TD2 – calcul différentiel et révisions

Exercice 1 ★★☆☆☆. **[Indication(s)]** **[Un corrigé]**
Titre. Continuité et Dérivée directionnelle.
Énoncé. *Soit l'application* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5}{(y-x^2)^2 + x^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. *Démontrer que la fonction* f *est continue en* $(0,0)$.
2. *Démontrer que la fonction* f *admet une dérivée selon tout vecteur non nul* $h = (h_1, h_2)$ *de* $\mathbb{R}^2$ *au point* $(0,0)$.

Exercice 2 ★☆☆☆☆. **[Indication(s)]** **[Un corrigé]**
Titre. Dérivée partielle et fonction polynomiale.
Énoncé. *Soit* $P := \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, *où* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. *Posons*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (x,y) & \mapsto & P(x+iy) \end{array} \right.$$

Démontrer que f *possède des dérivées partielles dans la base canonique de* $\mathbb{R}^2$ *au point* $(0,0)$ *et les exprimer en fonction des coefficients de* P.

Exercice 3 ★★★☆☆. **[Indication(s)]** **[Un corrigé]**
Titre. Dérivée partielle et fonction développable en série entière.
Énoncé. *Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$, *où* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. *Soit*

$$S \left| \begin{array}{ccc} D(0,R) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{array} \right.$$

sa somme. Posons :

$$f \left| \begin{array}{ccc} B_{\|.\|_2}((0,0),R) := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} < R \right\} & \to & \mathbb{C} \\ (x,y) & \mapsto & S(x+iy) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x+iy)^n \end{array} \right.$$

Montrer que f *possède des dérivées partielles dans la base canonique de* $\mathbb{R}^2$ *au point* $(0,0)$ *et les exprimer en fonction des coefficients* a_n $(n \in \mathbb{N})$ *de la série entière.*
N.B. *On justifiera soigneusement les échanges de symboles* $\sum$ *et* $\lim$, *si on est amené à en considérer.*

Exercice 4 ★★★☆☆. **[Indication(s)]** **[Un corrigé]**

Titre. Vrai ou Faux sur les espaces vectoriels normés I.

Énoncé. *Répondre par Vrai ou Faux aux questions suivantes.*
Si la réponse est « Vrai », citer un résultat du Chapitre 10 « Espaces vectoriels normés » pour justifier.
Si la réponse est « Faux », argumenter au moyen d'un contre-exemple.

1. *L'application*
$$N \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \mapsto & \left|x+y\right| \end{array} \right.$$
est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

2. *Si* $n \geq 2$ *est un entier naturel non nul, alors*
$$\sup \left\{ \frac{|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}} \; : \; (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0,0,\ldots,0)\} \right\} = \sqrt{n}\,.$$

3. *Si une partie* A *de* $\mathbb{R}^2$ *n'est pas fermée, alors elle est ouverte.*

4. *La partie*
$$A := \left\{ (x,y,z) \; : \; x \in [0,1]\,,\; y \in [0,1]\,;\; z = \frac{(x+2)^2+(y+1)^2}{x^2+y^2+1} \right\}$$
n'est pas fermée dans $\mathbb{R}^3$.

5. *Les deux normes* N_∞ *et* N_1 *sur* $E := \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ *définies par, pour tout* $f \in E$
$$N_\infty(f) = \max_{x\in[0,1]} \left|f(x)\right| \qquad \text{et} \qquad N_1(f) = \int_0^1 \left|f(x)\right|\, dx$$
sont équivalentes.

6. *Si* (E,N) *est un espace vectoriel normé, la partie de* E^2
$$B = \left\{(x,y) \in E^2 \; : \; N(x) < N(y)\right\}$$
est ouverte, si E^2 *est muni de la norme infinie.*

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 1. [Énoncé] [Un corrigé]

1. • *Il s'agit de prouver que*

$$f(x,y) = \frac{x^5}{(y-x^2)^2+x^4} \xrightarrow[\|(x,y)\|=\sqrt{x^2+y^2}\to 0]{} f(0,0)=0;.$$

   • *Justifier que pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$(y-x^2)^2+x^4 \geq x^4$$

   et dominer $f(x,y)$ *par une quantité mettant en jeu* $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

   • *Théorème d'encadrement.*

2. • *Fixer* $h=(h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\}$ *et simplifier l'écriture de* $\dfrac{f((0,0)+t(h_1,h_2))-f(0,0)}{t}$.

   • *Étudier la limite éventuelle de* $\dfrac{f((0,0)+t(h_1,h_2))-f(0,0)}{t}$ *lorsque* t *tends vers* 0*, en distinguant deux cas :* $h_2 \neq 0$ *et* $h_2 = 0$.

