Recueil d'exercices de calcul différentiel

Exercice 1 ★★☆☆☆. **[Indication(s)]** **[Un corrigé]**
Titre. Continuité d'une fonction de deux variables.
Énoncé. *On considère deux fonctions*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y)=0 \\ \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq 0. \end{cases} \end{array} \right. \qquad g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y)=0 \\ \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq 0. \end{cases} \end{array} \right. .$$

Démontrer que la fonction f est continue en $(0,0)$ et que la fonction g est discontinue en $(0,0)$.

Exercice 2 ★★☆☆☆. **[Indication(s)]** **[Un corrigé]**
Titre. Continuité et Dérivée directionnelle.
Énoncé. *Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5}{(y-x^2)^2+x^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

1. *Démontrer que la fonction f est continue en $(0,0)$.*
2. *Démontrer que la fonction f admet une dérivée selon tout vecteur non nul $h=(h_1,h_2)$ de $\mathbb{R}^2$ au point $(0,0)$.*

Exercice 3 ★☆☆☆☆. **[Indication(s)]** **[Un corrigé]**
Titre. Dérivée partielle et fonction polynomiale.
Énoncé. *Soit $P := \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, où $n\in\mathbb{N}^*$ et $a_0,a_1,\dots,a_n\in\mathbb{C}$. Posons*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (x,y) & \mapsto & P(x+iy) \end{array} \right.$$

Démontrer que f possède des dérivées partielles dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ au point $(0,0)$ et les exprimer en fonction des coefficients de P.

Exercice 4 ★★★☆☆. **[Indication(s)]** **[Un corrigé]**
Titre. Dérivée partielle et fonction développable en série entière.
Énoncé. *Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$, où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Soit*

$$S \left| \begin{array}{ccc} D(0,R) := \{z\in\mathbb{C} : |z|<r\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{array} \right.$$

sa somme. Posons :

$$f \left| \begin{array}{ccc} B_{\|.\|_2}((0,0),R) := \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2}<R \right\} & \to & \mathbb{C} \\ (x,y) & \mapsto & S(x+iy) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x+iy)^n \end{array} \right.$$

Montrer que f possède des dérivées partielles dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ au point $(0,0)$ et les exprimer en fonction des coefficients a_n ($n \in \mathbb{N}$) de la série entière.
N.B. *On justifiera soigneusement les échanges de symboles $\sum$ et $\lim$, si on est amené à en considérer.*

Exercice 5 ★☆☆☆☆. **[Indication(s)]** **[Un corrigé]**
Titre. Différentiabilité et différentielle en tout point d'un polynôme en deux variables.
Énoncé. *On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|\cdot\|$ définie par*

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \|(x,y)\| = \max\left(|x|,|y|\right) .$$

Soit l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^3 + xy + y^2 . \end{array} \right.$$

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ fixé.
Démontrer que l'application f est différentiable en (a,b) et préciser sa différentielle $df(a,b)$ en ce point.

Exercice 6 ★☆☆☆☆. **[Indication(s)]** **[Un corrigé]**
Titre. Différentiabilité et différentielle en tout point d'une application linéaire.
Énoncé. *Soient (E,N_E) et (F,N_F) deux espaces vectoriels normés de dimension finie.*
Soit f une application linéaire de E dans F.

1. *Soit $a \in E$ fixé. Démontrer que l'application f est différentiable en a et préciser sa différentielle $df(a)$ en ce point.*
2. *On considère la différentielle de f définie par*

$$df \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathscr{L}(E,F) \\ a & \mapsto & df(a) . \end{array} \right.$$

   Quelle propriété remarquable possède l'application df ?

Exercice 7 ★☆☆☆☆. **[Indication(s)]** **[Un corrigé]**
Titre. Applications différentiables en un point dont les dérivées partielles coïncident en ce point.
Énoncé. *Soient*

- *F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N_F ;*
- *Ω une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$;*
- *a un point de Ω ;*
- *$f : \Omega \to F$ une application différentiable en a ;*
- *$g : \Omega \to F$ une application différentiable en a.*

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est notée $\mathscr{B}_0 = (e_1, \ldots, e_n)$.

1. *Justifier l'existence, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial x_i}(a)$, puis en donner une expression en fonction des différentielles $df(a)$ et $dg(a)$ de f et g en a.*
2. *On suppose que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \dfrac{\partial g}{\partial x_i}(a)$. Démontrer que les différentielles $df(a)$ et $dg(a)$ sont égales.*

Exercice 8 ★★☆☆☆. **[Indication(s)]** **[Un corrigé]**
Titre. Différentiabilité et différentielle en tout point de l'élévation au cube dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Énoncé. *Soit $n \geq 2$ un nombre entier.*
On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme d'algèbre unitaire, par exemple de la norme $\|\cdot\|$ définie par

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \|M\| := \max_{1\leq j\leq n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|[M]_{i,j}\right|\right).$$

Soit l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A^3 . \end{array}\right.$$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ fixé.

1. *Démontrer que l'application f est différentiable en A et préciser sa différentielle $df(A)$ en ce point.*
2. *L'application f est-elle continue en A ?*

Exercice 9 ★★★☆☆. **[Indication(s)]** **[Un corrigé]**
Titre. Calcul de matrices Jacobiennes.
Énoncé. *On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|\cdot\|$ définie par*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \left\|(x,y)\right\| = \max(|x|,|y|)$$

et on note (e_1, e_2) sa base canonique. On considère les fonctions f et g définies par

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,;\,(x,y) \mapsto \sin(x-y) \qquad \text{et} \qquad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,;\,(x,y) \mapsto (x+y, x-y)\,.$$

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

1. *Démontrer que f est différentiable en (a,b) et donner sa matrice Jacobienne en (a,b).*
2. *Justifier que g est différentiable en (a,b) et donner sa matrice Jacobienne en (a,b).*

Exercice 10 ★★★★☆. **[Indication(s)]** **[Un corrigé]**
Titre. Différentiabilité et différentielle du déterminant en I_n.
Énoncé. *Soit $n \geq 2$ un nombre entier.*
On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|$ définie par

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \|M\| := \max_{1\leq i,j\leq n}\left|[M]_{i,j}\right|.$$

Soit l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & \mathrm{Det}(A) . \end{array}\right.$$

1. *Soit $H = \left(h_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.*
   (a) *Soit σ une bijection de l'ensemble $[\![1,n]\!]$ dans lui-même, i.e. $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On suppose que $\sigma \neq \mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}$. On note*

   $$Fix(\sigma) := \left\{i \in [\![1,n]\!] \,:\, \sigma(i) = i\right\}$$

   l'ensemble des points fixes de σ.
      i. *Justifier que $c := Card(Fix(\sigma)) \leq n-2$.*

ii. *Démontrer*

$$\prod_{i=1}^{n}[I_n+H]_{i,\sigma(i)} = \underset{H\to 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}}{o}(\|H\|)\,.$$

(b) *Démontrer que pour tout $k\in[\![1,n]\!]$*

$$\prod_{i=1}^{k}(1+h_{i,i}) = 1+\sum_{i=1}^{k}h_{i,i}+\underset{H\to 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}}{o}(\|H\|)\,.$$

2. *Démontrer*

$$f(I_n+H)=1+\mathrm{Tr}(H)+\underset{H\to 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}}{o}(\|H\|)$$

3. *Que peut-on déduire du résultat de la question 2, pour l'application f ?*

Exercice 11 ★★☆☆☆. **[Indication(s)]** **[Un corrigé]**
Titre. Différentiabilité et différentielle pour d'une fonction de deux variables.
Énoncé. *Soit la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$*

$$f(x,y)=\sin(x^2-y^2)\,.$$

Démontrer que la fonction f est différentiable en tout vecteur $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et écrire sa matrice Jacobienne en (x,y).

Exercice 12 ★★☆☆☆. **[Indication(s)]** **[Un corrigé]**
Titre. Différentiabilité et différentielle d'un produit scalaire tordu.
Énoncé. *Soient*

- $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un espace euclidien ;*
- u *un endomorphisme de E ;*
- $a\in E$.

Démontrer que l'application

$$f\ \left|\ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \langle u(x),x\rangle \end{array}\right.$$

est différentiable en a et calculer sa différentielle en a.

Exercice 13 ★★★★☆. **[Indication(s)]** **[Un corrigé]**
Titre. Différentiabilité et différentielle du passage à l'inverse dans $GL_n(\mathbb{R})$.
Énoncé. *Soit $n\geq 2$ un entier.*
On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme d'algèbre unitaire, par exemple de la norme $\|\cdot\|$ définie par

$$\forall M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\quad \|M\|:=\max_{1\leq j\leq n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|[M]_{i,j}\right|\right).$$

On définit l'application f par

$$f\ \left|\ \begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\\ A & \mapsto & A^{-1}\,. \end{array}\right.$$

1. *Démontrer que pour tout* $H \in \mathscr{B}(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}, 1)$*, la série* $\sum_{p\geq 0} (-1)^p H^p$ *converge et calculer le produit*

$$(I_n + H)\left(\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p H^p\right)$$

en justifiant, avec le plus grand soin, les échanges éventuels entre $\sum_{p=0}^{+\infty}$ *et produit matriciel.*

2. *Justifier, avec le plus grand soin*

$$\sum_{p=2}^{+\infty} (-1)^p H^p = \underset{H\to 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}}{o} (\|H\|) .$$

3. *Démontrer que l'application* f *est différentiable en* I_n *et que pour tout* $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$df(I_n)\cdot H = -H .$$

4. *Soit* $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

   (a) *Justifier que pour tout* $H \in \mathscr{B}\left(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}, \frac{1}{\|A^{-1}\|}\right)$, $(I_n + A^{-1}H)$ *est inversible et exprimer son inverse comme une somme de série matricielle convergente.*

   (b) *Démontrer que* f *est différentiable en* A *et que pour tout* $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$df(A)\cdot H = -A^{-1} H A^{-1} .$$

Exercice 14 ★★★☆☆. [Indication(s)] [Un corrigé]
Titre. Différentiabilité, différentielle et lieu de submersion d'une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.
Énoncé. *Soit l'application*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, xyz) . \end{array}\right.$$

1. *Démontrer que la fonction* f *est différentiable en tout point* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ *et écrire sa matrice Jacobienne en* (x,y,z).

2. *On dit que* f *est une submersion en un point* (x,y,z) *de* $\mathbb{R}^3$ *si l'application* $df(x,y,z) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$ *est surjective. On note*

$$U := \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ :\ f \text{ est une submersion au point } (x,y,z)\right\}.$$

   (a) *Démontrer que* $\mathbb{R}^3 \setminus U$ *est la réunion de quatre droites que l'on explicitera.*

   (b) *Démontrer que* U *est une partie ouverte de* $\mathbb{R}^3$.

Exercice 15 ★★★☆☆. [Indication(s)] [Un corrigé]
Titre. Fonction de deux variables à dérivées partielles nulles sur un carré.
Énoncé. *Soient*

- $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$;
- r *un réel strictement positif;*
- $\Omega :=]a_1 - r, a_1 + r[\times]a_2 - r, a_2 + r[\subset \mathbb{R}^2$;

- *une fonction* $f : \Omega \to \mathbb{R}\,;\,(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2)$.

On suppose que

(H1) *pour tout* $x \in \Omega$, *la fonction* f *admet une dérivée partielle en* x *suivant la variable* x_1 *et suivant la variable* x_2 ;

(H2) *pour tout* $x \in \Omega$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x) = 0_{\mathbb{R}}$.

1. *Démontrer que* Ω *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$.
2. *Justifier que la fonction* f *est différentiable sur* Ω.
3. *Calculer la différentielle* $df(x)$ *de* f *en tout point* x *de* Ω.
4. *Démontrer que l'application* f *est constante sur* Ω.

Exercice 16 ★☆☆☆☆. [Indication(s)] [Un corrigé]
Titre. Dérivation le long d'un arc.
Énoncé. *Soient*

- $n \geq 2$ *et* $m \geq 2$ *des nombres entiers ;*
- Ω *une partie ouverte de* $\mathbb{R}^n$;
- I *un intervalle de* $\mathbb{R}$;
- *des fonctions* $x_1 : I \to \mathbb{R}, \ldots, x_n : I \to \mathbb{R}$ *telles que, pour tout* $t \in I$, $(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \in \Omega$;
- *une fonction* $f : \Omega \to \mathbb{R}^m : (y_1, \ldots, y_n) \mapsto (f_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_m(y_1, \ldots, y_n))$.

On suppose que

(H1) *pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$, *la fonction* x_i *est dérivable sur* I ;

(H2) *la fonction* f *est différentiable sur* Ω.

1. *Démontrer que l'arc* g *défini par*
$$g \left| \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^m \\ t & \mapsto & f(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \end{array} \right.$$
est dérivable sur I.
2. *Soit* $t \in I$. *Donner une expression de* $g'(t) \in \mathbb{R}^m$ *en fonction des dérivées des fonctions* $x_1, \ldots, x_n$ *et des dérivées partielles de la fonction* f.

Exercice 17 ★★★☆☆. [Indication(s)] [Un corrigé]
Titre. Équation aux dérivées partielles d'ordre 1, avec changement de variable donné.
Énoncé.

1. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$ *une fonction de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^2$ *telle que*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0\,.$$

   Démontrer qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$*, telle que*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \varphi(x)\,.$$

2. (a) *Soit* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$*. Démontrer que l'application*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \varphi(x+y) \end{array} \right.$$

   est de classe $\mathscr{C}^1$ *et qu'elle vérifie*

$$(E) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0\,.$$

   (b) *Réciproquement, soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^2$ *telle que*

$$(E) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0\,.$$

   Démontrer qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$*, telle que*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \varphi(x+y)\,.$$

   On pourra considérer la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,;\ (u,v) \mapsto f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$.

Exercice 18 ★★☆☆☆. **[Indication(s)]** **[Un corrigé]**
Titre. Fonctions homogènes.
Énoncé. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,;\ (x,y) \mapsto f(x,y)$ *une fonction différentiable sur* $\mathbb{R}^2$.

1. *Soit* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *fixé. On définit la fonction* g *par*

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(tx, ty)\,. \end{array} \right.$$

   Démontrer que g *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et calculer sa dérivée.*

2. *On suppose que* f *est homogène, i.e. que*

$$\forall (x,y,t) \in \mathbb{R}^3, \quad f(tx,ty) = t\,f(x,y)\,.$$

   (a) *Démontrer que pour tout* $(x,y,t) \in \mathbb{R}^3$

$$f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)\,x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)\,y\,.$$

   (b) *En déduire qu'il existe deux réels* α *et* β *tels que*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \alpha x + \beta y\,.$$

Exercice 19 ★★★☆☆. **[Indication(s)]** **[Un corrigé]**
Titre. Étude des extrema d'un polynôme en deux variables.
Énoncé. *On considère l'application f définie par*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2+y^3-3y \end{array} \right.$$

1. *Justifier que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et préciser son gradient, en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.*
2. *Déterminer les points critiques de l'application f.*
3. *Étudier les extrema éventuels de f, en précisant leurs natures (minimum local, minimum global, maximum local, maximum global, ou aucun extremum local donc aucun extremum global).*

Exercice 20 ★★★★☆. **[Indication(s)]** **[Un corrigé]**
Titre. Démonstration du Théorème spectral à l'aide du calcul différentiel.
Énoncé. *Dans la démonstration du Théorème spectral déjà étudiée (Théorème 19.61), on démontre que tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien possède une valeur propre réelle, en passant par le champ complexe (Proposition 19.60). On propose ici une autre approche, basée sur le calcul différentiel, pour établir l'existence d'une telle valeur propre, qui joue un rôle décisif dans la réduction des endomorphismes symétriques.*
Soient

- $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un espace euclidien de dimension* $n \geq 1$ *;*
- $\|\cdot\|$ *la norme sur E associée au produit scalaire* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *;*
- u *un endomorphisme symétrique de* E.

On considère l'application f définie par

$$f \left| \begin{array}{ccc} E \setminus \{0_E\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\langle u(x), x\rangle}{\|x\|^2} \end{array} \right. .$$

1. **Différentiabilité et différentielle de f.**
   (a) *Démontrer que l'application q définie par*

   $$q \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ (t_1,t_2) & \mapsto & \dfrac{t_1}{t_2} \end{array} \right.$$

   est différentiable sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ et calculer sa différentielle en tout point de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$.
   (b) *En déduire que l'application f est différentiable sur $E \setminus \{0_E\}$ et calculer sa différentielle en tout point de $E \setminus \{0_E\}$.*
2. **Maximum de la restriction de f à la sphère unité de E.**
   On note S la sphère unité de E, définie par

   $$S = \{x \in E : \|x\| = 1\} .$$

   Démontrer que l'application

   $$f_{|S} \left| \begin{array}{ccc} S & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\langle u(x), x\rangle}{\|x\|^2} \end{array} \right.$$

possède un maximum.
Dans la suite, on notera e_1 un vecteur unitaire de E tel que

$$\forall\, x \in S, \quad f(x) \leq f(e_1)\ .$$

3. **Maximum de f sur $E \setminus \{0_E\}$.**

   (a) *Démontrer*

   $$\forall\, x \in E \setminus \{0_E\}, \quad f(x) \leq f(e_1)\ .$$

   (b) *En déduire*

   $$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad 2\langle u(e_1), x\rangle - 2\langle u(e_1), e_1\rangle\langle e_1, x\rangle = 0\,.$$

4. **Le vecteur e_1 est propre pour u et le sous-espace vectoriel $e_1^{\perp}$ est stable par u.**

   (a) *Déduire de la question 3.(b) que le vecteur e_1 est propre pour l'endomorphisme u.*

   (b) *Déduire de la question 3.(b) que le sous-espace $e_1^{\perp} = \mathrm{Vect}(e_1)^{\perp}$ est stable par u.*

5. **Théorème spectral.**
   Énoncer et démontrer le Théorème spectral pour les endomorphismes symétriques des espaces euclidiens, en s'aidant de résultats précédemment établis.

