TD3 – calcul différentiel et révisions

Exercice 1 ★☆☆☆☆. **[Indication(s)]** **[Un corrigé]**
Titre. Différentiabilité et différentielle en tout point d'un polynôme en deux variables.
Énoncé. *On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|\cdot\|$ définie par*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \|(x,y)\| = \max\left(|x|, |y|\right) .$$

Soit l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^3 + 2xy + y^2 . \end{array} \right.$$

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ fixé.
Démontrer que l'application f est différentiable en (a,b) et préciser sa différentielle $df(a,b)$ en ce point.

Exercice 2 ★☆☆☆☆. **[Indication(s)]** **[Un corrigé]**
Titre. Différentiabilité et différentielle en tout point d'une application linéaire.
Énoncé. *Soient (E, N_E) et (F, N_F) deux espaces vectoriels normés de dimension finie.*
Soit f une application linéaire de E dans F.

1. *Soit $a \in E$ fixé. Démontrer que l'application f est différentiable en a et préciser sa différentielle $df(a)$ en ce point.*

2. *On considère la différentielle de f définie par*

$$df \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathscr{L}(E,F) \\ a & \mapsto & df(a) . \end{array} \right.$$

   Quelle propriété remarquable possède l'application df ?

Exercice 3 ★☆☆☆☆. **[Indication(s)]** **[Un corrigé]**
Titre. Applications différentiables en un point dont les dérivées partielles coïncident en ce point.
Énoncé. *Soient*

- *F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_F ;*
- *Ω une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$;*
- *a un point de Ω ;*
- *$f : \Omega \to F$ une application différentiable en a ;*
- *$g : \Omega \to F$ une application différentiable en a.*

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est notée $\mathscr{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$.

1. *Justifier l'existence, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial x_i}(a)$, puis en donner une expression en fonction des différentielles $df(a)$ et $dg(a)$ de f et g en a.*

2. *On suppose que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \dfrac{\partial g}{\partial x_i}(a)$. Démontrer que les différentielles $df(a)$ et $dg(a)$ sont égales.*

Exercice 4 ★★☆☆☆. **[Indication(s)]** **[Un corrigé]**
Titre. Différentiabilité et différentielle en tout point de l'élévation au cube dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Énoncé. *Soit $n \geq 2$ un nombre entier.*
On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme d'algèbre unitaire, par exemple de la norme $\|\cdot\|$ définie par

$$\forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \|M\| := \max_{1\leq j\leq n}\left(\sum_{i=1}^{n} \left|[M]_{i,j}\right|\right).$$

Soit l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A^3 . \end{array} \right.$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixé.

1. *Démontrer que l'application f est différentiable en A et préciser sa différentielle $df(A)$ en ce point.*
2. *L'application f est-elle continue en A ?*

Exercice 5 ★★★☆☆. **[Indication(s)]** **[Un corrigé]**
Titre. Vrai ou Faux sur les espaces vectoriels normés II.
Énoncé. *Répondre par Vrai ou Faux aux questions suivantes.*
Si la réponse est « Vrai », citer un résultat du Chapitre 10 « Espaces vectoriels normés » pour justifier.
Si la réponse est « Faux », argumenter au moyen d'un contre-exemple.
Dans la suite n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. *L'ensemble $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
2. *Si U est un ouvert d'un espace vectoriel normé E de dimension finie tel que $0_E \in U$, alors U contient une base de E.*
3. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction et si $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels qui converge vers un réel x, alors*

$$f(x_p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} f(x) .$$

4. *On considère la trace Tr: $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Son noyau, $\mathrm{Ker}\,(Tr)$, est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
5. *L'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$.*
6. *Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui converge vers une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors il n'est pas utile de justifier*

$$AM_pB \xrightarrow[p\to+\infty]{} AMB$$

car ce serait une perte de temps.

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 1. [Énoncé] [Un corrigé]

- *Pour* $h=(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2$, *développer* $f((a,b)+(h_1,h_2))$.
- *Dans le développement, faire apparaitre* $f(a,b)$, *une expression linéaire en* (h_1,h_2) *et un reste.*
- *Démontrer, avec le plus grand soin, que le reste est un* $\underset{(h_1,h_2)\to(0,0)}{o}(\|(h_1,h_2)\|)$.

