# TD1 – calcul différentiel et révisions

**Exercice 1 ★★★☆☆. [Indication(s)] [Un corrigé]**
**Titre.** Réduction d'une matrice symétrique de $\mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ avec un bloc de format $n \times n$ de zéros.
**Énoncé.** *Soit $n \geq 2$ un nombre entier. Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ un $n$-uplet de réels non tous nuls et posons :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & \ldots & a_n \\ a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

1. *Montrer que $A$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.*
2. *Quel est le rang de $A$ ?*
3. *En déduire que $0$ est valeur propre de $A$ et que $A$ possède deux autres valeurs propres réelles non nulles, opposées l'une de l'autre.*
4. *Calculer $A^2$, en déduire le spectre de $A$, ainsi que son polynôme caractéristique.*

**Exercice 2 ★★★☆☆. [Indication(s)] [Un corrigé]**
**Titre.** $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
**Énoncé.** *Soit $n \geq 2$ un nombre entier.*
*On considère la norme*

$$\|\cdot\| \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}_+ \\ M & \mapsto & \displaystyle\max_{1 \leq j \leq n} \left( \sum_{i=1}^{n} \left| [M]_{i,j} \right| \right) \end{array} \right.$$

*sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.*

1. (a) *Calculer $\|I_n\|$ et démontrer*
$$\forall (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \|A \times B\| \leq \|A\| \times \|B\| \;.$$
   (b) *Soit $H$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|H\| < 1$.*
      i. *Justifier que la série $\sum_{p \geq 0} H^p$ converge dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.*
      ii. *Calculer $(I_n - H) \times \left( \sum_{p=0}^{+\infty} H^p \right)$. Qu'en déduire ?*
   (c) *Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Déduire de 1.(b) l'inclusion*
$$\left\{ M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \, : \, \|M - A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|} \right\} =: \mathscr{B}\left(A, \frac{1}{\|A^{-1}\|}\right) \subset GL_n(\mathbb{R}).$$
   *Quelle propriété topologique de $GL_n(\mathbb{R})$ a-t-on ainsi établi ?*
2. (a) *Démontrer que l'application*
$$Det \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \operatorname{Det}(M) \end{array} \right.$$
   *est continue.*
   (b) *En déduire une nouvelle démonstration de la propriété topologique de $GL_n(\mathbb{R})$ obtenue en 1.(c).*

**Exercice 3 ★★☆☆☆. [Indication(s)] [Un corrigé]**
**Titre.** Continuité d'une fonction de deux variables.
**Énoncé.** *On considère deux fonctions*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y)=0 \\ \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq 0. \end{cases} \end{array} \right. \qquad g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y)=0 \\ \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq 0. \end{cases} \end{array} \right. .$$

*Démontrer que la fonction $f$ est continue en $(0,0)$ et que la fonction $g$ est discontinue en $(0,0)$.*

**Exercice 4 ★★☆☆☆. [Indication(s)] [Un corrigé]**
**Titre.** Vrai ou Faux sur la convexité.
**Énoncé.** *Répondre par Vrai ou Faux aux questions suivantes.*
*Si la réponse est « Vrai », citer un résultat du Chapitre 9 « Convexité » pour justifier.*
*Si la réponse est « Faux », argumenter au moyen d'un contre-exemple.*

1. *La rédaction*

   « *Comme* $\ln$ *est concave,* $\ln(x) \leq x-1$, *pour tout* $x>0$. »

   *est-elle satisfaisante ?*

2. *La réunion de deux parties convexes de* $\mathbb{R}^2$ *est une partie convexe de* $\mathbb{R}^2$.

3. *L'intersection de deux parties convexes de* $\mathbb{R}^2$ *est une partie convexe de* $\mathbb{R}^2$.