Exercice 21 ★☆☆☆☆. [Indication(s)] [Un corrigé]
Titre. Application différentiable dont la différentielle est égale à la trace.
Énoncé. *Soient*

- *$n \geq 2$ un nombre entier ;*
- $\mathrm{Tr}\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}\,;\ M \mapsto \sum_{1\leq i\leq n} [M]_{i,i}$ *l'application trace.*

Déterminer toutes les applications $f\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, différentiables sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telles que

$$\forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad df(A) = \mathrm{Tr}\ .$$

On pourra raisonner par analyse et synthèse.

Exercice 22 ★★★★☆. [Indication(s)] [Un corrigé]
Titre. Équation des cordes vibrantes.
Énoncé.

1. *Soit une fonction*

   $$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & g(u,v) \end{array} \right.$$

   de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que

   $$\forall\, (u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial v\, \partial u}(u,v) = 0\,.$$

   Démontrer qu'il existe $\varphi \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\psi \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que

   $$\forall\, (u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad g(u,v) = \varphi(u) + \psi(v)\,.$$

2. *Soit $c \in \mathbb{R}^*$. Soit une fonction*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right.$$

de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t)\,;$$

   (a) *Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ fixés. On considère la fonction g définie par*

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & f(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v)\,. \end{array} \right.$$

   Démontrer que la fonction g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et exprimer, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(u,v)$ en fonction de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et des dérivées partielles d'ordre 2 de f.

   (b) *En choisissant $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tels que*

   - *la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ est inversible;*
   - *pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(u,v) = 0$;*

   démontrer qu'il existe $\varphi \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\psi \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)\,.$$

Exercice 23 ★★☆☆☆. [Un corrigé]

Titre. Fonction possédant toutes ses dérivées directionnelles en $(0,0)$, mais discontinue en $(0,0)$.

Énoncé. *Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^2$ par, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. *Démontrer que les fonctions f et g admettent une dérivée suivant tout vecteur en $(0,0)$.*
2. *Démontrer que les fonctions f et g ne sont pas continues en $(0,0)$.*

Exercice 24 ★★★☆☆. [Un corrigé]

Titre. Fonction différentiable dont la différentielle est 3-lipschitzienne en tout point.

Énoncé. *On munit $\mathbb{R}^2$ de sa norme eucidienne, définie par*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \|(x,y)\| := \sqrt{x^2+y^2}\,.$$

Soit la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = (\sin(x+2y), \cos(2x+y))$$

1. *Démontrer que la fonction f est différentiable en tout vecteur $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et écrire sa matrice Jacobienne en (x,y).*
2. *Démontrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, l'application $df(x,y)$ est 3-lipschitzienne.*

Exercice 25 ★☆☆☆☆. **[Un corrigé]**
Titre. Détermination des points critiques d'une fonction de deux variables.
Énoncé. *Soit f l'application définie par*

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^3-3x+xy^2 \end{array} \right. .$$

1. *Démontrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.*
2. *Un point $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ est appelé* **point critique de** f *si $df(x,y)=0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})}$. Déterminer les points critiques de f.*

Exercice 26 ★★★☆☆. **[Un corrigé]**
Titre. Fonctions invariantes par translation le long de la première bissectrice.
Énoncé.

1. *Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Soient $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ fixé. Démontrer que l'application*

$$\tau \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(x+t,y+t) \end{array} \right.$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $t\in\mathbb{R}$

$$\tau'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(x+t,y+t)+\frac{\partial f}{\partial y}(x+t,y+t)\,.$$

2. *On souhaite déterminer toutes les fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ différentiables sur $\mathbb{R}^2$ et qui vérifient*

$$\forall\,(x,y,t)\in\mathbb{R}^3,\quad f(x+t,y+t)=f(x,y)\,.$$

   (a) **Analyse.**
   Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$ telle que

$$\forall\,(x,y,t)\in\mathbb{R}^3,\quad f(x+t,y+t)=f(x,y)\,.$$

   i. *Démontrer que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\,.$$

   ii. *Soient a,b,c,d quatre réels fixés et soit l'application*

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & f(au+bv,cu+dv) \end{array} \right. .$$

   Démontrer que l'application g est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et calculer, pour tout $(u,v)\in\mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)$ en fonction des dérivées partielles de f.

   iii. *En choisissant $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ de telle sorte que*
   - *pour tout $(u,v)\in\mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)=0$;*
   - *la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in GL_2(\mathbb{R})$;*

démontrer qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \varphi(x - y) .$$

(b) **Synthèse.**
Soit une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$. On lui associe la fonction f définie par

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \varphi(x - y) . \end{array} \right.$$

Démontrer que l'application f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et que

$$\forall (x, y, t) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x + t, y + t) = f(x, y) .$$

(c) **Conclusion.**
Formuler une conclusion soignée pour répondre à l'objectif exposé au début de la question 2.

Exercice 27 ★★★☆☆. [Un corrigé]
Titre. Étude des extrema locaux d'une fonction rationnelle en deux variables.
Énoncé. *Soient $\mathscr{U}$ la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par*

$$\mathscr{U} :=]0, +\infty[\times]0, +\infty[$$

et f l'application définie par

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{U} & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & xy + \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{y} . \end{array} \right.$$

1. *Démontrer que la partie $\mathscr{U}$ est ouverte dans $\mathbb{R}^2$.*
2. *Démontrer que la fonction f est minorée, mais non majorée sur $\mathscr{U}$.*
3. *Justifier que f est différentiable sur $\mathscr{U}$ et préciser son gradient, en tout point $(x, y) \in \mathscr{U}$.*
4. *Déterminer l'ensemble des points critiques de l'application f.*
5. *On étudie dans cette question les extrema éventuels de deux fonctions de la variable réelle auxiliaires.*
   (a) *Étudier les extrema éventuels de la fonction g définie par*

   $$g \left| \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & 2z + \dfrac{1}{z^2} . \end{array} \right.$$

   (b) *Soient $y \in]0, +\infty[$ fixé. Étudier les extrema éventuels de la fonction*

   $$f_y \left| \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x, y) = xy + \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{y} . \end{array} \right.$$

6. *Étudier les extrema éventuels de f, en précisant leurs natures (minimum local, minimum global, maximum local, maximum global, ou aucun extremum local donc aucun extremum global).*

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 1. [Énoncé] [Un corrigé]

- *Démontrer* $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{\|\cdot\|} f(0,0) = 0$, *i.e.*

$$\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \xrightarrow[\|(x,y)\|:=\sqrt{x^2+y^2}\to 0]{} 0$$

en commençant par dominer x^2y^2 *par une quantité dépendant de* $\|(x,y)\|$.

- *Démontrer la discontinuité de* g *en* $(0,0)$ *à l'aide du critère séquentiel.*
Pour cela, exhiber deux suites de nombres réels (x_n) *et* (y_n) *qui convergent vers* 0, *mais telles que la quantité* $g(x_n, y_n)$ *ne tend pas vers* $g(0,0) = 0$ *lorsque* n *tend vers* $+\infty$.

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 2. [Énoncé] [Un corrigé]

1. - *Il s'agit de prouver que*

$$f(x,y) = \frac{x^5}{(y-x^2)^2+x^4} \xrightarrow[\|(x,y)\|=\sqrt{x^2+y^2}\to 0]{} f(0,0)=0;.$$

   - *Justifier que pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$(y-x^2)^2+x^4 \geq x^4$$

   et dominer $f(x,y)$ *par une quantité mettant en jeu* $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$.
   - *Théorème d'encadrement.*
2. - *Fixer* $h=(h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\}$ *et simplifier l'écriture de* $\dfrac{f((0,0)+t(h_1,h_2))-f(0,0)}{t}$.
   - *Étudier la limite éventuelle de* $\dfrac{f((0,0)+t(h_1,h_2))-f(0,0)}{t}$ *lorsque* t *tends vers* 0*, en distinguant deux cas :* $h_2 \neq 0$ *et* $h_2 = 0$.

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 3. [Énoncé] [Un corrigé]

On note (e_1, e_2) *la base canonique de* $\mathbb{R}^2$.

- *Pour la première dérivée partielle de* f *en* $(0,0)$*, étudier la limite éventuelle de*

$$\frac{f((0,0)+te_1)-f(0,0)}{t} = \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \frac{P(t)-P(0)}{t}$$

  lorsque t *tend vers* 0.

- *Pour la deuxième dérivée partielle de* f *en* $(0,0)$*, étudier la limite éventuelle de*

$$\frac{f((0,0)+te_2)-f(0,0)}{t} = \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \frac{P(it)-P(0)}{t}$$

  lorsque t *tend vers* 0.

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 4. [Énoncé] [Un corrigé]

On note (e_1, e_2) *la base canonique de* $\mathbb{R}^2$.

- - *Pour la première dérivée partielle de* f *en* $(0,0)$, *étudier la limite éventuelle de*

  $$\frac{f((0,0)+te_1)-f(0,0)}{t} = \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \frac{S(t)-S(0)}{t}$$

  lorsque t *tend vers* 0.
  - *On pourra s'appuyer sur le cours qui assure que la restriction de la fonction* $S_{|]-R,R[}$ *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $]-R,R[$ *et que l'on dispose de formules pour ses dérivées itérées.*

- - *Pour la deuxième dérivée partielle de* f *en* $(0,0)$, *étudier la limite éventuelle de*

  $$\frac{f((0,0)+te_2)-f(0,0)}{t} = \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \frac{S(it)-S(0)}{t}$$

  lorsque t *tend vers* 0.
  - *On pourra s'appuyer sur la continuité d'une somme de série entière auxiliaire, en déterminant avec soin son rayon de convergence.*

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 5. [Énoncé] [Un corrigé]

- *Pour* $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$*, développer* $f((a,b) + (h_1, h_2))$.
- *Dans le développement, faire apparaitre* $f(a,b)$*, une expression linéaire en* (h_1, h_2) *et un reste.*
- *Démontrer, avec le plus grand soin, que le reste est un* $\underset{(h_1,h_2)\to(0,0)}{o}(\|(h_1, h_2)\|)$.

Indication(s) pour l'exercice 6. [Énoncé] [Un corrigé]

1. - *Pour $h \in E$, développer $f(a+h)$.*
   - 0_F *est un* $\underset{(h \to 0_E}{o}(N_E(h))$.
2. *Combien de valeurs l'application df prend-elle ?*

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 7. [Énoncé] [Un corrigé]

1. *Cf. Définition 20.4, Proposition 20.12 et Remarque 20.17.*

2. *Démontrer que pour tout* $x = \sum_{i=1}^{n} x_i.e_i$ *vecteur de* E*, où* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$*,*

$$df(a)\cdot(x) = dg(a)\cdot(x)$$

en utilisant l'hypothèse sur les dérivées partielles de f *et* g*, ainsi que la linéarité des applications* $df(a)$ *et* $dg(a)$*.*

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 8. [Énoncé] [Un corrigé]

1. - *Pour* $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, *développer* $f(A+H)$, *en prenant garde au défaut de commutativité de la multiplication dans* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   - *Dans le développement, faire apparaitre* $f(A)$, *une expression linéaire en* H *et un reste.*
   - *Démontrer, avec le plus grand soin, que le reste est un* $\underset{H \to 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}}{o}(\|H\|)$.
2. *Cf. Proposition 20.12.*

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 9. [Énoncé] [Un corrigé]

1. •
   . *Pour* $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$*, développer* $f((a,b)+(h_1,h_2))$*, en utilisant des formules de trigonométrie et des DL usuels.*
   . *Dans le développement, faire apparaitre* $f(a,b)$*, une expression linéaire en* (h_1, h_2) *et un reste.*
   . *Démontrer, avec le plus grand soin, que le reste est un* $\underset{(h_1,h_2)\to(0,0)}{o}(\|(h_1,h_2)\|)$.
   - *Par définition, la matrice Jacobienne de* f *en* (a,b) *est*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} df(a,b)\cdot e_1 & df(a,b)\cdot e_2 \end{pmatrix} = \dots$$

2. - *Observer que* g *possède une propriété algébrique remarquable.*
   - *Par définition, la matrice Jacobienne de* g *en* (a,b) *est*

$$Mat_{(e_1,e_2)}(dg(a,b)) = \dots$$

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 10. [Énoncé] [Un corrigé]

1. (a) i. • *Raisonner par l'absurde.*
   • *Que dire d'une permutation de* $[\![1,n]\!]$ *qui possède au moins* $(n-1)$ *points fixes ?*

   ii. • *Scinder le produit en deux, un premier suivant les* i *dans* $Fix(\sigma)$ *et un second pour les* i *dans le complémentaire.*
   • *En utilisant l'inégalité triangulaire et le fait que la norme sur* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *est la norme sup, démontrer*

$$\left|\prod_{i=1}^{n}[I_n+H]_{i,\sigma(i)}\right| \leq (1+\|H\|)^c\ \|H\|^{n-c}$$

   où $c := Card(Fix(\sigma))$.

   (b) • *Raisonner par récurrence finie sur* $k \in [\![1,n]\!]$.
   • *Utiliser l'inégalité triangulaire et le fait que la norme sur* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *est la norme sup.*

2. • *Considérer* $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *et écrivez* $f(I_n+H) = \mathrm{Det}\,(I_n+H)$ *comme une somme indexée par les* $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
   • *Scinder la somme en deux parties, en isolant le terme pour* $\sigma =$.
   • *Appliquer les résultats des questions 1.(a).ii et 1.(b).*

3. *N'aurait-on pas établi à la question 2 un DL1 pour la fonction* f *en* I_n *?*

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 11. [Énoncé] [Un corrigé]

- *Fixer $y \in \mathbb{R}$, justifier la dérivabilité de la fonction d'une variable réelle*

$$f(\cdot, y) \colon x \longmapsto f(x, y)$$

puis calculer sa dérivée qui est, par définition, la première dérivée partielle de la fonction f notée $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

- *Fixer $x \in \mathbb{R}$, justifier la dérivabilité de la fonction d'une variable réelle*

$$f(x, \cdot) \colon y \longmapsto f(x, y)$$

puis calculer sa dérivée qui est, par définition, la deuxième dérivée partielle de la fonction f notée $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

- *Appliquer le critère $\mathscr{C}^1$, après avoir vérifié ses hypothèses, avec le plus grand soin.*

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 12. [Énoncé] [Un corrigé]

- *Pour* $h \in E$, *développer* $f(a+h)$.
- *Dans le développement, faire apparaitre* $f(a)$, *une expression linéaire en* h *et un reste.*
- *Démontrer, avec le plus grand soin, que le reste est un* $\underset{h \to 0_E}{o}(\|h\|)$.