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 2. [Énoncé] [Un corrigé]

1. • *Pour $h \in E$, développer $f(a+h)$.*
   • *0_F est un $\underset{(h \to 0_E}{o}(N_E(h))$.*
2. *Combien de valeurs l'application df prend-elle ?*

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 3. [Énoncé] [Un corrigé]

1. *Cf. Définition 20.4, Proposition 20.12 et Remarque 20.17.*

2. *Démontrer que pour tout* $x = \sum_{i=1}^{n} x_i.e_i$ *vecteur de* E*, où* $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$*,*

$$df(a)\cdot(x) = dg(a)\cdot(x)$$

en utilisant l'hypothèse sur les dérivées partielles de f *et* g*, ainsi que la linéarité des applications* $df(a)$ *et* $dg(a)$*.*

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 4. [Énoncé] [Un corrigé]

1. - *Pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, développer $f(A+H)$, en prenant garde au défaut de commutativité de la multiplication dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
   - *Dans le développement, faire apparaitre $f(A)$, une expression linéaire en H et un reste.*
   - *Démontrer, avec le plus grand soin, que le reste est un $\underset{H\to 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}}{o}(\|H\|)$.*
2. *Cf. Proposition 20.12.*

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 5. [Énoncé] [Un corrigé]

1.
   - *Quelle structure algébrique possède $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$?*
   - *Cf. [10.151]*
2.
   - *Introduire une base $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E.*
   - *Justifier que U contient une boule de rayon $r>0$ centrée en 0_E.*
   - *Contracter les vecteurs $e_1,\dots,e_n$ pour que les normes des nouveaux vecteurs, qui leurs sont colinéaires, soient toutes $\dfrac{r}{2}$.*
3.
   - *N'y a-t-il pas une propriété de régularité de la fonction f qui manque?*
4.
   - *Quelle est la structure algébrique de $Ker(Tr)$?*
   - *En déduire alors son adhérence.*
   - *Son adhérence peut-elle être alors égale à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?*
5.
   - *Caractérisation séquentielle de la densité [10.85].*
   - *Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Justifier qu'à partir d'un certain rang p_0, les nombres $\dfrac{1}{p}$ ne sont pas dans le spectre réel de M.*
   - *Qu'en déduire pour les matrices $M-\dfrac{1}{p}.I_n$?*
6. *N'y aurait-il pas une propriété de continuité pour une application sous-jacente, qu'il conviendrait de démontrer?*

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1. [Énoncé] [Indication(s)]

- *Soient* $h=(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rcl} f((a,b)+(h_1,h_2)) & = & f(a+h_1,b+h_2)\\ & = & (a+h_1)^3+(a+h_1)(b+h_2)+(b+h_2)^2\\ & = & a^3+3a^2h_1+3ah_1^2+h_1^3+ab+ah_2+bh_1+h_1h_2+b^2+2bh_2+h_2^2\\ & = & \underbrace{a^3+ab+b^2}_{f(a,b)}+\underbrace{3a^2h_1+ah_2+bh_1+2bh_2}_{L(h_1,h_2)}+\underbrace{3ah_1^2+h_1^3+h_1h_2+h_2^2}_{r(h_1,h_2)} \end{array}$$

- *L'application*

$$L\ \left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}\\ (h_1,h_2) & \mapsto & 3a^2h_1+ah_2+bh_1+2bh_2\end{array}\right.$$

est linéaire.

- *On observe que* $|h_1|\leq\|h\|$ *et* $|h_2|\leq\|h\|$ *Ainsi*

$$0\leq|r(h_1,h_2)|\leq 3|a||h_1|^2+|h_1|^3+|h_1||h_2|+|h_2|^2\leq 3|a|\,\|h\|^2+\|h\|^3+\|h\|^2+\|h\|^2=(3|a|+2)\,\|h\|^2+\|h\|^3$$

puis

$$0\leq\frac{|r(h_1,h_2)|}{\|h\|}\leq(3|a|+2)\,\|h\|+\|h\|^2\ .$$

Par Théorème d'encadrement, $\dfrac{|r(h_1,h_2)|}{\|h\|}\xrightarrow[h=(h_1,h_2)\to(0,0)]{}0_{\mathbb{R}}$ *et donc* $r(h_1,h_2)=\underset{(h_1,h_2)\to(0,0)}{o}(\|(h_1,h_2)\|)$.