4. *Une fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *convexe et bornée sur* $\mathbb{R}$ *est constante.*

5. *La composée de deux fonctions convexes est convexe.*

6. *L'inégalité de Young s'énonce comme suit.*

   « *Pour tout* $p, q \in \mathbb{R}_+^*$, *pour tout* $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $xy \leq \dfrac{1}{p}x^p + \dfrac{1}{q}y^q$ . »

## INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 1. [Énoncé] [Un corrigé]

1. *On peut établir la diagonalisabilité de $A$ sur $\mathbb{R}$, sans calcul, en observant ses coefficients.*

2. *Si $C_0, C_1, \ldots, C_n$ sont les vecteurs colonne de $A$, alors*

$$\mathrm{Rg}(A) := \dim\left(\mathrm{Vect}\left(C_0, C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_n\right)\right).$$

*Déterminer alors soigneusement une base de $\mathrm{Vect}(C_0, C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_n)$.*

3. 
   - *Théorème du rang.*
   - *Quelle propriété possède le polynôme caractéristique d'une matrice diagonalisable et que peut-on dire des ordres de multiplicité de ses racines ?*
   - *Que vaut la trace d'une matrice diagonalisable ?*

4. 
   - *Introduire l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = A$, où $\mathscr{B} = (e_0, e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.*
   - *Calculer $f^2(e_0), f^2(e_1), \ldots, f^2(e_n)$ et en déduire $A^2$.*
   - *Donner deux expressions de $\mathrm{Tr}\left(A^2\right)$, l'une spectrale, l'autre en fonction des coefficients $a_1, \ldots, a_n$. En déduire le spectre de $A$, les dimensions de chacun des sous-espaces propres de $A$, puis le polynôme caractéristique $\chi_A$ de $A$.*

## INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 2. [Énoncé] [Un corrigé]

1. (a)
   - *Commencer par calculer* $\sum_{i=1}^{n} \left|[I_n]_{i,j}\right|$, *pour tout* $j \in [\![1, n]\!]$, *afin de déterminer* $\|I_n\|$.
   - *Considérer deux matrices* $A$ *et* $B$ *de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *et démontrer tout d'abord que pour tout* $j \in [\![1, n]\!]$

   $$\sum_{i=1}^{n} \left|[AB]_{i,j}\right| \leq \|A\| \times \|B\| \ .$$

   (b) i. *Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toute série absolument convergente est convergente.*

   ii. *Calculer, pour tout* $q \in \mathbb{N}$, $(I_n - H) \times \left(\sum_{p=0}^{q} H^p\right)$, *puis rédiger un passage à la limite soigné, en faisant tendre* $q$ *vers* $+\infty$, *avec un argument de continuité à mettre en valeur.*

   (c)
   - *Considérer* $M \in \mathscr{B}\left(A, \frac{1}{\|A^{-1}\|}\right)$ *et observer* $M = A - (A - M) = A\big(I_n - (I_n - A^{-1}M)\big)$.
   - *Que dire d'une partie de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *qui est un voisinage de chacun de ses points ?*

2. (a) *Souligner une propriété algébrique de l'application Det et utiliser la finitude des dimensions.*

   (b) *L'image réciproque d'un ouvert du but d'une application continue est un ouvert de sa source.*

## INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 3. [Énoncé] [Un corrigé]

- *Démontrer* $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{\|\cdot\|} f(0,0) = 0$, *i.e.*

$$\frac{x^2 y^2}{x^2+y^2} \xrightarrow[\|(x,y)\|:=\sqrt{x^2+y^2}\to 0]{} 0$$

  *en commençant par dominer* $x^2 y^2$ *par une quantité dépendant de* $\|(x,y)\|$.

- *Démontrer la discontinuité de* $g$ *en* $(0,0)$ *à l'aide du critère séquentiel.*
  *Pour cela, exhiber deux suites de nombres réels* $(x_n)$ *et* $(y_n)$ *qui convergent vers* $0$, *mais telles que la quantité* $g(x_n, y_n)$ *ne tend pas vers* $g(0,0) = 0$ *lorsque* $n$ *tend vers* $+\infty$.

## INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 4. [Énoncé] [Un corrigé]

1. *Applique-t-on un Théorème ? Combien d'inégalités peut-on tirer de la concavité de* $\ln$ *?*
2. *Considérer deux boules dans* $\mathbb{R}^2$.
3. *Démontrer le résultat en revenant à la définition de partie convexe. Cf. stabilité par passage aux segments.*
4. *Supposer que la fonction* $f$ *prend en deux points* $a$ *et* $b$ *distincts deux valeurs* $f(a)$ *et* $f(b)$ *disctinctes et analyser le comportement asymptotique de* $f$ *en* $-\infty$ *ou* $+\infty$ *grâce à l'inégalité des trois pentes.*
5. *Tester l'énoncé sur une fonction convexe simple et une fonction affine (donc convexe et concave) décroissante.*
6. *Cette inégalité peut-elle être vraie ? N'y a-t-il pas une hypothèse supplémentaire sur* $p$ *et* $q$ *?*

## UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1. [Énoncé] [Indication(s)]

1. *La matrice $A$ est symétrique réelle donc orthodiagonalisable sur $\mathbb{R}$, d'après le Théorème spectral.*

2. - *On note $C_0, C_1, \ldots, C_n$ les vecteurs colonnes de la matrice $M$.*
   *Les scalaires $a_1, \ldots, a_n$ ne sont pas tous nuls. Soit donc $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $a_i \neq 0$. Ainsi a-t-on, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$*
   $$C_j = \frac{a_j}{a_i} C_i \,.$$
   *On a donc*
   $$\mathrm{Rg}(A) := \dim\left(\mathrm{Vect}\left(C_0, C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_n\right)\right) = \dim\left(\mathrm{Vect}\left(C_0, C_i\right)\right) \,.$$
   *La première composante de $C_0$ est nulle, alors que la première composante de $C_i$, qui est $a_i$, ne l'est pas. La $(i+1)$-ème composante de $C_0$ est non nulle (elle vaut $a_i$) alors que la $(i+1)$-ème composante de $C_i$ est nulle. Les vecteurs $C_0$ et $C_i$ de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ sont donc non colinéaires.*
   *On en déduit que $\mathrm{Rg}(A) = 2$.*

3. - *Par le Théorème du rang, il vient*
   $$\dim \mathrm{Ker}(A) = n+1-2 = n-1 \geq 1$$
   *car $n \geq 2$. Nous en déduisons que $0$ est valeur propre de $A$, i.e. $0 \in Spec_{\mathbb{R}}(A)$, et son sous-espace propre associé, $E_0(A) = \mathrm{Ker}(A)$, a dimension $n-1$.*
   - *Comme $A$ est orthodiagonalisable sur $\mathbb{R}$*
     - *son polynôme caractéristique, qui est un polynôme de degré $n+1$, est scindé sur $\mathbb{R}$ ;*
     - *la multiplicité de chaque valeur propre de $A$ coïncide avec la dimension du sous-espace propre correspondant.*

   *Donc*
   $$\chi_A = X^{n-1}(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)$$
   *où $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont des réels non nuls, éventuellement égaux. Le spectre réel de $A$ est donc*
   $$Spec_{\mathbb{R}}(A) = \{0, \lambda_1, \lambda_2\} \,.$$
   - *Comme $A$ est orthodiagonalisable sur $\mathbb{R}$, il existe $P \in \mathcal{O}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que*
   $$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_1 & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^\top \,.$$
   *Comme deux matrices semblables ont même trace*
   $$\mathrm{Tr}(A) = (n-1).0 + \lambda_1 + \lambda_2 \,.$$
   *Or, on lit sur la matrice $A$ que $\mathrm{Tr}(A) = 0$. Ainsi $\lambda_1 = -\lambda_2$. Les nombres réels $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont donc non nuls et opposés l'un de l'autre.*