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 13. [Énoncé] [Un corrigé]

1. - *Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toute série absolument convergente est convergente.*
   - *Pour* $H \in \mathscr{B}(0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}, 1)$, *calculer, pour tout* $q \in \mathbb{N}$, $(I_n + H) \times \left(\sum_{p=0}^{q} (-1)^q H^p\right)$, *puis rédiger un passage à la limite soigné, en faisant tendre* q *vers* $+\infty$, *avec un argument de continuité à mettre en valeur.*
2. - *Pour* $H \in \mathscr{B}(0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}, 1)$ *et* $q \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, *justifier*

   $$\left\| \sum_{p=2}^{q} (-1)^p H^p \right\| \leq \sum_{p=2}^{q} \|H\|^p$$

   puis faire tendre q *vers* $+\infty$ *en donnant les argument nécessaires pour ce passage à la limite.*
   - *Utiliser la valeur de la somme d'une série géométrique numérique convergente.*
   - *Théorème d'encadrement.*
3. *Calculer* $f(I_n + H)$ *pour* $H \in \mathscr{B}(0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}, 1)$, *à l'aide de ce qui précède, en faisant apparaître un* $f(I_n)$, *une expression linéaire en* H *et un* $\underset{H \to 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}}{o}(\|H\|)$, *pour conclure.*
4. (a) *Justifier que les résultats de la question 1 peuvent être spécialisés à* $H \leftarrow A^{-1}H$ *et en déduire le résultat demandé.*

   (b)
   - *Pour* $H \in \mathscr{B}\left(0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}, \frac{1}{\|A^{-)1}\|}\right)$, *la matrice* $(I_n + A^{-1}H)$ *est inversible d'après le question 4.(a).*
   - *En déduire que la matrice*

     $$(\star) \qquad A + H = A\,(I_n + A^{-1}H)$$

     est également inversible.
   - *À l'aide de* $(\star)$ *et de la question 4.(a), développer* $f(A+H)$ *pour obtenir*

     $$f(A+H) = f(A) + \text{ expression linéaire en } H \; + \text{ reste en } H$$

   - *Démontrer, avec le plus grand soin, en s'aidant notamment de la question 2 dont le résultat peut être spécialisés à* $H \leftarrow A^{-1}H$, *que*

     $$\text{reste en } H = \underset{H \to 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}}{o}(\|H\|)\,.$$

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 14. [Énoncé] [Un corrigé]

1. - *Introduire les fonctions coordonnées de f*

$$f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,;\,(x,y,z) \mapsto x+y+z \qquad \text{et} \qquad f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,;\,(x,y,z) \mapsto xyz$$

   puis justifier l'existence de

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z)\,,\ \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z)\,,\ \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z)\,,\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z)\,,\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z)\,,\ \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z)$$

   en tout point $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et expliciter ces six dérivées partielles.
   - *Appliquer le critère $\mathscr{C}^1$, arpès avoir vérifié ses hypothèses avec le plus grand soin.*

2. (a) - *Justifier, avec soin, que $\mathbb{R}^3 \setminus U$ est l'ensemble des points $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que*

$$\mathrm{Rg}\left(Mat_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_2}(\,df(x,y,z))\right) = 1\,.$$

   - *La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ est de rang 1 si et seulement si $\alpha = \beta = \gamma$.*
   - *Remarquer par exemple que, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $(yz = xz) \iff ((z=0)$ ou $(x=y))$.*
   - *L'intersection est distributive par rapport à la réunion.*

   (b) - *Une partie est ouverte si et seulement si son complémentaire est fermé.*
   - *Quelle propriété topologique possède un sous-espace vectoriel de dimension finie ?*

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 15. [Énoncé] [Un corrigé]

1. *La partie* Ω *de* $\mathbb{R}^2$ *ne serait-elle pas une boule ouverte, pour une norme à définir sur* $\mathbb{R}^2$ *?*
2. *Appliquer le critère* $\mathscr{C}^1$*, après avoir vérifié ses hypothèses.*
3. *Cf. expression de la différentielle d'une fonction différentiable via ses dérivées partielles (Proposition 20.23).*
4. - *Fixer* $(b_1, b_2) \in \Omega =]a_1 - r, a_1 + r[\times]a_2 - r, a_2 + r[$*, puis remarquer que* $(b_1, a_2) \in \Omega$ *et que*
   $$f(b_1, b_2) - f(a_1, a_2) = f(b_1, b_2) - f(b_1, a_2) + f(b_1, a_2) - f(a_1, a_2) \ .$$
   - *Exprimer sous forme d'intégrales le second membre de la précédente identité.*

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 16. [Énoncé] [Un corrigé]

1. - *Introduire l'arc γ défini par*

$$\gamma \left| \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto & (x_1(t), \dots, x_n(t)) \,. \end{array} \right.$$

   - *Que vaut l'arc $f \circ \gamma$?*
   - *Appliquer le Corollaire 20.38 (dérivée le long d'un arc), en vérifiant ses hypothèses avec soin.*

2. *Deux approches sont possibles.*

   (A) *À l'aide de la formule livrée par la dérivée le long d'un arc et la Jacobienne de f.*
   - *Le Corollaire 20.38 (dérivée le long d'un arc) livre une formule pour $g'(t)$ en fonction de la différentielle de f et de la dérivée de γ.*
   - *Traduire matriciellement cette formule, en introduisant la base canonique $\mathscr{B}_n$ de $\mathbb{R}^n$ et la base canonique $\mathscr{B}_m$ de $\mathbb{R}^m$.*
   - *Observer qu'une matrice Jacobienne de f apparaît et calculer un produit matriciel.*

   (B) *À l'aide de la règle de la chaîne.*
   - *Justifier que la fonction*

$$\gamma \left| \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto & (x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{array} \right.$$

     est différentiable sur I.
   - *Vérifier que les hypothèses de la règle de la chaîne sont satisfaites, puis l'appliquer pour calculer les dérivées partielles de la fonction*

$$g \left| \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^m \\ t & \mapsto & f(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \left(\underbrace{f_1(x_1(t), \dots, x_n(t))}_{g_1(t_1, \dots, t_n)}, \dots, \underbrace{f_m(x_1(t), \dots, x_n(t))}_{g_m(t_1, \dots, t_n)} \right) \end{array} \right.$$

     et en déduire $g'(t) = (g_1'(t), \dots, g_m'(t))$.

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 17. [Énoncé] [Un corrigé]

1. - *Démontrer que, si x est un réel fixé, alors la fonction*

$$f(x,\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,;\ y\mapsto f(x,y)$$

   est constante, avec des valeurs toutes égales à $f(x,0)$.

   - *Démontrer avec soin que la fonction*

$$\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & f(x,0)\end{array}\right.$$

   est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. (a) - *Écrire f comme la composée de deux applications de classe $\mathscr{C}^1$, en justifiant avec soin le caractère $\mathscr{C}^1$ de chacune.*
   - *Calculer la différentielle de f grâce à la formule de la différentielle d'une composée d'applications différentiables et en déduire des expressions pour ses dérivées partielles.*

   (b) - *Introduire l'application*

$$\psi\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2\\ (u,v) & \mapsto & \left(\underbrace{\frac{u+v}{2}}_{\psi_1(u,v)},\underbrace{\frac{u-v}{2}}_{\psi_2(u,v)}\right)\end{array}\right.$$

   et justifier son caractère $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

   - *Calculer $\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)$, pour tout $(u,v)\in\mathbb{R}^2$, en appliquant la règle des chaînes après avoir vérifié ses hypothèses avec soin.*
   - *Appliquer le résultat de la question 1.*
   - *Considérer le changement de variable inverse à celui soufflé dans l'énoncé.*

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 18. [Énoncé] [Un corrigé]

1. - *Introduire un arc* γ *tel que* $g = f \circ \gamma$.
   - *Appliquer le résultat sur la dérivation le long d'un arc, après avoir vérifié soigneusement les hypothèses.*
   - *Exprimer la différentielle de* f *à l'aide de ses dérivées partielles.*
   - *Pour tout* $t \in \mathbb{R}$, *expliciter* $g'(t)$, *en fonction de* x, y, t *et des dérivées partielles de* f.

2. (a) *À l'aide de la propriété d'homogénéité vérifiée par la fonction* f, *calculer* $g'(t)$ *d'une autre manière, pour tout* $t \in \mathbb{R}$.

   (b) *Spécifier le résultat de la question 2.(a) en un réel* t *bien choisi.*

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 19. [Énoncé] [Un corrigé]

1.
   - *Quelle est la nature de la fonction f ?*
   - *Le gradient de f en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ admet une expression en termes de dérivées partielles de la fonction f en (x,y).*

2. *La détermination des points critiques de f nous conduit à résoudre un système (non linéaire). Pour soigner l'aspect logique, on peut procéder par analyse et synthèse.*

3.
   - *Dans un premier temps, déterminer les points où la fonction f peut atteindre un extremum local, en appliquant avec soin la condition nécessaire d'existence d'un extremum.*
   - *Pour étudier la nature d'un point critique $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, i.e. déterminer si*
     . *f atteint un minimum local en (a,b) ;*
     . *f atteint un minimum global en (a,b) ;*
     . *f atteint un maximum local en (a,b) ;*
     . *f atteint un maximum global en (a,b) ;*
     . *f n'atteint aucun extremum local donc aucun extremum global en (a,b) ;*

     on étudie le signe de
     $$f(a+x,b+y)-f(a,b)$$
     pour (x,y) dans $\mathbb{R}^2$ ou dans un voisinage de $(0,0)$. On peut envisager deux grandes stratégies (il y en a d'autres).
     (a) *Chercher à démontrer que $f(a+x,b+y)-f(a,b)$ a un signe constant en développant, en réduisant et en simplifiant, parfois à l'aide de la forme canonique d'un trinôme du second degré.*
     (b) *Chercher à démontrer que $f(a+x,b+y)-f(a,b)$ n'a de signe constant dans aucun voisinage de $(0,0)$, parfois à l'aide de développements limités en introduisant un arc bien choisi pour approcher $(0,0)$ avec un unique paramètre.*
   - *Quant aux extremas globaux, on peut appréhender la question de l'existence de tels de deux manières (au moins).*
     (a) *On peut chercher à démontrer que f est bornée et essayer de jouer avec de la compacité, quitte à restreinte le domaine d'étude de manière pertinente (cf. Théorème des bornes atteintes).*
     (b) *On peut essayer d'introduire un arc bien choisi dont l'image par f explose vers $-\infty$ ou $+\infty$.*

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 20. [Énoncé] [Un corrigé]

1. (a) *Critère* $\mathscr{C}^1$.

   (b)
   - *Une composée d'applications différentiables est différentiable et on dispose d'une formule pour la différentielle de la composée.*
   - *Justifier avec soin que l'application*

     $$\langle u, \mathrm{id}_E \rangle \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \langle u(x), x \rangle \end{array} \right.$$

     est différentiable sur E.
   - *Justifier avec soin que l'application*

     $$\langle \mathrm{id}_E, \mathrm{id}_E \rangle \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \langle x, x \rangle = \|x\|^2 \end{array} \right.$$

     est différentiable sur E.
   - *Remarquer que si* $a\colon E \to \mathbb{R}$ *et* $b\colon E \to \mathbb{R}$ *sont des applications différentiables, alors l'application*

     $$(a, b) \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (a(x), b(x)) \end{array} \right.$$

     est différentiable sur E *et que, pour tout* $x \in E$*, pour tout* $h \in E$

     $$d(a,b)(x) \cdot h = (\, da(x) \cdot h\,,\ db(x) \cdot h\,)\ .$$

2. *Théorème des bornes atteintes.*

3. (a)
   - *Si* $x \in E \setminus \{0_E\}$ *alors le vecteur* $\dfrac{x}{\|x\|}$ *appartient à* S.
   - *Comparer* $f(x)$ *et* $f\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)$ *pour un vecteur* $x \in E \setminus \{0_E\}$.

   (b) *Justifier que la partie* $E \setminus \{0_E\}$ *de* E *est ouverte et appliquer la condition nécessaire d'existence d'un extremum local.*

4. (a) *Démontrer que le vecteur* $u(e_1)$ *appartient à* $\left(\mathrm{Vect}\,(e_1)^\perp\right)^\perp$.

   (b) *Considérer* $x \in e_1^\perp$ *et démontrer que* $\langle e_1, u(x) \rangle = 0$*, à l'aide de la question 3.(a) et du caractère symétrique de* u.

5. *Se reporter au Théorème 19.61 pour l'énoncé et adapter la démonstration donnée dans le polycopié du cours distanciel, pour élaborer une démonstration par récurrence sur la dimension de l'espace euclidien ambiant, s'appuyant uniquement sur les Question 4.(a) et 4.(b).*

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 21. [Énoncé] [Un corrigé]

- *Raisonner par analyse et synthèse comme soufflé dans l'énoncé.*
- *Justifier que la trace est différentiable sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et calculer* $d\mathrm{Tr}(A)$, *pour tout* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- *Une combinaison linéaire d'applications différentiables est différentiable.*
- *La différentielle est linéaire.*
- *Caractérisation des applications constantes sur un ouvert connexe par arcs.*

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE 22. [Énoncé] [Un corrigé]

1. - *Soit $u \in \mathbb{R}$ fixé. Justifier que la fonction $\frac{\partial g}{\partial u}(u,\cdot)$ est constante sur $\mathbb{R}$ et donc que*

$$\forall\, v \in \mathbb{R}, \qquad \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,0)\,.$$

   - *Soit $v \in \mathbb{R}$ fixé. Remarquer que la fonction*

$$g(\cdot,v) \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & g(u,v) \end{array} \right.$$

   est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée à l'aide d'une dérivée partielle de g. Appliquer alors le Théorème fondamental de l'analyse, pour obtenir une expression intégrale de $g(u,v)-g(0,v)$, pour tout $u \in \mathbb{R}$.

   - *Vérifier avec soin la régularité sur $\mathbb{R}$ des fonctions φ et ψ qui apparaissent.*

2. (a) - *Introduire l'application θ définie par*

$$\theta \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \mapsto & \Big(\underbrace{\alpha u+\beta v}_{\theta_1(u,v)}, \underbrace{\gamma u+\delta v}_{\theta_2(u,v)}\Big) \end{array} \right.$$

   et exprimer g à l'aide de f et θ.

   - *Une application linéaire est de classe $\mathscr{C}^2$.*
   - *Appliquer la règle de la chaîne, plusieurs fois, pour calculer $\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(u,v)$, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.*

   (b) - *Choisir $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ comme préciser dans l'énoncé. Plusieurs choix sont possibles.*
   - *Appliquer la Question 1.*
   - *Modifier éventuellement les fonctions φ et ψ que nous livre la Question 1, en composant à la source par une fonction affine, qui est de classe $\mathscr{C}^2$.*

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1. [Énoncé] [Indication(s)]

- *On démontre* $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} f(0,0)=0$, *i.e.*

$$\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \xrightarrow[\|(x,y)\|:=\sqrt{x^2+y^2}\to 0]{} 0\,.$$

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. *Comme* $y^2\geq 0$

$$(\star) \qquad 0\leq x^2\leq x^2+y^2$$

et comme $x^2\geq 0$

$$(\star\star) \qquad 0\leq y^2\leq x^2+y^2\,.$$

Comme les inégalités $(\star)$ *et* $(\star\star)$ *ne mettent en jeu que des nombres réels positifs ou nul, on peut les multiplier membre-à-membre pour obtenir*

$$0\leq x^2y^2\leq \left(x^2+y^2\right)^2\,.$$

Comme $x^2+y^2\geq 0$, *il vient*

$$0\leq f(x,y):=\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\leq x^2+y^2=\|(x,y)\|^2\,.$$

Par Théorème d'encadrement, $f(x,y)\xrightarrow[\|(x,y)\|\to 0]{} 0$.

- *On démontre la discontinuité de* g *en* $(0,0)$ *à l'aide du critère séquentiel.*
Posons, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

$$x_n:=\frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad y_n:=\frac{1}{n}\,.$$

Comme les suites numériques $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *convergent vers* 0, *la suite vectorielle* $\big((x_n,y_n)\big)\ n\in\mathbb{N}^*$ *tend vers* $(0,0)$ *lorsque* n *tend vers* $+\infty$.
Comme

$$g(x_n,y_n)=\frac{x_ny_n}{x_n^2+y_n^2}=\frac{1}{2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{2}\neq 0=:g(0,0)$$

la fonction g *n'est pas continue en* $(0,0)$.

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2. [Énoncé] [Indication(s)]

1. *On souhaite démontrer que*

$$f(x,y) = \frac{x^5}{(y-x^2)^2+x^4} \xrightarrow[\|(x,y)\|=\sqrt{x^2+y^2}\to 0]{} f(0,0)=0;.$$

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. *Comme* $(y-x^2)^2\geq 0$, $(y-x^2)^2+x^4\geq x^4$. *Donc*

$$0\leq \left|f(x,y)\right| = \left|\frac{x^5}{(y-x^2)^2+x^4}\right| = \frac{|x|\,x^4}{(y-x^2)^2+x^4} \leq \frac{|x|\,x^4}{x^4} = |x| \leq \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|\ .$$

Ainsi, par Théorème d'encadrement, $f(x,y)\xrightarrow[\|(x,y)\|\to 0]{} f(0,0)$.

2. *Soit* $h=(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0\}$. *Donc au moins l'un des nombres* h_1, h_2 *est non nul.*
Soit $t\in\mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned}\frac{f((0,0)+t(h_1,h_2))-f(0,0)}{t} &= \frac{f(th_1,th_2)}{t}\\ &= \frac{1}{t}\,\frac{t^5\,h_1^5}{(t\,h_2-t^2\,h_1^2)^2+t^4\,h_1^4}\\ &= \frac{t^4\,h_1^5}{t^2\,h_2^2-2t^3\,h_1^2\,h_2+2t^4\,h_1^4}\\ &= \frac{t^2\,h_1^5}{h_2^2-2t\,h_1^2\,h_2+2t^2\,h_1^4}\end{aligned}$$

On distingue alors deux cas.