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 2. [Énoncé] [Un corrigé]

On note (e_1, e_2) *la base canonique de* $\mathbb{R}^2$.

- *Pour la première dérivée partielle de* f *en* $(0,0)$*, étudier la limite éventuelle de*
$$\frac{f((0,0)+te_1)-f(0,0)}{t}=\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\frac{P(t)-P(0)}{t}$$
lorsque t *tend vers* 0.

- *Pour la deuxième dérivée partielle de* f *en* $(0,0)$*, étudier la limite éventuelle de*
$$\frac{f((0,0)+te_2)-f(0,0)}{t}=\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\frac{P(it)-P(0)}{t}$$
lorsque t *tend vers* 0.

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 3. **[Énoncé]** **[Un corrigé]**

On note (e_1, e_2) *la base canonique de* $\mathbb{R}^2$.

- - *Pour la première dérivée partielle de* f *en* $(0,0)$, *étudier la limite éventuelle de*

  $$\frac{f((0,0)+te_1)-f(0,0)}{t} = \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \frac{S(t)-S(0)}{t}$$

  lorsque t *tend vers* 0.

  - *On pourra s'appuyer sur le cours qui assure que la restriction de la fonction* $S_{|]-R,R[}$ *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $]-R,R[$ *et que l'on dispose de formules pour ses dérivées itérées.*

- - *Pour la deuxième dérivée partielle de* f *en* $(0,0)$, *étudier la limite éventuelle de*

  $$\frac{f((0,0)+te_2)-f(0,0)}{t} = \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \frac{S(it)-S(0)}{t}$$

  lorsque t *tend vers* 0.

  - *On pourra s'appuyer sur la continuité d'une somme de série entière auxiliaire, en déterminant avec soin son rayon de convergence.*

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 4. [Énoncé] [Un corrigé]

1. *Quid de la propriété de séparation ?*
2. *Inégalité de Cauchy-Schwarz pour l'espace euclidien* $\mathbb{R}^n$ *muni de son produit scalaire usuel.*
3. *Considérer une partie de* $\mathbb{R}^2$ *définie à l'aide d'une inégalité stricte et d'une inégalité large.*
4. *La partie A vérifie-t-elle la caractérisation séquentielle des fermés ?*
5. *Considérer les fonctions "arcs" définies par, pour tout* $n \in \mathbb{N}$

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \right. .$$

   Quid de la convergence de la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *pour la norme* N_1 *? Et pour la norme* N_∞ *?*

6. . *Caractérisation séquentielle des fermés.*
   . *Une suite converge dans l'espace produit* E^2 *si et seulement si elle converge composante par composante.*

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1. [Énoncé] [Indication(s)]

1. *On souhaite démontrer que*

$$f(x,y)=\frac{x^5}{(y-x^2)^2+x^4}\xrightarrow[\|(x,y)\|=\sqrt{x^2+y^2}\to 0]{} f(0,0)=0;.$$

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. *Comme* $(y-x^2)^2\geq 0$, $(y-x^2)^2+x^4\geq x^4$. *Donc*

$$0\leq \left|f(x,y)\right|=\left|\frac{x^5}{(y-x^2)^2+x^4}\right|=\frac{|x|\,x^4}{(y-x^2)^2+x^4}\leq\frac{|x|\,x^4}{x^4}=|x|\leq\sqrt{x^2+y^2}=\|(x,y)\|\ .$$

Ainsi, par Théorème d'encadrement, $f(x,y)\xrightarrow[\|(x,y)\|\to 0]{} f(0,0)$.

2. *Soit* $h=(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0\}$. *Donc au moins l'un des nombres* h_1,h_2 *est non nul.*
Soit $t\in\mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned}\frac{f((0,0)+t(h_1,h_2))-f(0,0)}{t}&=\frac{f(th_1,th_2)}{t}\\&=\frac{1}{t}\,\frac{t^5\,h_1^5}{(t\,h_2-t^2\,h_1^2)^2+t^4\,h_1^4}\\&=\frac{t^4\,h_1^5}{t^2\,h_2^2-2t^3\,h_1^2\,h_2+2t^4\,h_1^4}\\&=\frac{t^2\,h_1^5}{h_2^2-2t\,h_1^2\,h_2+2t^2\,h_1^4}\end{aligned}$$

On distingue alors deux cas.