4. • *Notons $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{n+1}$ telle que*

$$Mat_{\mathscr{B}}(f) = A$$

*où $\mathscr{B} = (e_0, e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.*

• *On calcule*

$$f^2(e_0) = f\left(\sum_{i=1}^n a_i.e_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i.f(e_i) = \sum_{i=1}^n a_i^2.e_0 = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right).e_0$$

*et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$*

$$f^2(e_j) = f\left(a_j.e_0\right) = \sum_{i=1}^n a_i a_j.e_i\,.$$

*Ainsi*

$$A^2 = \left(Mat_{\mathscr{B}}(f)\right)^2 = Mat_{\mathscr{B}}(f^2) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 & \dots & a_1 a_n \\ 0 & a_2 a_1 & a_2^2 & a_2 a_3 & \dots & a_2 a_n \\ 0 & a_3 a_1 & a_3 a_2 & a_3^2 & \dots & a_3 a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_n a_1 & a_n a_2 & a_n a_3 & \dots & a_n^2 \end{pmatrix}$$

*De plus*

$$A^2 = P \begin{pmatrix} 0^2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0^2 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} P^\top\,.$$

• *De ces deux expression de $A^2$, on déduit*

$$2\sum_{i=1}^n a_i^2 = \mathrm{Tr}\left(A^2\right) = (n-1).0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2$$

*Cette équation et $\lambda_1 = -\lambda_2$ nous livrent que A possède deux autres valeurs propres non nulles*

$$\pm\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\,.$$

*Donc*

$$Spec_{\mathbb{R}}(A) = \left\{0, \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}, -\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\right\}\,.$$

• *Nous savons donc que* 0 *est valeur propre de A avec un sous-espace propre associé de dimension $n-1$, $\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$ est valeur propre de A avec un sous-espace propre associé de dimension 1 et $-\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$ est valeur propre de A avec un sous-espace propre associé de dimension 1. Donc*

$$\chi_A = X^{n-1}\left(X - \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\right)\left(X + \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\right)\,.$$

## UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2. [Énoncé] [Indication(s)]

1. (a)
- *Pour tout* $j \in [\![1,n]\!]$
$$\sum_{i=1}^{n} \left|[I_n]_{i,j}\right| = \sum_{i=1}^{n} \delta_{i,j} = 1$$
*et donc*
$$\|I_n\| = \max_{1\leq j\leq n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|[I_n]_{i,j}\right|\right) = 1\,.$$
- *Soit* $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
*Soit* $j \in [\![1,n]\!]$.
$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\left|[AB]_{i,j}\right| &= \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}[A]_{i,k}[B]_{k,j}\right| && [\textit{définition du produit matriciel}]\\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left|[A]_{i,k}\right|\left|[B]_{k,j}\right| && [\textit{inégalité triangulaire}]\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left|[B]_{k,j}\right|\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n}\left|[A]_{i,k}\right|\right)}_{\leq\|A\|}\\
&\leq \|A\|\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\left|[B]_{k,j}\right|}_{\leq\|B\|}\\
&\leq \|A\|\times\|B\| && [\textit{indépendant de } j]
\end{aligned}$$
*Par passage au* max *sur* $j \in [\![1,n]\!]$, *il vient* $\|AB\| \leq \|A\| \times \|B\|$.

(b) i. *De la question 1, on déduit, au moyen d'un raisonnement par récurrence, que*
$$\forall\, p \in \mathbb{N},\quad 0 \leq \left\|H^p\right\| \leq \|H\|^p\,.$$
*D'après le cours sur les séries géométriques, comme* $\|H\| < 1$, *la série* $\sum_{p\geq 0}\|H\|^p$ *converge.*
*Par théorème de domination sur les séries à termes réels positifs, la série numérique* $\sum_{p\geq 0}\left\|H^p\right\|$ *converge, i.e. la série matricielle* $\sum_{p\geq 0} H^p$ *est absolument convergente.*
*Comme* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est un espace vectoriel de dimension finie, on en déduit que la série matricielle* $\sum_{p\geq 0} H^p$ *converge dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