- **Cas où** $h_2\neq 0$**.**
Si $h_2\neq 0$, *alors*

$$\frac{f((0,0)+t(h_1,h_2))-f(0,0)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^2\,h_1^5}{h_2^2} \xrightarrow[t\to 0]{} 0\,;$$

Donc f *est dérivable en* $(0,0)$ *suivant le vecteur* $h=(h_1,h_2)$ *et*

$$D_h f(0,0) = 0\,.$$

- **Cas où** $h_2 = 0$**.**
Supposons $h_2=0$. *Alors comme* $h\neq(0,0)$, $h_1\neq 0$.

$$\frac{f((0,0)+t(h_1,h_2))-f(0,0)}{t} = \frac{t^2\,h_1^5}{2t^2\,h_1^4} = \frac{h_1}{2} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{h_1}{2}\,;$$

Donc f *est dérivable en* $(0,0)$ *suivant le vecteur* $h=(h_1,h_2)$ *et*

$$D_h f(0,0) = \frac{h_1}{2}\,.$$

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3. [Énoncé] [Indication(s)]

On note (e_1, e_2) *la base canonique de* $\mathbb{R}^2$.

- **Première dérivée partielle.**
  Soit $t \in \mathbb{R}^*$.

$$\frac{f((0,0)+te_1)-f(0,0)}{t} = \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \frac{P(t)-P(0)}{t} = \frac{1}{t}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k t^k - a_0\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k t^{k-1}$$

  Nous en déduisons

$$\frac{f((0,0)+te_1)-f(0,0)}{t} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} t^k \xrightarrow[t\to 0]{} a_1 .$$

  Donc la fonction f *admet une dérivée partielle première en* $(0,0)$ *dont la valeur est donnée par*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = a_1 .$$

- **Deuxième dérivée partielle.**
  Soit $t \in \mathbb{R}^*$.

$$\frac{f((0,0)+te_2)-f(0,0)}{t} = \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \frac{P(it)-P(0)}{t} = \frac{1}{t}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k (it)^k - a_0\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k i^k t^{k-1}$$

  Nous en déduisons

$$\frac{f((0,0)+te_2)-f(0,0)}{t} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} i^{k+1} t^k \xrightarrow[t\to 0]{} a_1\, i .$$

  Donc la fonction f *admet une dérivée partielle seconde en* $(0,0)$ *dont la valeur est donnée par*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = a_1\, i .$$

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4. [Énoncé] [Indication(s)]

On note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

- **Première dérivée partielle.**

  - *Soit $t \in \mathbb{R}^*$.*
  $$\frac{f((0,0)+te_1)-f(0,0)}{t} = \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \frac{S(t)-S(0)}{t}$$
  - *D'après le cours, nous savons que la fonction*
  $$S_{|]-R,R[} \left| \begin{array}{ccc}]-R,R[& \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \end{array} \right.$$
  est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ et que ses dérivées itérées s'obtiennent en dérivant terme-à-terme. La fonction $S_{|]-R,R[}$ est en particulier dérivable sur $]-R,R[$ et, pour tout $t \in]-R,R[$
  $$\left(S_{|]-R,R[}\right)'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1}.$$
  - *Ainsi*
  $$\frac{f((0,0)+te_1)-f(0,0)}{t} = \frac{S(t)-S(0)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} \left(S_{|]-R,R[}\right)'(0) = a_1.$$
  Donc la fonction f admet une dérivée partielle première en $(0,0)$ dont la valeur est donnée par
  $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = a_1.$$

- **Deuxième dérivée partielle.**

  - *Soit $t \in \mathbb{R}^*$.*
  $$\begin{aligned} \frac{f((0,0)+te_2)-f(0,0)}{t} &= \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} \\ &= \frac{S(it)-S(0)}{t} \\ &= \frac{1}{t}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (it)^k - a_0\right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} a_k i^k t^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+1} i^{k+1} t^k \end{aligned}$$
  - *On observe que, pour tout $r \in \mathbb{R}_+$, la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si la suite $\left(a_{n+1} i^{n+1} r^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, puisque i est de module 1. Donc le rayon de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_{n+1} i^{n+1} z^n$ est le même que celui de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Il vaut donc R.*

- *D'après le cours, la fonction*

$$T \left| \begin{array}{ccc} D(0,R) & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+1} i^{k+1} z^k \end{array} \right.$$

est bien définie et continue sur $D(0,R)$*. En particulier*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+1} i^{k+1} t^k := T(t) \xrightarrow[t \to 0]{} T(0) = a_1\, i\ .$$

- *Nous en déduisons*

$$\frac{f((0,0)+te_2) - f(0,0)}{t} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+1} i^{k+1} t^k \xrightarrow[t\to 0]{} a_1\, i\ .$$

Donc la fonction f *admet une dérivée partielle seconde en* $(0,0)$ *dont la valeur est donnée par*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = a_1\, i\ .$$

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 5. [Énoncé] [Indication(s)]

- *Soient* $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rcl} f((a,b)+(h_1,h_2)) & = & f(a+h_1, b+h_2) \\ & = & (a+h_1)^3 + (a+h_1)(b+h_2) + (b+h_2)^2 \\ & = & a^3 + 3a^2h_1 + 3ah_1^2 + h_1^3 + ab + ah_2 + bh_1 + h_1h_2 + b^2 + 2bh_2 + h_2^2 \\ & = & \underbrace{a^3 + ab + b^2}_{f(a,b)} + \underbrace{3a^2h_1 + ah_2 + bh_1 + 2bh_2}_{L(h_1,h_2)} + \underbrace{3ah_1^2 + h_1^3 + h_1h_2 + h_2^2}_{r(h_1,h_2)} \end{array}$$

- *L'application*

$$L \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (h_1,h_2) & \longmapsto & 3a^2h_1 + ah_2 + bh_1 + 2bh_2 \end{array} \right.$$

est linéaire.

- *On observe que* $|h_1| \leq \|h\|$ *et* $|h_2| \leq \|h\|$ *Ainsi*

$$0 \leq |r(h_1,h_2)| \leq 3|a|\,|h_1|^2 + |h_1|^3 + |h_1|\,|h_2| + |h_2|^2 \leq 3|a|\,\|h\|^2 + \|h\|^3 + \|h\|^2 + \|h\|^2 = (3|a|+2)\,\|h\|^2 + \|h\|^3$$

puis

$$0 \leq \frac{|r(h_1,h_2)|}{\|h\|} \leq (3|a|+2)\,\|h\| + \|h\|^2 .$$

Par Théorème d'encadrement, $\dfrac{|r(h_1,h_2)|}{\|h\|} \xrightarrow[h=(h_1,h_2)\to(0,0)]{} 0_{\mathbb{R}}$ *et donc* $r(h_1,h_2) = \underset{(h_1,h_2)\to(0,0)}{o}(\|(h_1,h_2)\|)$.

- *Nous déduisons de cette étude que*

$$f((a,b)+(h_1,h_2)) = f(a,b) + L(h_1,h_2) + \underset{(h_1,h_2)\to(0,0)}{o}(\|(h_1,h_2)\|)$$

où L est l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui à* (h_1,h_2) *associe* $3a^2h_1 + ah_2 + bh_1 + 2bh_2$.
L'application f *est donc différentiable en* (a,b) *et*

$$df(a,b) \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (h_1,h_2) & \longmapsto & 3a^2h_1 + ah_2 + bh_1 + 2bh_2 . \end{array} \right.$$

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 6. [Énoncé] [Indication(s)]

1. *Soit $h \in E$.*

$$f(a+h) = f(a) + f(h) \quad [f \text{ est linéaire}] .$$

Nous en déduisons que f est diffentiable en a et que $df(a) = f$.

2. *D'après la question 1*

$$df \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathscr{L}(E,F) \\ a & \mapsto & df(a) = f \end{array} \right. .$$

La différentielle df est une application constante égale à f.

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 7. [Énoncé] [Indication(s)]

1. *Soit $i \in [\![1, n]\!]$.*

   - *D'après la Proposition 20.12, comme f est différentiable en a, elle admet des dérivées en a dans toutes les directions, en particulier dans la direction e_i. Donc la i-ème dérivée partielle de f en a, notée $D_{e_i} f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existe. D'après la Remarque 20.17*

   $$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) := D_{e_i} f(a) = df(a) \cdot e_i \,.$$

   - *Les arguments sont les mêmes pour g et la formule pour la i-ème dérivée partielle de g en a s'énonce*

   $$\frac{\partial g}{\partial x_i}(a) := D_{e_i} g(a) = dg(a) \cdot e_i \,.$$

2. *Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i . e_i$ un vecteur de E, où $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.*

$$\begin{aligned}
df(a) \cdot (x) &= df(a) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i . e_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i .\, df(a) \cdot e_i \quad [\, df(a) \text{ est linéaire}] \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i . \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \quad [\text{question 1}] \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i . \frac{\partial g}{\partial x_i}(a) \quad [\text{cf. hypothèse sur les dérivées partielles de } f \text{ et } g \text{ en } a] \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i .\, dg(a) \cdot e_i \quad [\text{question 1}] \\
&= dg(a) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i . e_i \right) \quad [\, dg(a) \text{ est linéaire}] \\
&= dg(a) \cdot (x)
\end{aligned}$$

Donc les applications linéaires $df(a)$ et $dg(a)$ de E dans F coïncident.

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 8. [Énoncé] [Indication(s)]

1. • *Soit* $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} f(A+H) & = & (A+H)^3 \\ & = & (A^2+AH+HA+H^2)(A+H) \\ & = & A^3+A^2H+AHA+AH^2+HA^2+HAH+H^2A+H^3 \\ & = & \underbrace{A^3}_{f(A)}+\underbrace{A^2H+AHA+HA^2}_{L(H)}+\underbrace{AH^2+HAH+H^2A+H^3}_{r(H)} \end{array}$$

• *L'application*

$$L \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ H & \mapsto & A^2H+AHA+HA^2 \end{array} \right.$$

est linéaire.

• *Comme* $\|\cdot\|$ *est une norme d'algèbre*

$$\begin{array}{rcl} 0 & \leq & \|r(H)\| \\ & \leq & \left\|AH^2+HAH+H^2A+H^3\right\| \\ & \leq & \left\|AH^2\right\|+\|HAH\|+\left\|H^2A\right\|+\left\|H^3\right\| \\ & \leq & \|A\|\ \|H\|^2+\|H\|\ \|A\|\ \ \|H\|+\|H\|^2\ \|A\|+\|H\|^3 \\ & = & 3\|A\|\ \|H\|^2+\|H\|^3 \end{array}$$

puis

$$0 \leq \frac{\|r(H)\|}{\|H\|} \leq 3\|A\|\ \|H\|+\|H\|^2 .$$

Par Théorème d'encadrement, $\dfrac{\|r(H)\|}{\|H\|} \xrightarrow[H \to 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}]{} 0_{\mathbb{R}}$ *et donc* $r(H) = \underset{H \to 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}}{o}(\|H\|)$.

• *Nous déduisons de cette étude que*

$$f(A+H) = f(A)+L(H)+\underset{H \to 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}}{o}(\|H\|)$$

où L *est l'endomorphisme de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *qui à* H *associe* $A^2H+AHA+HA^2$.
L'application f *est donc différentiable en* A *et*

$$df(A) \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ H & \mapsto & A^2H+AHA+HA^2 . \end{array} \right.$$

2. *Comme l'application* f *est différentiable en* A*, elle est continue en* A*. Cf. Proposition 20.12.*

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 9. [Énoncé] [Indication(s)]

1. • *Soit* $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} f((a,b)+(h_1,h_2)) &= f(a+h_1, b+h_2) \\ &= \sin(a-b+h_1-h_2) \\ &= \sin(a-b)\cos(h_1-h_2)+\cos(a-b)\sin(h_1-h_2) \end{aligned}$$

Quand (h_1, h_2) *tend vers* $(0,0)$, h_1 *tend vers* 0 *et* h_2 *tend vers* 0. *Ainsi quand* (h_1,h_2) *tend vers* $(0,0)$, $h_1 - h_2$ *tend vers* 0. *D'après les DL1 de* $\cos$ *et* $\sin$ *en* 0

$$\cos(h_1-h_2) = 1 + (h_1-h_2)\ \varepsilon_1(h_1-h_2) \quad \textit{et } \sin(h_1-h_2) = (h_1-h_2)+(h_1-h_2)\,\varepsilon_2(h_1-h_2)$$

où

$$\varepsilon_1(h_1-h_2) \xrightarrow[(h_1,h_2)\to(0,0)]{} 0 \quad \textit{et} \quad \varepsilon_2(h_1-h_2) \xrightarrow[(h_1,h_2)\to(0,0)]{} 0\ .$$

Ainsi

$$\begin{aligned} f((a,b)+(h_1,h_2)) &= \sin(a-b)(1+(h_1-h_2)\ \varepsilon_1(h_1-h_2)) + \cos(a-b)((h_1-h_2)+(h_1-h_2)\,\varepsilon_2(h_1-h_2)) \\ &= \underbrace{\sin(a-b)}_{f(a,b)} + \underbrace{\cos(a-b)(h_1-h_2)}_{\textit{linéaire en } (h_1,h_2)} \\ &+ \underbrace{(h_1-h_2)\ (\sin(a-b)\varepsilon_1(h_1-h_2)+\cos(a-b)\varepsilon_2(h_1-h_2))}_{r(h_1,h_2)} \end{aligned}$$

On observe

$$0 \le |r(h_1,h_2)| \le 2\ \|(h_1,h_2)\|\ (|\varepsilon_1(h_1-h_2)|+|\varepsilon_2(h_1-h_2)|)$$

et donc par Théorème d'encadrement

$$r(h_1,h_2) = \underset{(h_1,h_2)\to(0,0)}{o}(\|(h_1,h_2)\|)\ .$$

Ainsi

$$f((a,b)+(h_1,h_2)) = \underbrace{\sin(a-b)}_{f(a,b)} + \underbrace{\cos(a-b)(h_1-h_2)}_{\textit{linéaire en } (h_1,h_2)} + \underset{(h_1,h_2)\to(0,0)}{o}(\|(h_1,h_2)\|)\ .$$

Comme nous avons obtenu un DL1 de f *en* (a,b), *l'application* f *est différentiable en* (a,b) *et de plus la différentielle de* f *en* a *est donnée par la composante linéaire de ce DL1, i.e.*

$$df(a,b) \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (h_1,h_2) & \mapsto & \cos(a-b)(h_1-h_2)\ . \end{array} \right.$$

• *Par définition, la matrice Jacobienne de* f *en* (a,b) *est*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} df(a,b)\cdot e_1 & df(a,b)\cdot e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(a-b) & -\cos(a-b) \end{pmatrix}$$

2. • *L'application* g *est linéaire. Elle est donc différentiable sur* $\mathbb{R}^2$ *et sa différentielle en* (a,b) *(et en tout point de* $\mathbb{R}^2$*) est égale à* g. *Donc*

$$dg(a,b) = g\ .$$

• *Par définition, la matrice Jacobienne de* g *en* (a,b) *est*

$$Mat_{(e_1,e_2)}(\,dg(a,b)) = Mat_{(e_1,e_2)}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 10. [Énoncé] [Indication(s)]

1. (a) i. *Raisonnons par l'absurde et supposons que σ possède au moins $(n-1)$ points fixes. Comme σ n'est pas l'identité, σ ne peut avoir n points fixes. Donc σ possède $(n-1)$ points fixes.*
Soit i le point de $[\![1,n]\!]$ tel que $\sigma(i) \neq i$. Comme $\sigma(i) \neq i$, $\sigma(i)$ est un point fixe de σ et donc $\sigma(\sigma(i)) = \sigma(i)$. Comme σ est injective, $\sigma(i) = i$. Contradiction.
Ainsi $c :=$ Card(Fix(σ)) $\leq n-2$.

ii. *On calcule*

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}[I_n+H]_{i,\sigma(i)} &= \left(\prod_{i\in Fix(\sigma)}[I_n+H]_{i,\sigma(i)}\right)\left(\prod_{i\in[\![1,n]\!]\setminus Fix(\sigma)}[I_n+H]_{i,\sigma(i)}\right)\\ &= \left(\prod_{i\in Fix(\sigma)}(1+h_{i,i})\right)\left(\prod_{i\in[\![1,n]\!]\setminus Fix(\sigma)}h_{i,\sigma(i)}\right)\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}0 &\leq \left|\prod_{i=1}^{n}[I_n+H]_{i,\sigma(i)}\right|\\ &\leq \left(\prod_{i\in Fix(\sigma)}\left|1+h_{i,i}\right|\right)\left(\prod_{i\in[\![1,n]\!]\setminus Fix(\sigma)}\left|h_{i,\sigma(i)}\right|\right)\\ &\leq \left(\prod_{i\in Fix(\sigma)}(1+\left|h_{i,i}\right|)\right)\left(\prod_{i\in[\![1,n]\!]\setminus Fix(\sigma)}\left|h_{i,\sigma(i)}\right|\right) \quad [\textit{inégalité triangulaire}]\\ &\leq \left(\prod_{i\in Fix(\sigma)}(1+\|H\|)\right)\left(\prod_{i\in[\![1,n]\!]\setminus Fix(\sigma)}\|H\|\right) \quad [\|\cdot\| \textit{ est la norme sup}]\\ &\leq (1+\|H\|)^c\ \|H\|^{n-c} \quad [c := \mathrm{Card}(Fix(\sigma))]\ .\end{aligned}$$

Donc

$$0 \leq \frac{\left|\prod_{i=1}^{n}[I_n+H]_{i,\sigma(i)}\right|}{\|H\|} \leq (1+\|H\|)^c\ \|H\|^{n-c-1}\ .$$

D'après la question 1, $c \leq n-2$ et donc $n-c-1 \geq 1$. Aussi a-t-on

$$(1+\|H\|)^c\ \|H\|^{n-c-1} \xrightarrow[H\to 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}]{} 0_{\mathbb{R}}\ .$$

Par Théorème d'encadrement, il vient donc

$$\prod_{i=1}^{n}[I_n+H]_{i,\sigma(i)} \underset{H\to 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}}{=} o(\|H\|)\ .$$

(b) *On démontre le résultat par récurrence finie sur $k \in [\![1,n]\!]$.*

- *Initialisation à $k=1$.*

$$\prod_{i=1}^{1}(1+h_{i,i}) = 1+h_{1,1} = 1+\sum_{i=1}^{1}h_{i,i}\ .$$

Le résultat est donc observé pour $k=1$.

