}
\end{array}$$
Il reste à démontrer $r(H) = \underset{H\to 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}}{o}(\|H\|)$.
$$\begin{array}{rcll}
|r(h)| & \leq & \displaystyle\sum_{i=1}^{k}\left|h_{i,i}\right|\,\left|h_{k+1,k+1}\right| + (1+\left|h_{k+1,k+1}\right|)\left|\underset{H\to 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}}{o}(\|H\|)\right| & [\textit{inégalité triangulaire}]\\
& \leq & \displaystyle\sum_{i=1}^{k}\|H\|^2 + (1+\ \|H\|)\left|\underset{H\to 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}}{o}(\|H\|)\right| & [\|\cdot\|\ \textit{est la norme sup}]\\
& = & k\,\|H\|^2 + (1+\ \|H\|)\left|\underset{H\to 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}}{o}(\|H\|)\right| &
\end{array}$$
Donc
$$0 \leq \frac{|r(h)|}{\|H\|} \leq k\,\|H\| + (1+\ \|H\|)\left|\frac{\underset{H\to 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}}{o}(\|H\|)}{\|(\|\,H)}\right|.$$
Par Théorème d'encadrement, on en déduit $r(H) = \underset{H\to 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}}{o}(\|H\|)$.

2. *Soit $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.*
$$\begin{array}{rcl}
f(I_n+H) & = & \mathrm{Det}\,(I_n+H)\\
& = & \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}[I_n+H]_{i,\sigma(i)}\\
& = & \displaystyle\prod_{i=1}^{n}[I_n+H]_{i,\mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}(i)} + \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n\setminus\left\{\mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}\right\}}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}[I_n+H]_{i,\sigma(i)}\\
& = & \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1+h_{i,i}) + \underset{H\to 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}}{o}(\|H\|)\quad [\textit{Question 1.(a).ii}]\\
& = & 1+\displaystyle\sum_{i=1}^{n} h_{i,i} + \underset{H\to 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}}{o}(\|H\|)\quad [\textit{Question 1.(b)}]
\end{array}$$

Nous avons donc établi

$$f(I_n + H) = 1 + \mathrm{Tr}(H) + \underset{H \to 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}}{o}(\|H\|)$$

3. *D'après la question 2, si* $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$f(I_n + H) = \underbrace{\mathrm{Det}(I_n)}_{f(I_n)} + \underbrace{\mathrm{Tr}(H)}_{\textit{linéaire en } H} + \underset{H \to 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}}{o}(\|H\|)$$

Comme nous avons obtenu un DL1 de f *en* I_n*, l'application* f *est différentiable en* I_n *et de plus la différentielle de* f *en* I_n *est donnée par la composante linéaire de ce DL1, i.e.*

$$df(I_n) = Tr.$$

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3. [Énoncé] [Indication(s)]

1. (a) *Les coefficients diagonaux de T sont tous égaux. Notons $\lambda \in \mathbb{C}$ leur valeur commune. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.*

$$T_p = \begin{pmatrix} \lambda + \frac{1}{p} & & & * \\ & \lambda + \frac{1}{2p} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda + \frac{1}{np} \end{pmatrix}.$$

Comme T_p est une matrice triangulaire, ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux. Ceux-ci étant clairement deux-à-deux distincts, la matrice $T_p \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ possède n valeurs propres complexes deux-à-deux distinctes. Elle est donc diagonalisable sur $\mathbb{C}$, i.e. $T_p \in \mathcal{D}'_n(\mathbb{C})$.
Comme la suite de matrices $(D_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge coicient par coicient vers $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$, la suite de matrices $(D_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$. Par opération sur les limites, la suite de matrices $(T_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice $T + 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} = T$.

(b) *Soit $p \in \mathbb{N}^*$.*

$$T_p = \begin{pmatrix} [T]_{1,1} + \frac{\alpha}{p} & & & * \\ & [T]_{2,2} + \frac{\alpha}{2p} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & [T]_{n,n} + \frac{\alpha}{np} \end{pmatrix}.$$

Comme T_p est une matrice triangulaire, ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux. Vérifions que ces derniers sont deux-à-deux distincts.
Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tels que $i < j$.

- *Considérons le cas où $[T]_{i,i} = [T]_{j,j}$. Alors*

$$[T]_{i,i} + \frac{\alpha}{ip} - \left([T]_{j,j} + \frac{\alpha}{jp}\right) = \frac{\alpha}{ip} - \frac{\alpha}{jp} \neq 0.$$

Donc $[T]_{i,i} + \dfrac{\alpha}{ip} \neq [T]_{j,j} + \dfrac{\alpha}{jp}$.

- *Considérons le cas où $[T]_{i,i} \neq [T]_{j,j}$. Alors $(i,j) \in A$ et*

$$\begin{aligned} \left| [T]_{i,i} + \frac{\alpha}{ip} - \left([T]_{j,j} + \frac{\alpha}{jp}\right)\right| &= \left| [T]_{i,i} - [T]_{j,j} - \left(\frac{\alpha}{jp} - \frac{\alpha}{ip}\right)\right| \\ &\geq \left| [T]_{i,i} - [T]_{j,j}\right| - \left|\frac{\alpha}{jp} - \frac{\alpha}{ip}\right| \\ &\geq \alpha - \left|\frac{\alpha}{jp} - \frac{\alpha}{ip}\right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \alpha\left(1-\left|\frac{1}{j\,p}-\frac{1}{i\,p}\right|\right) \\ &= \alpha\left(\underbrace{1-\frac{1}{i\,p}}_{\geq 0}+\frac{1}{j\,p}\right) \\ &\geq \frac{\alpha}{j\,p} \end{aligned}$$

Comme $\dfrac{\alpha}{jp} > 0$*, nous en déduisons* $[T]_{i,i}+\dfrac{\alpha}{i\,p} \neq [T]_{j,j}+\dfrac{\alpha}{j\,p}$.