- *Nous déduisons de cette étude que*

$$f((a,b)+(h_1,h_2))=f(a,b)+L(h_1,h_2)+\underset{(h_1,h_2)\to(0,0)}{o}(\|(h_1,h_2)\|)$$

où L *est l'application linéaire de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui à* (h_1,h_2) *associe* $3a^2h_1+ah_2+bh_1+2bh_2$.
L'application f *est donc différentiable en* (a,b) *et*

$$df(a,b)\ \left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}\\ (h_1,h_2) & \mapsto & 3a^2h_1+ah_2+bh_1+2bh_2\ .\end{array}\right.$$

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2. [Énoncé] [Indication(s)]

1. *Soit $h \in E$.*
$$f(a+h) = f(a) + f(h) \quad \left[f \text{ est linéaire}\right].$$
Nous en déduisons que f est diffentiable en a et que $df(a) = f$.

2. *D'après la question 1*
$$df \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathscr{L}(E,F) \\ a & \mapsto & df(a) = f \end{array} \right..$$
La différentielle df est une application constante égale à f.

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3. [Énoncé] [Indication(s)]

1. *Soit $i \in [\![1,n]\!]$.*

   - *D'après la Proposition 20.12, comme f est différentiable en a, elle admet des dérivées en a dans toutes les directions, en particulier dans la direction e_i. Donc la i-ème dérivée partielle de f en a, notée $D_{e_i} f(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existe. D'après la Remarque 20.17*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) := D_{e_i} f(a) = df(a)\cdot e_i\,.$$

   - *Les arguments sont les mêmes pour g et la formule pour la i-ème dérivée partielle de g en a s'énonce*

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(a) := D_{e_i} g(a) = dg(a)\cdot e_i\,.$$

2. *Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i.e_i$ un vecteur de E, où $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}$.*

$$\begin{aligned}
df(a)\cdot(x) &= df(a)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} x_i.e_i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i.\, df(a)\cdot e_i \quad [\, df(a) \text{ est linéaire}]\\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i.\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \quad [\text{question 1}]\\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i.\frac{\partial g}{\partial x_i}(a) \quad [\text{cf. hypothèse sur les dérivées partielles de } f \text{ et } g \text{ en } a]\\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i.\, dg(a)\cdot e_i \quad [\text{question 1}]\\
&= dg(a)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} x_i.e_i\right) \quad [\, dg(a) \text{ est linéaire}]\\
&= dg(a)\cdot(x)
\end{aligned}$$

Donc les applications linéaires $df(a)$ et $dg(a)$ de E dans F coïncident.

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4. [Énoncé] [Indication(s)]

1. • *Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

$$\begin{aligned} f(A+H) &= (A+H)^3 \\ &= (A^2+AH+HA+H^2)(A+H) \\ &= A^3+A^2H+AHA+AH^2+HA^2+HAH+H^2A+H^3 \\ &= \underbrace{A^3}_{f(A)} + \underbrace{A^2H+AHA+HA^2}_{L(H)} + \underbrace{AH^2+HAH+H^2A+H^3}_{r(H)} \end{aligned}$$

• *L'application*

$$L \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ H & \mapsto & A^2H+AHA+HA^2 \end{array} \right.$$

est linéaire.

• *Comme $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre*

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|r(H)\| \\ &\leq \left\|AH^2+HAH+H^2A+H^3\right\| \\ &\leq \left\|AH^2\right\| + \|HAH\| + \left\|H^2A\right\| + \left\|H^3\right\| \\ &\leq \|A\|\,\|H\|^2 + \|H\|\,\|A\|\,\|H\| + \|H\|^2\,\|A\| + \|H\|^3 \\ &= 3\|A\|\,\|H\|^2 + \|H\|^3 \end{aligned}$$

puis

$$0 \leq \frac{\|r(H)\|}{\|H\|} \leq 3\|A\|\,\|H\| + \|H\|^2 .$$

Par Théorème d'encadrement, $\dfrac{\|r(H)\|}{\|H\|} \xrightarrow[H \to 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}]{} 0_{\mathbb{R}}$ et donc $r(H) = \underset{H \to 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}}{o}(\|H\|)$.