ii.
- *Pour tout* $q \in \mathbb{N}$
$$(\star)\quad (I_n - H)\times\left(\sum_{p=0}^{q} H^p\right) = I_n - H^{q+1}\quad [\textit{somme télescopique}]$$
- *Pour tout* $q \in \mathbb{N}$
$$0 \leq \left\|H^{q+1}\right\| \leq \|H\|^{q+1}\,.$$
*Comme* $\|H\| < 1$, $\|H\|^{q+1} \xrightarrow[q\to+\infty]{} 0$. *Par Théorème d'encadrement,* $\left\|H^{q+1}\right\| \xrightarrow[q\to+\infty]{} 0$, *i.e;*
$$(\star\star)\qquad H^{q+1} \xrightarrow[q\to+\infty]{} 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\,.$$

- *L'application*

$$\mu \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & (I_n - H)M \end{array} \right.$$

*est linéaire. Comme $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie, l'application $\mu$ est continue et donc*

$$(\star\star\star) \quad (I_n - H) \times \left(\sum_{p=0}^{q} H^p\right) = \mu\left(\sum_{p=0}^{q} H^p\right) \xrightarrow[q\to+\infty]{} \mu\left(\sum_{p=0}^{+\infty} H^p\right) = (I_n - H) \times \left(\sum_{p=0}^{+\infty} H^p\right).$$

- *De $(\star)$, $(\star)$ et $(\star\star\star)$, nous déduisons, en faisant tendre $q$ vers $+\infty$, que*

$$(I_n - H) \times \left(\sum_{p=0}^{+\infty} H^p\right) = I_n .$$

*La matrice $I_n - H$ est donc inversible, d'inverse $\sum_{p=0}^{+\infty} H^p$.*

(c) *Soit $M \in \mathscr{B}\left(A, \frac{1}{\|A^{-1}\|}\right)$.*

- *Comme*

$$M = A - (A - M) = A\big(I_n - (I_n - A^{-1}M)\big)$$

*et que $GL_n(\mathbb{R})$ est stable par multiplication, pour démontrer que $M \in GL_n(\mathbb{R})$, il suffit de prouver que $I_n - (I_n - A^{-1}M) \in GL_n(\mathbb{R})$.*
- *Pour démontrer que $I_n - (I_n - A^{-1}M) \in GL_n(\mathbb{R})$, il suffit de prouver que $\|I_n - MA^{-1}\| < 1$ d'après la question 1.(b).*
- *On observe*

$$I_n - MA^{-1} = AA^{-1} - MA^{-1} = (A - M)\,A^{-1}$$

*et donc*

$$\|I_n - MA^{-1}\| \leq \underbrace{\|A - M\|}_{<1/\|A^{-1}\|}\underbrace{\|A^{-1}\|}_{>0} < 1$$

*Comme pour tout $A \in GL_n(\mathbb{R})$, il existe $r_A := \frac{1}{\|A^{-1}\|} > 0$ tel que $\mathscr{B}(A, r_A) \subset GL_n(\mathbb{R})$, l'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ est, par définition, une partie ouverte de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.*

2. (a)
- *L'application Det est une application $n$-linéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, identifié à $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})^n$, en identifiant une matrice avec le $n$-uplet de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formé par ses vecteurs colonnes, dans $\mathbb{R}$.*
- *Comme $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$ sont des espaces vectoriels de dimension finie, l'application Det est continue.*

(b)
- *La partie $\mathbb{R}^* = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$ est ouverte dans $\mathbb{R}$.*
*Comme l'application Det est continue, la partie*

$$Det^{-1}\left(\mathbb{R}^*\right) := \left\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \,:\, \det(M) \in \mathbb{R}^*\right\} = GL_n(\mathbb{R})$$