- *Hérédité. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ tel que*

$$\prod_{i=1}^{k}(1+h_{i,i}) = 1 + \sum_{i=1}^{k} h_{i,i} + \underset{H\to 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}}{o}(\|H\|).$$

On calcule

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{k+1}(1+h_{i,i}) &= (1+h_{k+1,k+1})\left(\prod_{i=1}^{k}(1+h_{i,i})\right) \\
&= (1+h_{k+1,k+1})\left(1+\sum_{i=1}^{k} h_{i,i} + \underset{H\to 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}}{o}(\|H\|)\right) \\
&= 1 + h_{k+1,k+1} + \sum_{i=1}^{k} h_{i,i} + h_{k+1,k+1}\sum_{i=1}^{k} h_{i,i} + (1+h_{k+1,k+1})\underset{H\to 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}}{o}(\|H\|) \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{k+1} h_{i,i} + \underbrace{\sum_{i=1}^{k} h_{i,i}h_{k+1,k+1} + (1+h_{k+1,k+1})\underset{H\to 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}}{o}(\|H\|)}_{r(H)}
\end{aligned}$$

Il reste à démontrer $r(H) = \underset{H\to 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}}{o}(\|H\|)$.

$$\begin{aligned}
|r(h)| &\leq \sum_{i=1}^{k}\left|h_{i,i}\right|\,\left|h_{k+1,k+1}\right| + (1+\left|h_{k+1,k+1}\right|)\left|\underset{H\to 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}}{o}(\|H\|)\right| & \left[\textit{inégalité triangulaire}\right] \\
&\leq \sum_{i=1}^{k}\|H\|^2 + (1+\ \|H\|)\left|\underset{H\to 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}}{o}(\|H\|)\right| & \left[\|\cdot\| \textit{ est la norme sup}\right] \\
&= k\|H\|^2 + (1+\ \|H\|)\left|\underset{H\to 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}}{o}(\|H\|)\right|
\end{aligned}$$

Donc

$$0 \leq \frac{|r(h)|}{\|H\|} \leq k\|H\| + (1+\ \|H\|)\left|\frac{\underset{H\to 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}}{o}(\|H\|)}{\|(\| H)}\right|.$$

Par Théorème d'encadrement, on en déduit $r(H) = \underset{H\to 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}}{o}(\|H\|)$.

2. *Soit $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.*

$$\begin{aligned}
f(I_n+H) &= \operatorname{Det}(I_n+H) \\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}[I_n+H]_{i,\sigma(i)} \\
&= \prod_{i=1}^{n}[I_n+H]_{i,\mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}(i)} + \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n\setminus\left\{\mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}\right\}}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}[I_n+H]_{i,\sigma(i)} \\
&= \prod_{i=1}^{n}(1+h_{i,i}) + \underset{H\to 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}}{o}(\|H\|) & \left[\textit{Question 1.(a).ii}\right] \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{n} h_{i,i} + \underset{H\to 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}}{o}(\|H\|) & \left[\textit{Question 1.(b)}\right]
\end{aligned}$$

Nous avons donc établi

$$f(I_n+H)=1+\mathrm{Tr}(H)+\underset{H\to 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}}{o}(\|H\|)$$

3. *D'après la question 2, si* $H\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$f(I_n+H)=\underbrace{\mathrm{Det}(I_n)}_{f(I_n)}+\underbrace{\mathrm{Tr}(H)}_{\textit{linéaire en } H}+\underset{H\to 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}}{o}(\|H\|)$$

Comme nous avons obtenu un DL1 de f *en* I_n*, l'application* f *est différentiable en* I_n *et de plus la différentielle de* f *en* I_n *est donnée par la composante linéaire de ce DL1, i.e.*

$$df(I_n)=Tr.$$

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 11. [Énoncé] [Indication(s)]

- **Étude de la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.**
  Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. L'application
  $$f(\cdot, y) : x \mapsto f(x, y) = \sin(x^2 - y^2)$$
  est la composée d'une fonction polynomiale par sin*, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. La dérivée partielle de f par rapport à x existe donc sur $\mathbb{R}^2$ tout entier et elle est donnée par*
  $$\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,;\ (x, y) \mapsto 2x\cos(x^2 - y^2)$$
  est continue sur $\mathbb{R}^2$.

- **Étude de la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.**
  Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. L'application
  $$f(x, \cdot) : y \mapsto f(x, y) = \sin(x^2 - y^2)$$
  est la composée d'une fonction polynomiale par sin*, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. La dérivée partielle de f par rapport à y existe donc sur $\mathbb{R}^2$ tout entier et elle est donnée par*
  $$\frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,;\ (x, y) \mapsto -2y\cos(x^2 - y^2)$$
  est continue sur $\mathbb{R}^2$.

- **Conclusion.**
  D'après le critère $\mathscr{C}^1$, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, donc différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sa matrice Jacobienne en (x, y) est
  $$\begin{pmatrix} 2x\cos(x^2 - y^2) & -2y\cos(x^2 - y^2) \end{pmatrix}$$

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 12. [Énoncé] [Indication(s)]

Soit $h \in E$.

$$\begin{array}{rcl} f(a+h) & = & \langle u(a+h), a+h \rangle \\ & = & \langle u(a)+u(h), a+h \rangle \quad [u \text{ est linéaire}] \\ & = & \underbrace{\langle u(a), a \rangle}_{f(a)} + \underbrace{\langle u(h), a \rangle + \langle u(a), h \rangle}_{\text{linéaire en } h} + \langle u(h), h \rangle \quad \left[\text{bilinéarité du produit scalaire}\right] \end{array}$$

Si l'on prouve

$$(\star) \qquad \langle u(h), h \rangle = \underset{h \to 0_E}{o}(\|h\|)$$

alors nous aurons le DL1 de f en a suivant

$$f(a+h) = f(a) + \underbrace{\langle u(h), a \rangle + \langle u(a), h \rangle}_{\text{linéaire en } h} + \underset{h \to 0_E}{o}(\|h\|)$$

et nous pourrons conclure à la différentiabilité de f en a et affirmer que $df(a)$ est donnée par

$$df(a) \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ h & \mapsto & \langle u(h), a \rangle + \langle u(a), h \rangle . \end{array} \right.$$

Démontrons $(\star)$. L'application u est un endomorphisme de E, qui est un espace vectoriel de dimension finie. Il existe donc $C > 0$ tel que

$$(\star\star) \qquad \forall\, x \in E, \quad \|u(x)\| \leq C\, \|x\| .$$

Soit $h \in E$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et $(\star\star)$

$$0 \leq |\langle u(h), h \rangle| \leq \|u(h)\|\ \|h\| \leq C\, \|h\|^2 .$$

Par Théorème d'encadrement

$$\langle u(h), h \rangle = \underset{h \to 0_E}{o}(\|h\|)$$

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 13. [Énoncé] [Indication(s)]

1. *Soit $H \in \mathscr{B}(0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}, 1)$.*

   - *Au moyen d'un raisonnement par récurrence et de la propriété d'homogénéité de la norme $\|\cdot\|$, on démontre que*
   $$\forall\ p \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \left\|(-1)^p H^p\right\| \leq \|H\|^p .$$
   D'après le cours sur les séries géométriques, comme $\|H\| < 1$, la série $\sum_{p\geq 0} \|H\|^p$ converge.
   Par théorème de domination sur les séries à termes réels positifs, la série numérique $\sum_{p\geq 0} \left\|(-1)^p H^p\right\|$ converge, i.e. la série matricielle $\sum_{p\geq 0} (-1)^p H^p$ est absolument convergente.
   Comme $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie, on en déduit que la série matricielle $\sum_{p\geq 0} (-1)^p H^p$ converge dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   - *Pour tout $q \in \mathbb{N}$*
   $$(\star) \quad (I_n + H) \times \left(\sum_{p=0}^{q} (-1)^p H^p\right) = I_n + (-1)^{q+1} H^{q+1} \quad [\textit{somme télescopique}]$$
   - *Pour tout $q \in \mathbb{N}$*
   $$0 \leq \left\|(-1)^{q+1} H^{q+1}\right\| \leq \|H\|^{q+1} .$$
   Comme $\|H\| < 1$, $\|H\|^{q+1} \xrightarrow[q\to+\infty]{} 0$. Par Théorème d'encadrement, $\left\|(-1)^{q+1} H^{q+1}\right\| \xrightarrow[q\to+\infty]{} 0$, i.e;
   $$(\star\star) \qquad (-1)^{q+1} H^{q+1} \xrightarrow[q\to+\infty]{} 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} .$$
   - *L'application*
   $$\mu \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & (I_n + H)M \end{array} \right.$$
   est linéaire. Comme $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie, l'application μ est continue et donc
   $$(\star\star\star) \quad (I_n+H)\times\left(\sum_{p=0}^{q} (-1)\, H^p\right) = \mu\left(\sum_{p=0}^{q} (-1)^p H^p\right) \xrightarrow[q\to+\infty]{} \mu\left(\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p H^p\right) = (I_n+H)\times\left(\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p H^p\right).$$
   - *De $(\star)$, $(\star)$ et $(\star\star\star)$, nous déduisons, en faisant tendre q vers $+\infty$, que*
   $$(I_n + H) \times \left(\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p H^p\right) = I_n .$$
   La matrice $I_n + H$ est donc inversible, d'inverse $\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p H^p$.

2. *Soit $H \in \mathscr{B}(0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}, 1)$. Soit $q \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. D'après l'inégalité triangulaire, l'homogénéité de la norme $\|\cdot\|$ et le fait que la norme $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre unitaire*
$$(\star) \qquad \left\|\sum_{p=2}^{q} (-1)^p H^p\right\| \leq \sum_{p=2}^{q} \|H\|^p .$$

Comme la série matricielle $\sum_{p\geq 0}(-1)^p H^p$ *converge et que la norme* $\|\cdot\|$ *est continue (elle est 1-lipschtizienne)*

$$\left\|\sum_{p=2}^{q}(-1)^p H^p\right\| \xrightarrow[q\to+\infty]{} \left\|\sum_{p=2}^{+\infty}(-1)^p H^p\right\| .$$

D'après les résultats sur les séries géométriques

$$\sum_{p=2}^{q}\|H\|^p \xrightarrow[q\to+\infty]{} \frac{1}{1-\|H\|}-1-\|H\| = \frac{\|H\|^2}{1-\|H\|} .$$

En faisant tendre q *vers* $+\infty$ *dans* $(\star)$*, il vient donc*

$$0 \leq \left\|\sum_{p=2}^{+\infty}(-1)^p H^p\right\| \leq \frac{\|H\|^2}{1-\|H\|} .$$

Par Théorème d'encadrement, $\sum_{p=2}^{+\infty}(-1)^n H^n = \underset{H\to 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}}{o}(\|H\|)$.

3. *Soit* $H\in\mathscr{B}(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})},1)$*. D'après la question 1,* $I_n+H\in GL_n(\mathbb{R})$*.*

$$\begin{aligned} f(I_n+H) &= (I_n+H)^{-1} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p H^p \quad [\textit{question 1}] \\ &= I_n - H + \textstyle\sum_{p=2}^{+\infty}(-1)^p H^p \\ &= \underbrace{I_n}_{f(I_n)} + \underbrace{(-H)}_{\textit{linéaire en } H} + \underset{H\to 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}}{o}(\|H\|) \quad [\textit{question 2}] \end{aligned}$$

Nous avons établi un DL1 de f *en* I_n*. Nous pouvons conclure à la différentiabilité de* f *en* I_n *et affirmer que* $df(I_n)$ *est donnée par*

$$df(I_n) \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ H & \mapsto & -H . \end{array}\right.$$

4. (a) *Soit* $H\in\mathscr{B}\left(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})},\frac{1}{\|A^{-1}\|}\right)$*. Comme* $\|\cdot\|$ *est une norme d'algèbre unitaire*

$$\left\|A^{-1}H\right\| \leq \underbrace{\left\|A^{-1}\right\|}_{>0}\ \underbrace{\|H\|}_{<1/\|A^{-1}\|} < 1 .$$

On peut donc appliquer les résultats de la question 1 à $H \leftarrow A^{-1}H$*.*
La série matricielle $\sum_{p\geq 0}(-1)^p(A^{-1}H)^p$ *converge et*

$$(I_n+A^{-1}H)\times\left(\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p(A^{-1}H)^p\right) = I_n .$$

Ainsi

$$(I_n+A^{-1}H)^{-1} = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p(A^{-1}H)^p$$

(b) *Soit* $H \in \mathscr{B}\left(0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}, \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}\right)$. *D'après la question 4.(a), la matrice* $(I_n + A^{-1}H)$ *est inversible. Donc la matrice*

$$A\,(I_n + A^{-1}H) = A + H$$

est également inversible ($GL_n(\mathbb{R})$ *est stable par produit).*
On calcule

$$\begin{aligned} f(A+H) &= (A+H)^{-1} \\ &= \left(A\,(I_n + A^{-1}H)\right)^{-1} \\ &= (I_n + A^{-1}H)^{-1}\,A^{-1} \\ &= \left(\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p\,(A^{-1}H)^p\right) A^{-1} \quad [\textit{question 4.(a)}] \\ &= \left(I_n - A^{-1}H + \sum_{p=2}^{+\infty} (-1)^p\,(A^{-1}H)^p\right) A^{-1} \\ &= \underbrace{A^{-1}}_{f(A)} + \underbrace{(-A^{-1}HA^{-1})}_{\textit{linéaire en } H} + \left(\sum_{p=2}^{+\infty} (-1)^p\,(A^{-1}H)^p\right) A^{-1}. \end{aligned}$$

Le résultat sera donc établi si l'on prouve

$$(\star) \qquad \left(\sum_{p=2}^{+\infty} (-1)^p\,(A^{-1}H)^p\right) A^{-1} \underset{H \to 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}}{=} o\,(\|H\|).$$

Au cours de la question 2, nous avons établi

$$0 \leq \left\| \sum_{p=2}^{+\infty} (-1)^p H^p \right\| \leq \frac{\|H\|^2}{1 - \|H\|}.$$

pour toute matrice H *de norme strictement inférieure à 1. Comme ici* $A^{-1}H$ *à une norme strictement inférieure à 1 (cf. question 4.(a)), on peut spécialiser cette inégalité à* $H \leftarrow A^{-1}H$ *pour obtenir*

$$0 \leq \left\| \sum_{p=2}^{+\infty} (-1)^p (A^{-1}H)^p \right\| \leq \frac{\|A^{-1}H\|^2}{1 - \|A^{-1}H\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|^2}{1 - \|A^{-1}H\|}\ \|H\|^2 \ .$$

Nous en déduisons

$$(\star\star) \qquad 0 \leq \left\| \left(\sum_{p=2}^{+\infty} (-1)^p\,(A^{-1}H)^p\right) A^{-1} \right\| \leq \left\| \sum_{p=2}^{+\infty} (-1)^p\,(A^{-1}H)^p \right\| \left\|A^{-1}\right\| \leq \frac{\|A^{-1}\|^3}{1 - \|A^{-1}H\|}\ \|H\|^2 .$$

L'application

$$\mu_{A^{-1}} \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & A^{-1}M \end{array} \right.$$

est linéaire et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *est un sous-espace vectoriel de dimension finie. Donc* $\mu_{A^{-1}}$ *est continue et*

$$A^{-1}H = \mu_{A^{-1}}(H) \xrightarrow[H \to 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}]{} \mu_{A^{-1}}\left(0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}\right) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$

i.e.

$$(\star\star\star) \qquad \left\| A^{-1} H \right\| \xrightarrow[H \to 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}]{} 0_{\mathbb{R}} \, .$$

De $(\star\star)$, $(\star\star\star)$ *et du Théorème d'encadrement, nous déduisons*

$$\left(\sum_{p=2}^{+\infty} (-1)^p \left(A^{-1} H\right)^p \right) A^{-1} = \underset{H \to 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}}{o} (\|H\|)$$

ce qui achève la démonstration. Soit

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 14. [Énoncé] [Indication(s)]

1.
- **Introduction des fonctions coordonnées.**
Si on pose
$$f_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,;\,(x,y,z) \mapsto x+y+z \qquad \text{et} \qquad f_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,;\,(x,y,z) \mapsto xyz$$
alors pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z))$.