• *Nous déduisons de cette étude que*

$$f(A+H) = f(A) + L(H) + \underset{H \to 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}}{o}(\|H\|)$$

où L est l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui à H associe $A^2H+AHA+HA^2$.
L'application f est donc différentiable en A et

$$df(A) \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ H & \mapsto & A^2H+AHA+HA^2 . \end{array} \right.$$

2. *Comme l'application f est différentiable en A, elle est continue en A. Cf. Proposition 20.12.*

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 5. [Énoncé] [Indication(s)]

1. • *Vrai.*
   • *Comme* $\mathcal{T}_n(\mathbb{R}) = \text{Vect}\left(\left(E_{i,j}\right)_{1\leq i\leq j\leq n}\right)$, $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ *est un sous-espace vectoriel de dimension finie de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *donc un fermé de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *[10.151].*

2. • *Vrai.*
   • *Soit* $(e_1,\dots,e_n)$ *une base de* E.
   Comme 0_E *est un point de l'ouvert* U *de* E, *il existe* $r>0$ *tel que* $\mathcal{B}_E(0_E,r)\subset U$.
   Les vecteurs $\dfrac{r}{2\|e_1\|}e_1,\dots,\dfrac{r}{2\|e_n\|}e_n$ *sont de norme* $\dfrac{r}{2}$. *Ils appartiennent à* $\mathcal{B}_E(0_E,r)$ *et donc à* U.
   Comme $(e_1,\dots,e_n)$ *une base de* E, *la famille*
   $$\left(\frac{r}{2\|e_1\|}e_1,\dots,\frac{r}{2\|e_n\|}e_n\right)$$
   est une base de E, *formée de vecteurs de* U.

3. • *Faux.*
   • *Prenons pour* f *la fonction partie entière et posons pour tout* $p\in\mathbb{N}$
   $$x_p = 1-\frac{1}{p+1}\,.$$
   La suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 1, *mais*
   $$f(x_p) = E\left(1-\frac{1}{p+1}\right) = 0 \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0\neq 1 = E(1) = f(1)\,.$$
   • **Remarque.** *Cette propriété a un lien ténu avec la continuité de* f. *Cf. caractérisation séquentielle de la continuité ou de la notion de limite [10.108].*

4. • *Faux.*
   • *Raisonnons par l'absurde. Supposons donc que l'adhérence de* $\text{Ker}(Tr)$ *est* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   L'ensemble $\text{Ker}(Tr)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *donc un sous-espace vectoriel de dimension finie de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Il forme dons une partie fermée de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *[10.151]. Ainsi l'adhérence de* $\text{Ker}(Tr)$ *est* $\text{Ker}(Tr)$ *lui-même.*
   On en déduit $\text{Ker}(Tr) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *ce qui est faux puisque* $I_n\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *n'est pas dans le noyau de la trace.*
   •

5. • *Vrai.*
   • *Soit* $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *La matrice* M *admet un nombre fini (éventuellement nul) de valeurs propres réelles.*
   Donc il existe $p_0\in\mathbb{N}^*$, *tel que pour tout* $p\geq p_0$, $\dfrac{1}{p}\notin \text{Spec}_{\mathbb{R}}(M)$, *i.e. tel que la matrice* $M-\dfrac{1}{p}.I_n\in GL_n(\mathbb{R})$.
   De plus, la suite de matrices $\left(M-\dfrac{1}{p}\right)_{p\geq p_0}$ *de* $GL_n(\mathbb{R})$ *converge vers* M.
   Par caractérisation séquentielle de la densité [10.85], $GL_n(\mathbb{R})$ *est dense dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6. • *Faux.*

- *Une propriété de continuité est en jeu et il convient de la démontrer. L'application*

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ C & \mapsto & ACB \end{array} \right.$$

est linéaire. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie, elle est également continue [10.153].
Par caractérisation séquentielle de la continuité ou de la notion de limite [10.108], il vient

$$\varphi(M_p) = AM_pB \xrightarrow[p\to+\infty]{} AMB = \varphi(M)\,.$$