*est ouverte dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.*

## UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3. [Énoncé] [Indication(s)]

- *On démontre* $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} f(0,0)=0$, *i.e.*

$$\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \xrightarrow[\|(x,y)\|:=\sqrt{x^2+y^2}\to 0]{} 0\,.$$

*Soit* $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. *Comme* $y^2\geq 0$

$$(\star) \qquad 0\leq x^2\leq x^2+y^2$$

*et comme* $x^2\geq 0$

$$(\star\star) \qquad 0\leq y^2\leq x^2+y^2\,.$$

*Comme les inégalités* $(\star)$ *et* $(\star\star)$ *ne mettent en jeu que des nombres réels positifs ou nul, on peut les multiplier membre-à-membre pour obtenir*

$$0\leq x^2y^2\leq \left(x^2+y^2\right)^2\,.$$

*Comme* $x^2+y^2\geq 0$, *il vient*

$$0\leq f(x,y):=\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\leq x^2+y^2=\left\|(x,y)\right\|^2\,.$$

*Par Théorème d'encadrement,* $f(x,y)\xrightarrow[\|(x,y)\|\to 0]{} 0$.

- *On démontre la discontinuité de* $g$ *en* $(0,0)$ *à l'aide du critère séquentiel.*
*Posons, pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$

$$x_n:=\frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad y_n:=\frac{1}{n}\,.$$

*Comme les suites numériques* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *convergent vers* $0$, *la suite vectorielle* $\big((x_n,y_n)\big)\, n\in\mathbb{N}^*$ *tend vers* $(0,0)$ *lorsque* $n$ *tend vers* $+\infty$.
*Comme*

$$g(x_n,y_n)=\frac{x_ny_n}{x_n^2+y_n^2}=\frac{1}{2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{2}\neq 0=:g(0,0)$$

*la fonction* $g$ *n'est pas continue en* $(0,0)$.

**UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4.** [Énoncé] [Indication(s)]

*Répondre par Vrai ou Faux aux questions suivantes.*
*Si la réponse est « Vrai », citer un résultat du Chapitre 9 « Convexité » pour justifier.*
*Si la réponse est « Faux », argumenter au moyen d'un contre-exemple.*

1.
   - *Faux.*
   - *Il faut justifer la concavité de* $\ln$. *Ensuite, une fonction concave dérivable livre de nombreuses inégalités (trois pentes, tangentes). Il faut donc préciser comment, à partir de la concavité de la fonction, l'inégalité est obtenue.*
   - *Voici une rédaction renforcée.*
     *La fonction* $\ln$ *est deux fois dérivable sur l'intervalle* $\mathbb{R}_+^*$ *et pour tout* $x > 0$, $\ln''(x) = -1/x^2 < 0$. *D'après le théorème 9.45, la fonction* $\ln$ *est concave sur* $\mathbb{R}_+^*$. *D'après le Théorème 9.48, le graphe de la fonction* $\ln$ *est donc en dessous de toutes ses tangentes sur* $\mathbb{R}_+^*$, *en particulier en dessous de sa tangente au point d'abscisse* $1$, *i.e. pour tout* $x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$.

2.
   - *Faux, même si les deux parties convexes ont une intersection non vide.*
   - *Considérons les boules fermées* $\overline{\mathscr{B}((0,0),1)}$ *et* $\overline{\mathscr{B}((2,0),1)}$ *de* $\mathbb{R}^2$, *pour la norme euclidienne, qui ont pour intersection* $\{(1,0)\}$.
     *Ce sont des boules donc des parties convexes de* $\mathbb{R}^2$.
     *Le point* $A = (0,1)$ *appartient à* $\overline{\mathscr{B}((0,0),1)}$ *et le point* $B = (2,1)$ *appartient à* $\overline{\mathscr{B}((2,0),1)}$. *Donc les points A et B appartiennent à* $\overline{\mathscr{B}((0,0),1)} \cup \overline{\mathscr{B}((2,0),1)}$.
     *Or le point* $C = (1,1)$, *qui appartient au segment* $[A,B]$, *n'appartient pas à* $\overline{\mathscr{B}((0,0),1)} \cup \overline{\mathscr{B}((2,0),1)}$.
     *En effet*
     $$\|(1,1)-(0,0)\| = \sqrt{2} > 1 \quad \text{et} \quad \|(1,1)-(2,0)\| = \sqrt{2} > 1\,.$$
     *Donc* $\overline{\mathscr{B}((0,0),1)} \cup \overline{\mathscr{B}((2,0),1)}$ *n'est pas une partie convexe de* $\mathbb{R}^2$.