- **Étude de la dérivée partielle $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}$.**
Soient $y,z \in \mathbb{R}$ *fixés. L'application*
$$f_1(\cdot,y,z)\colon\ x \mapsto f_1(x,y,z) = x+y+z$$
est une fonction affine, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. *La dérivée partielle de* f_1 *par rapport à* x *existe donc sur* $\mathbb{R}^3$ *tout entier et elle est donnée par*
$$\frac{\partial f_1}{\partial x}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,;\,(x,y,z) \mapsto 1$$
qui est continue sur $\mathbb{R}^3$.

- **Étude de la dérivée partielle $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}$.**
Soient $x,z \in \mathbb{R}$ *fixés. L'application*
$$f_1(x,\cdot,z)\colon\ y \mapsto f_1(x,y,z) = x+y+z$$
est une fonction affine, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. *La dérivée partielle de* f_1 *par rapport à* y *existe donc sur* $\mathbb{R}^3$ *tout entier et elle est donnée par*
$$\frac{\partial f_1}{\partial y}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,;\,(x,y,z) \mapsto 1$$
qui est continue sur $\mathbb{R}^3$.

- **Étude de la dérivée partielle $\dfrac{\partial f_1}{\partial z}$.**
Soient $x,y \in \mathbb{R}$ *fixés. L'application*
$$f_1(x,y,\cdot)\colon\ z \mapsto f_1(x,y,z) = x+y+z$$
est une fonction affine, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. *La dérivée partielle de* f_1 *par rapport à* z *existe donc sur* $\mathbb{R}^3$ *tout entier et elle est donnée par*
$$\frac{\partial f_1}{\partial z}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,;\,(x,y,z) \mapsto 1$$
qui est continue sur $\mathbb{R}^3$.

- **Étude de la dérivée partielle $\dfrac{\partial f_2}{\partial x}$.**
Soient $y,z \in \mathbb{R}$ *fixés. L'application*
$$f_2(\cdot,y,z)\colon\ x \mapsto f_2(x,y,z) = xyz$$
est une fonction affine, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. *La dérivée partielle de* f_2 *par rapport à* x *existe donc sur* $\mathbb{R}^3$ *tout entier et elle est donnée par*
$$\frac{\partial f_2}{\partial x}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,;\,(x,y,z) \mapsto yz$$
qui est continue sur $\mathbb{R}^3$.

- **Étude de la dérivée partielle $\dfrac{\partial f_2}{\partial y}$.**
Soient $x, z \in \mathbb{R}$ fixés. L'application

$$f_2(x, \cdot, z) : \ y \mapsto f_2(x, y, z) = xyz$$

est une fonction affine, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. La dérivée partielle de f_2 par rapport à y existe donc sur $\mathbb{R}^3$ tout entier et elle est donnée par

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \, ; \ (x, y, z) \mapsto xz$$

qui est continue sur $\mathbb{R}^3$.

- **Étude de la dérivée partielle $\dfrac{\partial f_2}{\partial z}$.**
Soient $x, y \in \mathbb{R}$ fixés. L'application

$$f_2(x, y, \cdot) : \ y \mapsto f_2(x, y, z) = xyz$$

est une fonction affine, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. La dérivée partielle de f_2 par rapport à z existe donc sur $\mathbb{R}^3$ tout entier et elle est donnée par

$$\frac{\partial f_2}{\partial z} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \, ; \ (x, y, z) \mapsto xy$$

qui est continue sur $\mathbb{R}^3$.

- *D'après le critère $\mathscr{C}^1$, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$, donc différentiable sur $\mathbb{R}^3$ et pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$*

$$Mat_{\mathscr{B}_3, \mathscr{B}_2}(\, df(x, y, z)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

où $\mathscr{B}_3$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}_2$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Ainsi pour tout $(h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$

$$df(x, y, z) \cdot (h_1, h_2, h_3) = \big(h_1 + h_2 + h_3 \, , \ yz\, h_1 + xz\, h_2 + xy\, h_3\big) \, .$$

2. (a) *Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.*

$$\begin{aligned} df(x,y,z) \text{ n'est pas surjective } &\iff \operatorname{Rg}\big(\, df(x, y, z)\big) < 2 \\ &\iff \operatorname{Rg}\big(Mat_{\mathscr{B}_3, \mathscr{B}_2}(\, df(x, y, z))\big) < 2 \\ &\iff \operatorname{Rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}\right) < 2 \\ &\iff \operatorname{Rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}\right) = 1 \quad [\text{le rang ne peut être nul ici}] \\ &\iff yz = xz = xy \, . \end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{R}^3 \setminus U = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ yz = xz \ \text{ et } \ xz = xy\big\} = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ yz = xz\big\} \bigcap \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ xz = xy\big\}$$

Comme pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$(yz = xz) \iff ((z=0) \text{ ou } (x=y)) \qquad \text{et} \qquad (xz = xy) \iff ((x=0) \text{ ou } (y=z))$$

il vient

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^3 \setminus U \quad = \quad & \left(\underbrace{\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z=0\right\}}_{P_1} \cup \underbrace{\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x=y\right\}}_{P_2} \right) \\ \bigcap \quad & \\ & \left(\underbrace{\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x=0\right\}}_{P_3} \cup \underbrace{\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y=z\right\}}_{P_4} \right) \\ = \quad & (P_1 \cap P_3) \cup (P_1 \cap P_4) \cup (P_2 \cap P_3) \cup (P_2 \cap P_4)\,.\end{aligned}$$

On observe

$$\begin{aligned} P_1 \cap P_3 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z=0 \ \text{ et } \ x=0\right\} = \operatorname{Vect}((0,1,0)) \\ P_1 \cap P_4 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z=0 \ \text{ et } \ y=z\right\} = \operatorname{Vect}((1,0,0)) \\ P_2 \cap P_3 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x=y \ \text{ et } \ x=0\right\} = \operatorname{Vect}((0,0,1)) \\ P_2 \cap P_4 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x=y \ \text{ et } \ y=z\right\} = \operatorname{Vect}((1,1,1)) \end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{R}^3 \setminus U = \operatorname{Vect}((0,1,0)) \bigcup \operatorname{Vect}((1,0,0)) \bigcup \operatorname{Vect}((0,0,1)) \bigcup \operatorname{Vect}((1,1,1))\ .$$

(b) *Comme un sous-espace de dimension finie est fermé, les sous-espaces vectoriels* $\operatorname{Vect}((0,1,0))$, $\operatorname{Vect}((1,0,0))$, $\operatorname{Vect}((0,0,1))$ *et* $\operatorname{Vect}((1,1,1))$ *sont fermés dans* $\mathbb{R}^3$*. L'ensemble* $\mathbb{R}^3 \setminus U$ *est donc fermé dans* $\mathbb{R}^3$*, comme réunion d'un nombre fini de parties fermées de* $\mathbb{R}^3$*. On en déduit que* U *est une partie ouverte de* $\mathbb{R}^3$*.*

Un corrigé de l'exercice 15. [Énoncé] [Indication(s)]

1. *Si on introduit la norme infinie sur* $\mathbb{R}^2$

$$\|\cdot\|_\infty \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}_+ \\ (x_1,x_2) & \mapsto & \max(|x_1|,|x_2|) \end{array} \right.$$

alors

$$\begin{aligned} \Omega &:= \,]a_1-r,a_1+r[\times]a_2-r,a_2+r[\\ &= \left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \,:\, |x_1-a_1|<r \text{ et } |x_2-a_2|<r\right\} \\ &= \left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \,:\, \|(x_1,x_2)-(a_1,a_2)\|_\infty<r\right\} \\ &= B_{\|\cdot\|_\infty}((a_1,a_2),r)\,. \end{aligned}$$

Comme une boule ouverte est un ouvert, la partie Ω *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$.

2. *La fonction* f *admet des dérivées partielles suivant les variables* x_1 *et* x_2, *en tout point de* Ω, *et les fonctions*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\left| \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x)=0 \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}\left| \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x)=0 \end{array} \right.$$

sont clairement continues sur Ω. *D'après le critère* $\mathscr{C}^1$, *la fonction* f *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* Ω, *en particulier différentiable sur* Ω.

3. *D'après le cours (Proposition 20.23), pour tout* $x\in\Omega$, *pour tout* $(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2$

$$df(x)\cdot(h_1,h_2) = h_1\,\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)+h_2\,\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)=0\,.$$

Donc $df(x)\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.

4. *Soit* $(b_1,b_2)\in\Omega=]a_1-r,a_1+r[\times]a_2-r,a_2+r[$. *On observe que le point* $(b_1,a_2)\in\Omega$. *Comme les dérivées partielles de* f *existent et sont continues en tout point de* Ω, *le Théorème fondamental de l'analyse livre*

$$\begin{aligned} f(b_1,b_2)-f(a_1,a_2) &= f(b_1,b_2)-f(b_1,a_2)+f(b_1,a_2)-f(a_1,a_2) \\ &= \int_{a_2}^{b_2}\frac{\partial f}{\partial x_2}(b_1,x_2)\,dx_2+\int_{a_1}^{b_1}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,a_2)\,dx_1 \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

La fonction f *est donc constante sur* Ω.

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 16. [Énoncé] [Indication(s)]

1. • *Soit* γ *l'arc défini par*

$$\gamma \left| \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto & (x_1(t),\ldots,x_n(t))\,. \end{array} \right.$$

Par hypothèse, pour tout $t \in \Omega$, $\gamma(t) \in \Omega$. *Donc l'arc* γ *est tracé sur* Ω. *De plus la fonction* γ *est dérivable sur* I, *car ses fonctions coordonnées* $x_1,\ldots,x_n$ *le sont (hypothèse H1).*

• *D'après l'hypothèse H2, la fonction* f *est différentiable sur* Ω.

• *Les hypothèses du Corollaire 20.38 (dérivée le long d'un arc) sont vérifiées. En l'appliquant, il vient*

(C1) *l'arc* $f\circ\gamma\colon I\to\mathbb{R}^m\,;\ t\mapsto f(x_1(t),\ldots,x_n(t))$, *qui coïncide avec l'arc* g, *est dérivable sur* I *;*

(C2) *pour tout* $t\in I$

$$(\star)\quad g'(t) = (f\circ\gamma)'(t) = df(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,.$$

2. *Nous donnons deux solutions.*

(A) *À l'aide de la formule livrée par la dérivée le long d'un arc et la Jacobienne de* f. *Nous notons* $\mathscr{B}_n$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\mathscr{B}_m$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^m$.

• *Nous savons que*

$$\gamma'(t) = (x_1'(t),\ldots,x_n'(t))$$

et donc les coordonnées de $\gamma'(t)$ *dans la base* $\mathscr{B}_n$ *sont données par*

$$Mat_{\mathscr{B}_n}(\gamma'(t)) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t)\end{pmatrix}.$$

• *D'après la Proposition 20.23 (expression de la différentielle d'une application différentiable via ses dérivées partielles), la matrice* $Mat_{\mathscr{B}_n,\mathscr{B}_m}\left(df(\gamma(t))\right) = Mat_{\mathscr{B}_n,\mathscr{B}_m}\left(df(x_1(t),\ldots,x_n(t))\right)$ *est donnée par (cf. Jacobienne de* f *en* $\gamma(t)$*)*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x_1(t),\ldots,x_n(t)) & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(x_1(t),\ldots,x_n(t)) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(x_1(t),\ldots,x_n(t)) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(x_1(t),\ldots,x_n(t)) & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(x_1(t),\ldots,x_n(t)) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n}(x_1(t),\ldots,x_n(t)) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(x_1(t),\ldots,x_n(t)) & \frac{\partial f_m}{\partial y_2}(x_1(t),\ldots,x_n(t)) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial y_n}(x_1(t),\ldots,x_n(t)) \end{pmatrix}.$$

• *De* $(\star)$ *on déduit*

$$Mat_{\mathscr{B}_m}(g'(t)) = Mat_{\mathscr{B}_m}\left(df(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\right) = Mat_{\mathscr{B}_n,\mathscr{B}_m}\left(df(\gamma(t))\right)\times Mat_{\mathscr{B}_n}(\gamma'(t))\,.$$

Ainsi $Mat_{\mathscr{B}_m}(g'(t))$ égale

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x_1(t),\ldots,x_n(t)) & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(x_1(t),\ldots,x_n(t)) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(x_1(t),\ldots,x_n(t)) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(x_1(t),\ldots,x_n(t)) & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(x_1(t),\ldots,x_n(t)) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n}(x_1(t),\ldots,x_n(t)) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(x_1(t),\ldots,x_n(t)) & \frac{\partial f_m}{\partial y_2}(x_1(t),\ldots,x_n(t)) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial y_n}(x_1(t),\ldots,x_n(t)) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t)\,. \end{pmatrix}$$

En calculant ce produit matriciel, il vient

$$Mat_{\mathscr{B}_m}(g'(t)) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i'(t)\,\frac{\partial f_1}{\partial y_i}(x_1(t),\ldots,x_n(t)) \\ \sum_{i=1}^{n} x_i'(t)\,\frac{\partial f_2}{\partial y_i}(x_1(t),\ldots,x_n(t)) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i'(t)\,\frac{\partial f_m}{\partial y_i}(x_1(t),\ldots,x_n(t)) \end{pmatrix}.$$

Donc

$$g'(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i'(t)\,\frac{\partial f_1}{\partial y_i}(x_1(t),\ldots,x_n(t))\,,\ \sum_{i=1}^{n} x_i'(t)\,\frac{\partial f_2}{\partial y_i}(x_1(t),\ldots,x_n(t))\,,\ \ldots\,,\ \sum_{i=1}^{n} x_i'(t)\,\frac{\partial f_m}{\partial y_i}(x_1(t),\ldots,x_n(t)) \right).$$

(B) À l'aide de la règle de la chaîne.

- *L'arc γ défini par*

$$\gamma \left| \begin{array}{lcl} I & \to & \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto & (x_1(t),\ldots,x_n(t)) \end{array} \right.$$

  est dérivable sur I. Comme γ est une fonction d'une variable, elle est différentiable sur I. Cf. Proposition 20.21 (Différentiabilité et différentielle de fonctions d'un ouvert de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^m$).
- *D'après l'hypothèse H2, la fonction f est différentiable sur Ω.*
- *Nous pouvons donc appliquer la règle de la chaîne (Proposition 20.40) pour calculer la dérivée de*

$$g \left| \begin{array}{lcl} I & \to & \mathbb{R}^m \\ t & \mapsto & f(x_1(t),\ldots,x_n(t)) = \left(\underbrace{f_1(x_1(t),\ldots,x_n(t))}_{g_1(t_1,\ldots,t_n)}\,,\ \ldots\,,\ \underbrace{f_m(x_1(t),\ldots,x_n(t))}_{g_m(t_1,\ldots,t_n)} \right) \end{array} \right.$$

  Nous obtenons, pour tout $k \in [\![1,m]\!]$

$$\frac{dg_k}{dt}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial y_i}(x_1(t),\ldots,x_n(t)) \times \frac{dx_i}{dt}(t)$$

  i.e.

$$g_k'(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(t)\,\frac{\partial f_k}{\partial y_i}(x_1(t),\ldots,x_n(t))\,.$$

Comme $g'(t) = (g_1'(t), \dots, g_m'(t))$, *il vient*

$$g'(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i'(t) \frac{\partial f_1}{\partial y_i}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \, , \, \sum_{i=1}^{n} x_i'(t) \frac{\partial f_2}{\partial y_i}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \, , \, \dots \, , \, \sum_{i=1}^{n} x_i'(t) \frac{\partial f_m}{\partial y_i}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \right) .$$

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 17. [Énoncé] [Indication(s)]

1.
   - *Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Comme pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ existe et est nul, la fonction*
   $$f(x,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\; y \mapsto f(x,y)$$
   est dérivable et de dérivée nulle. Elle est donc constante. Ainsi
   $$(\star) \quad \forall\, y \in \mathbb{R}, \quad f(x,y) = f(x,0)\,.$$
   - *L'application*
   $$i \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & (x,0) \end{array} \right.$$
   est linéaire, donc différentiable sur $\mathbb{R}$, avec une différentielle constante
   $$di \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathscr{L}(\mathbb{R},\mathbb{R}^2) \\ x & \mapsto & i\,. \end{array} \right.$$
   Ainsi, l'application i est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   - *Par composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, l'application $\varphi := f \circ i$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus, d'après $(\star)$*
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = f(x,0) = \varphi(x)\,.$$

2. (a)
   - *L'application*
   $$s \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array} \right.$$
   est linéaire donc différentiable sur $\mathbb{R}^2$, avec une différentielle constante
   $$ds \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathscr{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) \\ (x,y) & \mapsto & s\,. \end{array} \right.$$
   Ainsi, l'application s est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
   - *L'application φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Comme il s'agit d"une fonction d'une variable réelle, pour tout $x \in \mathbb{R}$, sa différentielle $d\varphi(x)$ au point x est*
   $$d\varphi(x) \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t\,\varphi'(x)\,. \end{array} \right.$$
   - *Par composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, l'application $f := \varphi \circ s$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et*
   $$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad df(x,y) = d\varphi(x+y) \circ ds(x,y)$$
   et donc, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, pour tout $(h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$
   $$\begin{aligned} df(x,y)\cdot(h_1,h_2) &= d\varphi(x+y)\cdot\big(ds(x,y)\cdot(h_1,h_2)\big) \\ &= d\varphi(x+y)\cdot(s\cdot(h_1,h_2)) \\ &= d\varphi(x+y)\cdot(h_1+h_2) \\ &= \varphi'(x+y)\,(h_1+h_2)\,. \end{aligned}$$

- *Donc, si on note* (e_1, e_2) *la base canonique de* $\mathbb{R}^2$, *pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) := D_{e_1} f(x,y) = \; df(x,y) \cdot e_1 = \varphi'(x+y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) := D_{e_2} f(x,y) = \; df(x,y) \cdot e_2 = \varphi'(x+y) \, .$$

Nous avons donc, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \varphi'(x+y) - \varphi'(x+y) = 0 \, .$$

(b) • *L'application*

$$\psi \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \mapsto & \left(\underbrace{\frac{u+v}{2}}_{\psi_1(u,v)}, \underbrace{\frac{u-v}{2}}_{\psi_2(u,v)} \right) \end{array} \right.$$

est linéaire, donc différentiable sur $\mathbb{R}^2$, *avec une différentielle constante*

$$d\psi \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathscr{L}(\mathbb{R}^2) \\ (x,y) & \mapsto & \psi \, . \end{array} \right.$$

Ainsi, l'application ψ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^2$.