La matrice $T_p \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *possède* n *valeurs propres complexes deux-à-deux distinctes. Elle est donc diagonalisable sur* $\mathbb{C}$*, i.e.* $T_p \in \mathscr{D}'_n(\mathbb{C})$.
Comme la suite de matrices $(D_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ *converge coicient par coicient vers* $0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$*, la suite de matrices* $(D_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ *converge vers la matrice* $0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$*. Par opération sur les limites, la suite de matrices* $(T_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ *converge vers la matrice* $T+0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}=T$.

2. *Démontrons que l'application* σ *est linéaire. Comme* $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *est une* $\mathbb{C}$*-algèbre, pour tout* $M_1, M_2 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *et tout* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

$$\sigma(\lambda_1 M_1+\lambda_2 M_2) = P\,M\,P^{-1} = P\,(\lambda_1 M_1+\lambda_2 M_2)\,P^{-1} = \lambda_1 P\,M_1\,P^{-1}+\lambda_2 P\,M_2\,P^{-1} = \lambda_1\sigma(M_1)+\lambda_2\sigma(M_2)\,.$$

Comme $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *est un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel de dimension finie,* σ *est continue.*

3. *Soit* $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$*. Alors* M *est trigonalisable sur* $\mathbb{C}$*. Donc il existe* $P \in GL_n(\mathbb{C})$ *et* $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *une matrice triangulaire supérieure telles que*

$$M = P\,T\,P^{-1} = \sigma(T)$$

avec les notations de la question 2.
D'après les résultats de la question 1, il existe une suite $(T_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ *de matrices de* $\mathscr{D}'_n(\mathbb{C})$ *telle que*

$$T_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} T$$

Par continuité de σ

$$P\,T_p\,P^{-1} = \sigma(T_p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \sigma(T) = M\,.$$

Comme pour tout $p \in \mathbb{N}^*$*,* $\sigma(T_p)$ *est semblable à* T_p*,* $\sigma(T_p)$ *est diagonalisable sur* $\mathbb{C}$*. On a donc exhibé une suite de matrices de* $\mathscr{D}'_n(\mathbb{C})$ *qui converge vers* M*.*

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4. [Énoncé] [Indication(s)]

1. - *Vrai.*
   - *L'ensemble des nombres premiers est une partie infinie de $\mathbb{N}$ donc dénombrable [12.4]*
2. - *Faux.*
   - *Par définition, la famille $\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable si et seulement si la famille $\left(\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable [12.41].*
   - *La famille de réels positifs $\left(\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable si et seulement si la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ converge [12.27].*
   - *Comme la série harmonique diverge (Critère de Riemann), la famille $\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas sommable.*
3. - *Vrai.*
   - *On cherche à appliquer le Théorème de Fubini.*
     . *À $n\in\mathbb{N}$ fixé, la série $\sum_{m\geq 0}\frac{1}{2^n}\frac{1}{7^m}$ est convergente (résultat sur les séries géométriques et linéarité) et a pour somme*
     $$\frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{7^m}=\frac{1}{2^n}\frac{1}{1-\frac{1}{7}}=\frac{7}{6}\frac{1}{2^n}.$$
     . *La série*
     $$\sum_{n\geq 0}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\frac{1}{7^m}=\sum_{n\geq 0}\frac{7}{6}\frac{1}{2^n}$$
     est convergente (résultat sur les séries géométriques et linéarité) et a pour somme
     $$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\frac{1}{7^m}=\frac{7}{6}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{7}{6}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{7}{3}.$$
     . *D'après le Théorème de Fubini [12.62], la famille $\left(\frac{1}{2^n7^m}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et*
     $$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}\frac{1}{2^n7^m}=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\frac{1}{7^m}=\frac{7}{3}.$$
4. - *Faux.*
   - *On raisonne par l'absurde et on suppose que la famille $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable.*
   - *Une sous-famille de famille sommable est sommable [12.29]. Donc la famille*
     $$\left(\frac{1}{2^n}\right)_{-n\in\mathbb{N}}=\left(\frac{1}{2^{-n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}=\left(2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$
     est sommable.
   - *Comme cette dernière famille est indexée par $\mathbb{N}$, la série $\sum_{n\geq 0}2^n$ est convergente [12.27], ce qui n'est pas vraie, puisqu'elle est grossièrement divergente.*

5. • *Vrai.*

   • *On cherche à appliquer le Théorème sur le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.*

   . *Les séries* $\sum_{n\geq 0} r^n$ *et* $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)^2}$ *sont absolument convergentes (résultats sur les séries géométriques et sur les séries de Riemann).*

   . *D'après le Théorème sur le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes [12.68], la série*

$$\sum_{n\geq 0} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^2}\, r^{n-k} = \sum_{n\geq 0} r^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{r^k\,(k+1)^2}$$

est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{r^k\,(k+1)^2} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} r^n\right) = \frac{\pi^2}{6(1-r)}\,.$$