- **Cas où** $h_2\neq 0$.
Si $h_2\neq 0$, *alors*

$$\frac{f((0,0)+t(h_1,h_2))-f(0,0)}{t}\underset{t\to 0}{\sim}\frac{t^2\,h_1^5}{h_2^2}\xrightarrow[t\to 0]{}0\,;$$

Donc f *est dérivable en* $(0,0)$ *suivant le vecteur* $h=(h_1,h_2)$ *et*

$$D_hf(0,0)=0\,.$$

- **Cas où** $h_2=0$.
Supposons $h_2=0$. *Alors comme* $h\neq(0,0)$, $h_1\neq 0$.

$$\frac{f((0,0)+t(h_1,h_2))-f(0,0)}{t}=\frac{t^2\,h_1^5}{2t^2\,h_1^4}=\frac{h_1}{2}\xrightarrow[t\to 0]{}\frac{h_1}{2}\,;$$

Donc f *est dérivable en* $(0,0)$ *suivant le vecteur* $h=(h_1,h_2)$ *et*

$$D_hf(0,0)=\frac{h_1}{2}\,.$$

Un corrigé de l'exercice 2. [Énoncé] [Indication(s)]

On note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

- **Première dérivée partielle.**
  Soit $t \in \mathbb{R}^*$.

$$\frac{f((0,0)+te_1)-f(0,0)}{t} = \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \frac{P(t)-P(0)}{t} = \frac{1}{t}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k t^k - a_0\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k t^{k-1}$$

  Nous en déduisons

$$\frac{f((0,0)+te_1)-f(0,0)}{t} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} t^k \xrightarrow[t\to 0]{} a_1 \,.$$

  Donc la fonction f admet une dérivée partielle première en $(0,0)$ dont la valeur est donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = a_1 \,.$$

- **Deuxième dérivée partielle.**
  Soit $t \in \mathbb{R}^*$.

$$\frac{f((0,0)+te_2)-f(0,0)}{t} = \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \frac{P(it)-P(0)}{t} = \frac{1}{t}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k (it)^k - a_0\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k i^k t^{k-1}$$

  Nous en déduisons

$$\frac{f((0,0)+te_2)-f(0,0)}{t} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} i^{k+1} t^k \xrightarrow[t\to 0]{} a_1\, i \,.$$

  Donc la fonction f admet une dérivée partielle seconde en $(0,0)$ dont la valeur est donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = a_1\, i \,.$$

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3. [Énoncé] [Indication(s)]

On note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

- **Première dérivée partielle.**

  - *Soit $t \in \mathbb{R}^*$.*
$$\frac{f((0,0)+te_1)-f(0,0)}{t} = \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \frac{S(t)-S(0)}{t}$$
  - *D'après le cours, nous savons que la fonction*
$$S_{|]-R,R[} \left| \begin{array}{ccc}]-R,R[& \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \end{array} \right.$$
est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ et que ses dérivées itérées s'obtiennent en dérivant terme-à-terme. La fonction $S_{|]-R,R[}$ est en particulier dérivable sur $]-R,R[$ et, pour tout $t \in]-R,R[$
$$\left(S_{|]-R,R[}\right)'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1}.$$
  - *Ainsi*
$$\frac{f((0,0)+te_1)-f(0,0)}{t} = \frac{S(t)-S(0)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} \left(S_{|]-R,R[}\right)'(0) = a_1.$$
Donc la fonction f admet une dérivée partielle première en $(0,0)$ dont la valeur est donnée par
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = a_1.$$

- **Deuxième dérivée partielle.**

  - *Soit $t \in \mathbb{R}^*$.*
$$\begin{aligned} \frac{f((0,0)+te_2)-f(0,0)}{t} &= \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} \\ &= \frac{S(it)-S(0)}{t} \\ &= \frac{1}{t}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (it)^k - a_0\right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} a_k i^k t^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+1} i^{k+1} t^k \end{aligned}$$
  - *On observe que, pour tout $r \in \mathbb{R}_+$, la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si la suite $\left(a_{n+1} i^{n+1} r^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, puisque i est de module 1. Donc le rayon de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_{n+1} i^{n+1} z^n$ est le même que celui de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Il vaut donc R.*

- *D'après le cours, la fonction*

$$T \left| \begin{array}{ccc} D(0,R) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+1}\, i^{k+1} z^k \end{array} \right.$$

est bien définie et continue sur $D(0,R)$*. En particulier*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+1}\, i^{k+1} t^k := T(t) \xrightarrow[t \to 0]{} T(0) = a_1\, i\ .$$

- *Nous en déduisons*

$$\frac{f((0,0)+te_2) - f(0,0)}{t} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+1}\, i^{k+1} t^k \xrightarrow[t\to 0]{} a_1\, i\ .$$

Donc la fonction f *admet une dérivée partielle seconde en* $(0,0)$ *dont la valeur est donnée par*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = a_1\, i\ .$$

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4. [Énoncé] [Indication(s)]

1.
   - *Faux.*
   - *Le vecteur* $(1,-1)$ *est non nul mais* $N(1,-1)=0$. *L'application* N *ne vérifie donc pas la propriété de séparation.*