- *Par composée de fonctions de classe* $\mathscr{C}^1$, *l'application* $g = f \circ \psi$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^2$.
- *D'après la règle de la chaîne, pour tout* $(u, v) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) \times \frac{\partial \psi_1}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) \times \frac{\partial \psi_2}{\partial v}(u,v) \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) - \frac{1}{2}\,\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) \\ &= 0 \quad \left[f \text{ est solution de } (E).\right] \end{aligned}$$

- *D'après la question 1, il existe une fonction* $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *telle que, pour tout* $(u, v) \in \mathbb{R}^2$

$$(\star\star) \quad f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) =: g(u,v) = \varphi(u) \, .$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. *En appliquant* $(\star\star)$ *à* $u \leftarrow x + y$ *et* $v \leftarrow x - y$, *il vient*

$$f\left(x,y\right) = \varphi(x+y) \, .$$

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 18. [Énoncé] [Indication(s)]

1. - *On introduit l'arc* γ *défini par*
$$\gamma \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (tx, ty) \,. \end{array} \right.$$
Comme ses composantes $t \mapsto tx$ *et* $t \mapsto ty$ *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$*, l'arc* γ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$*. De plus, pour tout* $t \in \mathbb{R}$
$$\gamma'(t) = (x, y) \,.$$
   - *Comme la fonction* f *est différentiable sur* $\mathbb{R}$*, les résultats sur la dérivation le long d'un arc s'appliquent. L'application* $g = f \circ \gamma$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et, pour tout* $t \in \mathbb{R}$
$$g'(t) = \, df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \, df(\gamma(t)) \cdot (x, y) \,.$$
D'après l'expression de la différentielle d'une fonction différentiable via ses dérivées partielles, on en déduit, pour tout $t \in \mathbb{R}$
$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t))\, x + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))\, y = \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty)\, x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty)\, y \,.$$

2. (a) *Soit* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
   - *D'après la question 1, la fonction*
$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(tx, ty) \end{array} \right.$$
est dérivable et
$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty)\, x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty)\, y \,.$$
   - *Compte tenu de l'hypothèse d'homogénéité vérifiée par la fonction* f*, on a également*
$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) = f(x, y) \,.$$
   - *On en déduit que, pour tout* $t \in \mathbb{R}$
$$f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty)\, x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty)\, y \,.$$

   (b) *Soient* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*. En appliquant le résultat de la question 2.(a) avec* $t \leftarrow 0$*, il vient*
$$f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)\, x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)\, y \,.$$
Les réels $\alpha := \dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ *et* $\beta := \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ *sont indépendants de* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*. Donc*
$$\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \alpha x + \beta y \,.$$

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 19. [Énoncé] [Indication(s)]

1.
   - *L'application f est polynomiale en les variables x et y donc différentiable sur $\mathbb{R}^2$ (et même de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$).*
   - *On calcule, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3y^2 - 3\,.$$

   Donc son gradient en un point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est

   $$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,,\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = (2x, 3y^2 - 3)\,.$$

2. *Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.*

   $$\begin{aligned} \nabla f(x,y) = (0,0) \quad & \iff \quad 2x = 0 \quad \text{et} \quad 3y^2 - 3 = 0 \\ & \iff \quad x = 0 \quad \text{et} \quad \big(y = -1 \text{ ou } y = 1\big)\,. \end{aligned}$$

   Donc la fonction f possède deux poins critiques : $(0,1)$ et $(0,-1)$.

3.
   - **Détermination des points à étudier.**
   Comme $\mathbb{R}^2$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$, si la fonction f atteint un extremum local en un point, alors ce point est un point critique de f, d'après la condition nécessaire d'existence d'un extremum. Il y a donc deux points à étudier, d'après la Question 2.
   - **Étude du point critique $(0,1)$ de f.**
   Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

   $$\begin{aligned} f(x, 1+y) - f(0,1) &= x^2 + (y+1)^3 - 3(y+1) - (-2) \\ &= x^2 + y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - 3y - 3 + 2 \\ &= x^2 + y^2(y+3)\,. \end{aligned}$$

   Donc pour tout (x,y) appartenant à

   $$\mathscr{U} := \mathbb{R} \times]-3,3[$$

   qui est voisinage ouvert de $(0,0)$, $f(x,1+y) \geq f(0,1)$. La fonction f atteint donc un minimum local (valant -2) au point $(0,1)$.
   Ce minimum local n'est pas global car

   $$f(0,y) = y^3 - y \underset{y \to -\infty}{\sim} y^3 \xrightarrow[y \to -\infty]{} -\infty\,.$$

   - **Étude du point critique $(0,-1)$ de f.**
   Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

   $$\begin{aligned} f(x, -1+y) - f(0,-1) &= x^2 + (y-1)^3 - 3(y-1) - 2 \\ &= x^2 + y^3 - 3y^2 + 3y - 1 - 3y + 3 - 2 \\ &= x^2 - 3y^2 + y^3 \end{aligned}$$

   D'une part, pour tout $x \in \mathbb{R}$

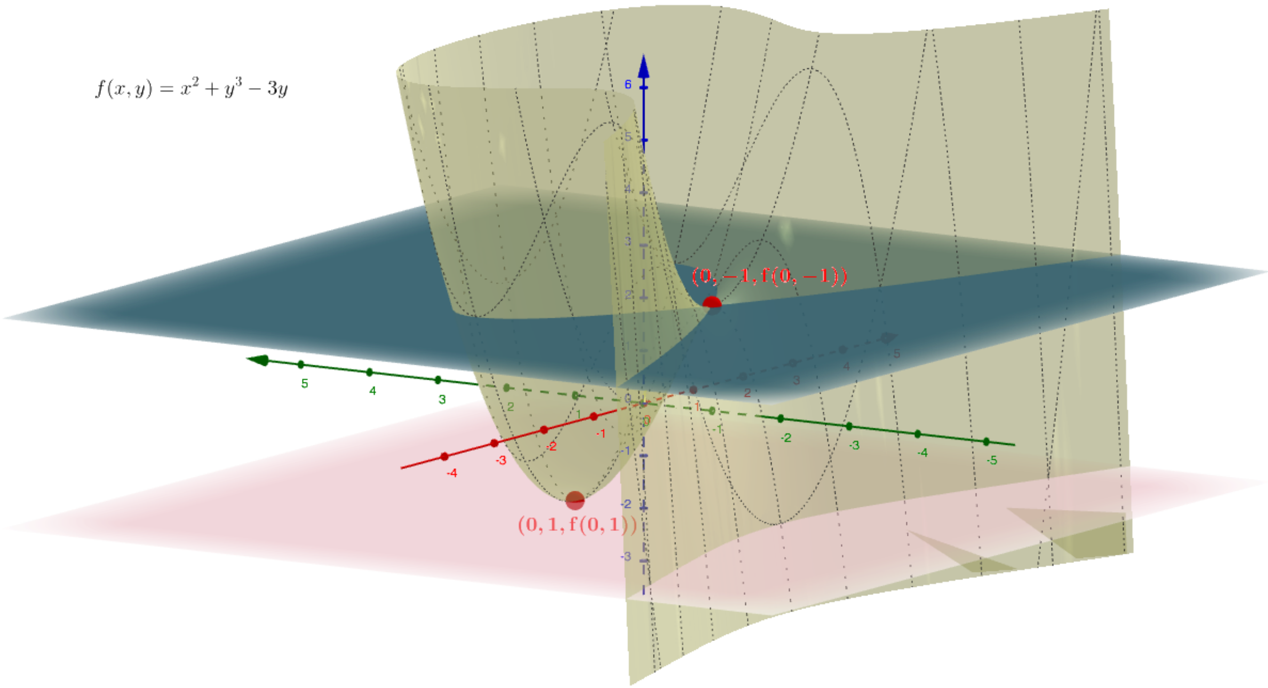
   $$f(x,-1) - f(0,-1) = x^2 \geq 0\,.$$

   D'autre part

   $$f(0,-1+y) = -3y^2 + y^3 \underset{y \to 0}{\sim} -3y^2 < 0\,.$$

   Donc la quantité $f(x,-1+y) - f(0,-1)$ n'a de signe constant dans aucun voisinage de $(0,0)$. Ainsi la fonction f n'atteint pas un extremum local (et a fortiori pas un extremum global) au point $(0,-1)$.

- **Vérification de la cohérence.**
  Les résultats obtenus sont cohérents avec le graphe de f ci-dessous **[Geogebra3D]** .



UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 20. [Énoncé] [Indication(s)]

1. (a) • *Soit $t_2 \in \mathbb{R}^*$ fixé. L'application*

$$q(\cdot, t_2) \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t_1 & \longmapsto & q(t_1, t_2) = \dfrac{t_1}{t_2} \end{array} \right.$$

est linéaire, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction q admet une dérivée partielle par rapport à la variable t_1, pour tout $(t_1, t_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Cette dérivée partielle $\dfrac{\partial q}{\partial t_1}$ est donnée par

$$\frac{\partial q}{\partial t_1} \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t_1, t_2) & \longmapsto & \dfrac{1}{t_2} \end{array} \right.$$

qui est <u>continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$</u>.

• *Soit $t_1 \in \mathbb{R}$. L'application*

$$q(t_1, \cdot,) \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t_1 & \longmapsto & q(t_1, t_2) = \dfrac{t_1}{t_2} \end{array} \right.$$

est un multiple de la fonction inverse, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction q admet une dérivée partielle par rapport à la variable t_2, pour tout $(t_1, t_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Cette dérivée partielle $\dfrac{\partial q}{\partial t_2}$ est donnée par

$$\frac{\partial q}{\partial t_2} \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t_1, t_2) & \longmapsto & -\dfrac{t_1}{(t_2)^2} \end{array} \right.$$

qui est <u>continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$</u>.

• *D'après le critère $\mathscr{C}^1$, la fonction q est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. De plus, pour tout $(t_1, t_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, pour tout $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$*

$$dq(t_1, t_2) = \frac{\partial q}{\partial t_1}(t_1, t_2)\, h_1 + \frac{\partial q}{\partial t_2}(t_1, t_2)\, h_2 = \frac{1}{t_2}\, h_1 - \frac{t_1}{(t_2)^2}\, h_2 \,.$$

(b) • *L'application u est un endomorphisme de E donc différentiable sur E et, pour tout $x \in E$*

$$du(x) = u \,.$$

De même, comme l'application id_E est linéaire, elle est différentiable sur E et pour tout $x \in E$

$$d\mathrm{id}_E(x) = \mathrm{id}_E \,.$$

Comme l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire, nous savons d'après le cours que l'application

$$\langle u, \mathrm{id}_E \rangle \left| \begin{array}{lcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \langle u(x), x \rangle \end{array} \right.$$

est différentiable sur E et, pour tout $x \in E$, pour tout $h \in E$

$$d\langle u, \mathrm{id}_E \rangle(x) \cdot h = \langle u(h), x \rangle + \langle u(x), h \rangle = 2\langle u(x), h \rangle \quad \left[u \text{ est symétrique}\right] .$$

- *De manière analogue, l'application*

$$\langle \mathrm{id}_E , \mathrm{id}_E \rangle \quad \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \langle x , x \rangle = \|x\|^2 \end{array} \right.$$

est différentiable sur E et, pour tout $x \in E$, pour tout $h \in E$

$$d\langle \mathrm{id}_E , \mathrm{id}_E \rangle(x) \cdot h = \langle h , x \rangle + \langle x , h \rangle = 2\langle x , h \rangle .$$

- *Des deux points précédents, nous déduisons que l'application*

$$(\langle u, \mathrm{id}_E \rangle , \langle \mathrm{id}_E , \mathrm{id}_E \rangle) \quad \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & (\langle u, \mathrm{id}_E \rangle(x) , \langle \mathrm{id}_E , \mathrm{id}_E \rangle(x)) = \big(\langle u(x) , x \rangle , \|x\|^2\big) \end{array} \right.$$

est différentiable sur E et que pour tout $x \in E$, pour tout $h \in E$

$$\begin{aligned} d\,(\langle u, \mathrm{id}_E \rangle , \langle \mathrm{id}_E , \mathrm{id}_E \rangle)\,(x) \cdot h &= (\,d\langle u, \mathrm{id}_E \rangle(x) \cdot h,\ d\langle \mathrm{id}_E , \mathrm{id}_E \rangle(x) \cdot h) \\ &= (2\langle u(x) , h \rangle , 2\langle x , h \rangle)\ . \end{aligned}$$

- *Par composition d'applications différentiables, l'application*

$$E \setminus \{0_E\} \quad \left| \begin{array}{ccc} x & \to & q \circ (\langle u, \mathrm{id}_E \rangle , \langle \mathrm{id}_E , \mathrm{id}_E \rangle) \\ x & \mapsto & \dfrac{\langle u(x) , x \rangle}{\|x\|^2} \end{array} \right.$$

qui coïncide avec f, est différentiable sur $E \setminus \{0_E\}$. De plus pour tout $x \in \setminus \{0_E\}$, pour tout $h \in E$

$$\begin{aligned} df(x) \cdot h &= dq(\langle u(x) , x \rangle, \|x\|^2)\ (\,d(\langle u, \mathrm{id}_E \rangle , \langle \mathrm{id}_E , \mathrm{id}_E \rangle)\,(x) \cdot h) \\ &= dq(\langle u(x) , x \rangle, \|x\|^2)\ (2\langle u(x) , h \rangle , 2\langle x , h \rangle) \\ &= 2\frac{1}{\|x\|^2}\langle u(x) , h \rangle - 2\,\frac{\langle u(x) , x \rangle}{\|x\|^4}\langle x , h \rangle . \end{aligned}$$

2. - *La sphère S est incluse dans $\overline{B(0_E, 1)} := \{x \in E\ :\ \|x\| \leq 1\}$ donc bornée. De plus f est l'image réciproque du fermé $\{1\}$ de $\mathbb{R}$ par l'application $\|\cdot\|$ qui est continue, puisque 1-lipschitzienne (2ème inégalité triangulaire). La sphère S est donc une partie fermée de E. Comme E est de dimension finie, la sphère S est compacte.*
   - *L'application f est continue sur $E \setminus \{0_E\}$ puisque différentiable sur $E \setminus \{0_E\}$ (Question 1.(b)).*
   - *Le Théorème des bornes atteintes, appliquée à l'application continue $f_{|S}$ sur le compact S s'applique. Il existe un vecteur de S, noté e_1, tel que*

$$\forall\, x \in S, \quad f(x) \leq f(e_1)\,.$$

3. (a) *Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$. Comme le vecteur $\dfrac{x}{\|x\|}$ appartient à S, la question 2 livre*

$$f(e_1) \geq f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{\langle u\left(\frac{x}{\|x\|}\right) , \frac{x}{\|x\|} \rangle}{\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\|} = \langle u\left(\frac{x}{\|x\|}\right) , \frac{x}{\|x\|} \rangle = \frac{\langle u(x) , x \rangle}{\|x\|^2} = f(x)\,.$$