3.
   - *Vrai.*
   - *Soient* $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ *deux parties convexes de* $\mathbb{R}^2$.
     *Soient* $A, B \in \mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$. *Soit* $C \in [A,B]$.
     *Comme* $A, B \in \mathscr{C}_1$, $C \in [A,B]$ *et* $\mathscr{C}_1$ *est convexe,* $C \in \mathscr{C}_1$. *Comme* $A, B \in \mathscr{C}_2$, $C \in [A,B]$ *et* $\mathscr{C}_2$ *est convexe,* $C \in \mathscr{C}_2$. *Donc* $C \in \mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$.
     *La partie* $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$ *de* $\mathbb{R}^2$ *est donc convexe.*

4.
   - *Vrai.*
   - *Soit une fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *convexe et bornée sur* $\mathbb{R}$. *Raisonnons par l'absurde, en supposant que* $f$ *n'est pas constante. Il existe donc deux réels* $a, b$, *distincts, tels que* $f(a) \neq f(b)$.
     *On distingue 4 cas :*
     $$(a < b \text{ et } f(a) < f(b)) \qquad (a < b \text{ et } f(a) > f(b)) \qquad (a > b \text{ et } f(a) < f(b)) \qquad (a > b \text{ et } f(a) > f(b))\,.$$
     *On traite le premier, les trois autres s'étudiant de manière analogue.*
     *Supposons donc que* $a < b$ *et que* $f(a) < f(b)$. *D'après l'inégalité des trois pentes, pour tout* $x > b$, *on a*
     $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$$
     *et donc*
     $$\underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{>0}(x-b) + f(b) \leq f(x)\,.$$
     *Par Théorème de domination,* $f(x)$ *tend vers* $+\infty$, *lorsque* $x$ *tend vers* $+\infty$, *ce qui contredit le caractère borné de* $f$ *sur* $\mathbb{R}$.

5. - *Faux.*
   - *D'après le Théorème 9.45 (Fonctions convexes deux fois dérivables), les fonctions*

$$f : [0,+\infty[ \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto x^2 \qquad\qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto -x$$

   *sont convexes. Mais la fonction* $g \circ f : [0,+\infty[ \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto -x^2$ *n'est pas convexe, toujours d'après le théorème 9.45. En effet, la fonction* $g \circ f$ *est deux fois dérivable sur* $[0,+\infty[$ *et*

$$\forall\, x \geq 0, \quad \left(g \circ f\right)''(x) = -2 < 0\,.$$

6. - *Faux.*
   - *L'identité*

$$\text{« Pour tout } p, q \in \mathbb{R}_+^*, \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R}_+^*,\ xy \leq \frac{1}{p}\,x^p + \frac{1}{q}\,y^q\,. \text{ »}$$

   *est fausse. Raisonnons par l'absurde et supposons la vraie. On la spécialise à* $x = y = 1$ *et on fait tendre* $p$ *et* $q$ *vers* $+\infty$. *Alors on obtient* $1 \leq 0$.
   - *L'inégalité de Taylor-Young s'énonce comme suit. Pour tout* $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ *tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *pour tout* $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $xy \leq \frac{1}{p}\,x^p + \frac{1}{q}\,y^q$ . *Elle résulte de la concavité de* ln *et de la croissance de* exp.