2.
   - *Vrai.*
   - *Soit* $(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n\setminus\{(0,0,\dots,0)\}$.
     D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ *muni de son produit scalaire usuel*
     $$\begin{array}{rcl} |x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n| & = & \langle\,(|x_1|,|x_2|,\dots,|x_n|)\,,(1,1,\dots,1)\,\rangle \\ & \leq & \sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}\,\sqrt{1^2+1^2+\ldots+1^2} \\ & = & \sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}\,\sqrt{n}\,. \end{array}$$
     Ainsi
     $$\frac{|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}}\leq\sqrt{n}\,.$$
     Donc $\sqrt{n}$ *est un majorant de l'ensemble*
     $$(\star):=\left\{\frac{|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}}\ :\ (x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n\setminus\{(0,0,\dots,0)\}\right\}.$$
     Si $(|x_1|,|x_2|,\dots,|x_n|)=(1,1,\dots,1)$, *alors* $\dfrac{|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}}=\sqrt{n}$. *Le majorant* $\sqrt{n}$ *de* $(\star)$ *est également élément de* $(\star)$. *Aussi* $\sqrt{n}$ *est-il le maximum de l'ensemble* $(\star)$ *et a fortiori sa borne supérieure.*

3.
   - *Faux.*
   - *Considérons la partie*
     $$T:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ 0<x\leq 1\right\}.$$
     Elle n'est pas fermée car la suite $\left(\left(\dfrac{1}{n},0\right)\right)_{n\geq1}$ *d'éléments de* T, *converge vers* $(0,0)$ *dans* $\mathbb{R}^2$, *avec* $(0,0)\notin T$. *Cf. caractérisation séquentielle des fermés.*
     Elle n'est pas ouverte non plus, car la suite $\left(\left(1+\dfrac{1}{n},0\right)\right)_{n\geq1}$ *d'éléments de* $R^2\setminus T$, *converge vers* $(1,0)$ *dans* $\mathbb{R}^2$, *avec* $(1,0)\notin\mathbb{R}^2\setminus T$. *Cf. caractérisation séquentielle des fermés.*

4.
   - *Faux.*
   - *Soient* $\big((x_n,y_n,z_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de A, qui converge vers* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. *On a donc*
     $$x_n\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{R}}x\qquad y_n\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{R}}y\qquad z_n\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{R}}z\,.$$
     Soit $n\in\mathbb{N}$. *Comme* $(x_n,y_n,z_n)\in A$
     $$0\leq x_n\leq 1\qquad 0\leq y_n\leq 1\qquad z_n=\frac{(x_n+2)^2+(y_n+1)^2}{x_n^2+y_n^2+1}\,.$$

Par passage à la limite dans des inégalités larges et opérations sur les suites convergentes, il vient

$$0 \leq x \leq 1 \qquad 0 \leq y \leq 1 \qquad z = \frac{(x+2)^2+(y+1)^2}{x^2+y^2+1}\,.$$

Donc $(x,y,z) \in A$.
La partie A *de* $\mathbb{R}^3$ *est donc fermée. Cf. caractérisation séquentielle des fermés.*

5.
- *Faux.*
- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on considère la fonction* f_n *de* E *définie par*

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n\,. \end{array} \right.$$

On observe

$$N_1(f_n) = \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\,.$$

Donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N_1} 0_E$.
Mais la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *ne converge pas vers* 0_E *pour la norme* N_∞. *En effet*

$$N_\infty(f_n - 0_E) = N_\infty(f_n) = 1 \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\,.$$

On a exhibé une suite de fonctions de E *qui converge vers* 0_E *pour la norme* N_1 *mais pas pour la norme* N_∞. *Les deux normes* N_∞ *et* N_1 *ne sont donc pas équivalentes.*

6.
- *Vrai.*
- *Démontrons que*

$$E^2 \setminus B = \left\{(x,y) \in E^2 \,:\, N(x) \geq N(y)\right\}$$

est fermée à l'aide de la caractérisation séquentielle des fermés.
Soit $\left((x_n,y_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* $E^2 \setminus B$ *qui converge vers* $(x,y) \in E^2$, *i.e. telle que*

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N} x \qquad \text{et} \qquad y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N} y\,.$$

La norme sur E *est 1-lipschitzienne (deuxième inégalité triangulaire), donc continue sur* E. *Ainsi*

$$N(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{R}} N(x) \qquad \text{et} \qquad N(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{R}} N(y)\,.$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x_n,y_n) \in E^2 \setminus B$

$$N(x_n) \geq N(y_n)\,.$$

Donc, par passage à la limite dans une inégalité large

$$N(x) \geq N(y)$$

et ainsi $(x,y) \in E^2 \setminus B$.