(b) • *Comme* $\{0_E\}$ *est une partie fermée de* E*, la partie* $E \setminus \{0_E\}$ *est ouverte dans* E*.*

• *La fonction* f *atteint en* e_1 *un extremum local (et même global) sur l'ouvert* $E\setminus\{0_E\}$ *de* E*. D'après la condition nécessaire d'existence d'un extremum local*

$$df(e_1) = 0\,.$$

D'après la question 1.(b) ($x \leftarrow e_1$ *et* $h \leftarrow x$*), pour tout* $x \in E$

$$2\frac{1}{\|e_1\|^2}\langle u(e_1), x\rangle - 2\frac{\langle u(e_1), e_1\rangle}{\|e_1\|^4}\langle e_1, x\rangle = 0$$

et donc, comme e_1 *est unitaire, pour tout* $x \in E$

$$2\langle u(e_1), x\rangle - 2\langle u(e_1), e_1\rangle\langle e_1, x\rangle = 0\,.$$

4. (a) *Soit* $x \in e_1^{\perp} = \mathrm{Vect}(e_1)^{\perp}$*. Alors*

$$0 = 2\langle u(e_1), x\rangle - 2\langle u(e_1), e_1\rangle\langle e_1, x\rangle = 2\langle u(e_1), x\rangle\,.$$

On en déduit que $u(e_1)$ *est orthogonal à tout vecteur de* $\mathrm{Vect}(e_1)^{\perp}$*, i.e.* $u(e_1) \in \left(\mathrm{Vect}(e_1)^{\perp}\right)^{\perp} = \mathrm{Vect}(e_1)$*. Donc il existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que* $u(e_1) = \lambda.e_1$*. Comme le vecteur* e_1 *est non nul (il est unitaire), le vecteur* e_1 *est un vecteur propre de l'endomorphisme* u*.*

(b) *Soit* $x \in e_1^{\perp}$*. D'après le calcul effectué à la question précédente,*

$$\langle u(e_1), x\rangle = 0$$

Comme u *est un endomorphisme symétrique de* E*,*

$$\langle e_1, u(x)\rangle = 0\,.$$

Donc $u(x) \in e_1^{\perp}$*.*

5. • *Théorème spectral : pour tout endomorphisme symétrique* u *d'un espace euclidien* E *de dimension* $n \geq 1$*, il existe une base orthonormée de* E*, formée de vecteurs propres pour* u*.*

• *On démontre le résultat par récurrence sur* n*, la dimension de l'espace euclidien ambiant.*

  • **Cas où** $n = 1$**.**
  Supposons que E *est de dimension* 1*. Soit* e_1 *un vecteur unitaire de* E*.*
  Comme $u(e_1) \in E = \mathrm{Vect}(e_1)$

$$\exists\,\lambda \in \mathbb{R}, \qquad u(e_1) = \lambda.e_1\,.$$

  Donc la base (e_1) *de* E *est une base orthonormale de* E*, formée d'un vecteur propre pour* u *(associé à la valeur propre* λ*).*

  • **Hérédité.** *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que le résultat soit vrai pour tous les espaces euclidiens de dimension* n*. Supposons* E *de dimension* $n+1$*.*

    - *D'après la Question 4.(a), il existe un vecteur propre unitaire* e_1 *qui est propre pour l'endomorphisme symétrique* u*.*
    - *D'après la Question 4.(b), le sous-espace vectoriel* $e_1^{\perp} = \mathrm{Vect}(e_1)^{\perp}$*, qui est de dimension* $n+1-1 = n$ *est stable par* u*. Donc, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée* $(e_2, \ldots, e_{n+1})$ *de* $e_1^{\perp}$*, formée de vecteurs propres pour* $u_{|e_1^{\perp}}$*, donc également propres pour* u*.*
    - *Comme* $E = \mathrm{Vect}(e_1) \oplus^{\perp} e_1^{\perp}$ *et comme les bases* (e_1) *de* $\mathrm{Vect}(e_1)$ *et* $(e_2, \ldots, e_{n+1})$ *de* $e_1^{\perp}$ *sont orthonormées, la famille*

$$\mathscr{B} := (e_1, e_2, \ldots, e_{n+1})$$

    est une base orthonormée de E*. Elle est formée de vecteurs propres pour* u *par construction.*

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 21. [Énoncé] [Indication(s)]

- **Analyse.**
  Soit f une application différentiable sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, telle que
  $$\forall\, A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad df(A) = \mathrm{Tr}\ .$$
  La trace est une application linéaire donc différentiable sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. De plus
  $$\forall\, A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad d\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}\ .$$
  L'application $f - \mathrm{Tr}$ est différentiable sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, comme combinaison linéaire d'applications différentiables sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Par linéarité de la différentielle
  $$\forall\, A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad d\big(f - \mathrm{Tr}\big)(A) = df(A) - d\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr} - \mathrm{Tr} = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})}\ .$$
  L'ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert connexe par arcs (et même convexe) de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Par caractérisation des applications constantes sur un ouvert connexe par arcs, on en déduit que l'application $f - \mathrm{Tr}$ est constante sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, i.e. qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que
  $$\forall\, A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(A) = \mathrm{Tr}(A) + k\ .$$

- **Synthèse.**
  Soit $k \in \mathbb{R}$ et f l'application définie par
  $$f \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & \mathrm{Tr}(A) + k\ . \end{array} \right.$$
  La trace est linéaire. Elle est donc différentiable sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Une application constante sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est différentiable sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Donc
  $$f = \mathrm{Tr} + k$$
  est différentiable sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, comme combinaison linéaire d'applications différentiables sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
  Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. D'après le cours, comme la trace est linéaire
  $$d\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}$$
  et comme k est constante
  $$dk(A) = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})}\ .$$
  Par linéarité de la différentielle
  $$df(A) = d\mathrm{Tr}(A) + dk(A) = \mathrm{Tr}\ .$$
  Donc la fonction f est solution du problème.

- **Conclusion.**
  Les fonctions $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, différentiables sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, telles que
  $$\forall\, A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad df(A) = \mathrm{Tr}$$
  sont les fonctions
  $$f \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & \mathrm{Tr}(A) + k \end{array} \right.$$
  où k est une constante réelle.

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 22. [Énoncé] [Indication(s)]

1. • *Soit $u \in \mathbb{R}$ fixé. La fonction*

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,\cdot) \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$) et a pour dérivée la fonction

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial g}{\partial u}\right)(u,v) =: \dfrac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(u,v) = 0\,. \end{array} \right.$$

La fonction $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,\cdot)$ est donc constante sur $\mathbb{R}$. Ainsi

$$\forall\, v \in \mathbb{R}, \qquad \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,0)\,.$$

Comme u est quelconque dans $\mathbb{R}$, il vient

$$\forall\,(u,v) \in \mathbb{R}^2, \qquad \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,0)\,.$$

• *Soit $v \in \mathbb{R}$ fixé. La fonction*

$$g(\cdot,v) \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & g(u,v) \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$) et a pour dérivée la fonction

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,0)\,. \end{array} \right.$$

D'après le Théorème fondamental de l'analyse, pour tout $u \in \mathbb{R}$

$$\int_0^u \frac{\partial g}{\partial u}(t,0)\, dt = g(u,v) - g(0,v)\,.$$

Comme v est quelconque dans $\mathbb{R}$, nous en déduisons que

$$(\star) \quad \forall\,(u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad g(u,v) = \int_0^u \frac{\partial g}{\partial u}(t,0)\, dt + g(0,v)\,.$$

• *D'après le dernier point, la fonction*

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,0) \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Donc, d'après le Théorème fondamental de l'analyse, la fonction

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \displaystyle\int_0^u \frac{\partial g}{\partial u}(t,0)\, dt \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

- *Comme g est de classe* $\mathscr{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}^2$, *la fonction*

$$\psi \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & g(0,v) \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}$.

- *Avec ces nouvelles notations, l'identité* $(\star)$ *se réécrit*

$$\forall\,(u,v)\in\mathbb{R}^2, g(u,v)=\varphi(u)+\psi(v)\,.$$

2. (a) • *Soit* θ *l'application définie par*

$$\theta \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \mapsto & \left(\underbrace{\alpha u+\beta v}_{\theta_1(u,v)}, \underbrace{\gamma u+\delta v}_{\theta_2(u,v)}\right) \end{array} \right. .$$

Comme l'application θ *est linéaire, elle est de classe* $\mathscr{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}^2$. *Comme* $g=f\circ\theta$, *l'application* g *est de classe* $\mathscr{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}^2$, *comme composée d'applications de classe* $\mathscr{C}^2$.

• *D'après la règle de la chaîne*

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u} &= \frac{\partial f\circ\theta}{\partial u} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\circ\theta \times \frac{\partial\theta_1}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial t}\circ\theta\times\frac{\partial\theta_2}{\partial u} \\ &= \alpha\,\frac{\partial f}{\partial x}\circ\theta+\gamma\,\frac{\partial f}{\partial t}\circ\theta \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right) &= \alpha\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\circ\theta\times\frac{\partial\theta_1}{\partial v}+\alpha\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\circ\theta\times\frac{\partial\theta_2}{\partial v} \\ &+ \gamma\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)\circ\theta\times\frac{\partial\theta_1}{\partial v}+\gamma\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)\circ\theta\times\frac{\partial\theta_2}{\partial v} \\ &= \alpha\,\beta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\theta+\alpha\,\delta\,\frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial x}\circ\theta+\gamma\,\beta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial t}\circ\theta+\gamma\,\delta\,\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\circ\theta \\ &= \alpha\,\beta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\theta+(\alpha\delta+\gamma\,\beta)\,\frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial x}\circ\theta+\gamma\,\delta\,\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\circ\theta \quad [\textit{Théorème de Schwarz}] \\ &= (\alpha\beta\,+c^2\gamma\delta)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\theta+(\alpha\delta+\gamma\,\beta)\,\frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial x}\circ\theta \quad \left[\textit{cf. hypothèse sur } f\right]. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $(u,v)\in\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v\,\partial u}(u,v)=(\alpha\beta\,+c^2\gamma\delta)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha u+\beta v,\gamma u+\delta v)+(\alpha\delta+\gamma\,\beta)\,\frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial x}(\alpha u+\beta v,\gamma u+\delta v)\,.$$

(b)

- *Si on pose*

$$\alpha := c \qquad \beta := c \qquad \gamma := 1 \qquad \delta := -1$$

alors

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \mathrm{Det}\begin{pmatrix}c & c\\ 1 & -1\end{pmatrix} = -2c \neq 0$$

et donc la matrice $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ *est inversible. De plus, pour tout* $(u,v)\in\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}(u,v) &= (\alpha\beta + c^2\gamma\delta)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha u+\beta v,\gamma u+\delta v) + (\alpha\delta+\gamma\beta)\,\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x}(\alpha u+\beta v,\gamma u+\delta v)\\ &= (c^2-c^2)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha u+\beta v,\gamma u+\delta v) + (-c+c)\,\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x}(\alpha u+\beta v,\gamma u+\delta v)\\ &= 0\end{aligned}$$

- *D'après la question 1, il existe* $\varphi\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *et* $\psi\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *telles que*

$$\forall\,(u,v)\in\mathbb{R}^2,\quad f(\alpha u+\beta v,\gamma u+\delta v) =: g(u,v) = \varphi(u)+\psi(v)\ .$$

Soit $(x,t)\in\mathbb{R}^2$. *Comme*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& cu+cv\\ t &=& u-v\end{array}\right. \qquad\Longleftrightarrow\qquad \left\{\begin{array}{rcl} u &=& \dfrac{x+ct}{2c}\\ v &=& \dfrac{x-ct}{2c}\end{array}\right.$$

il vient

$$f(x,t) = \varphi\left(\frac{x+ct}{2c}\right) + \psi\left(\frac{x-ct}{2c}\right)\ .$$

- *Si on définit l'application* Δ *par*

$$\Delta\ \left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ z & \longmapsto & \dfrac{z}{2c}\end{array}\right.$$

qui est affine donc de classe $\mathscr{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}$*, alors on obtient*

$$\forall\,(x,t)\in\mathbb{R}^2,\qquad f(x,t) = \varphi\circ\Delta\,(x+ct) + \psi\circ\Delta\,(x-ct)\ .$$

avec $\varphi\circ\Delta\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *et* $\psi\circ\Delta\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 23. [Énoncé]

- *Prouvons d'abord que f n'est pas continue en* $(0,0)$.
  En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
  $$f\left(e^{-n^2}, \frac{1}{n}\right) = -1$$
  qui ne tend pas vers 0 si n tend vers l'infini.

- *Fixons maintenant* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $(a,b) \neq (0,0)$, *et démontrons que f admet une dérivée suivant* (a,b) *en* $(0,0)$.
  Soit $t \neq 0$. *On a*
  $$\frac{f(ta,tb)-f(0,0)}{t} = \begin{cases} tb^2\left(\ln|t| + \ln|a|\right) & \text{si } a \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
  Lorsque t tend vers 0, ceci tend vers 0 *(en particulier, parce que* $t\ln|t|$ *tend vers 0 en 0, par croissances comparées). Ainsi, f admet en* $(0,0)$ *une dérivée suivant le vecteur* (a,b) *qui est nulle.*

- *De même, démontrons que g n'est pas continue en observant que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*
  $$g\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)\,.$$

- *D'autre part, fixons* $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *et prouvons que g admet une dérivée suivant* (a,b) *en* $(0,0)$.
  On a, pour $t \neq 0$,
  $$\frac{g(ta,tb)-g(0,0)}{t} = \frac{t^3a^2b}{t\times(t^4a^4+t^2b^2)} = \frac{a^2b}{t^2a^4+b^2}.$$
  Si $b=0$, *ceci est nul, sinon*
  $$\frac{g(ta,tb)-g(0,0)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{a^2}{b}.$$
  Dans tous les cas, on a prouvé que g admet une dérivée en $(0,0)$ *suivant le vecteur* (a,b) *qui vaut* $\dfrac{a^2}{b}$ *si* $b \neq 0$, *et qui vaut* 0 *si* $b = 0$.

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 24. [Énoncé]

1. • **Introduction des fonctions coordonnées.**
Si on pose

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,;\ (x,y) \mapsto \sin(x+2y) \qquad \text{et} \qquad f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,;\ (x,y) \mapsto \cos(2x+y)$$

alors pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$.

• **Étude de la dérivée partielle** $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}$**.**
Soit $y \in \mathbb{R}$ *fixé. L'application*

$$f_1(\cdot, y) : x \mapsto f_1(x,y) = \sin(x+2y)$$

est la composée d'une fonction affine par sin, *donc dérivable sur* $\mathbb{R}$. *La dérivée partielle de* f_1 *par rapport à x existe donc sur* $\mathbb{R}^2$ *tout entier et elle est donnée par*

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,;\ (x,y) \mapsto \cos(x+2y)$$

qui est <u>*continue sur* $\mathbb{R}^2$</u>.

• **Étude de la dérivée partielle** $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}$**.**
Soit $x \in \mathbb{R}$ *fixé. L'application*

$$f_1(x, \cdot) : y \mapsto f_1(x,y) = \sin(x+2y)$$

est la composée d'une fonction affine par sin, *donc dérivable sur* $\mathbb{R}$. *La dérivée partielle de* f_1 *par rapport à y existe donc sur* $\mathbb{R}^2$ *tout entier et elle est donnée par*

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,;\ (x,y) \mapsto 2\cos(x+2y)$$

qui est <u>*continue sur* $\mathbb{R}^2$</u>.

• **Étude de la dérivée partielle** $\dfrac{\partial f_2}{\partial x}$**.**
Soit $y \in \mathbb{R}$ *fixé. L'application*

$$f_2(\cdot, y) : x \mapsto f_2(x,y) = \cos(2x+y)$$

est la composée d'une fonction affine par cos, *donc dérivable sur* $\mathbb{R}$. *La dérivée partielle de* f_2 *par rapport à x existe donc sur* $\mathbb{R}^2$ *tout entier et elle est donnée par*

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,;\ (x,y) \mapsto -2\sin(2x+y)$$

qui est <u>*continue sur* $\mathbb{R}^2$</u>.

• **Étude de la dérivée partielle** $\dfrac{\partial f_2}{\partial y}$**.**
Soit $x \in \mathbb{R}$ *fixé. L'application*

$$f_2(x, \cdot) : y \mapsto f_2(x,y) = \cos(2x+y)$$

est la composée d'une fonction affine par cos, *donc dérivable sur* $\mathbb{R}$. *La dérivée partielle de* f_2 *par rapport à y existe donc sur* $\mathbb{R}^2$ *tout entier et elle est donnée par*

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,;\ (x,y) \mapsto -\sin(2x+y)$$

qui est <u>*continue sur* $\mathbb{R}^2$</u>.

- *D'après le critère $\mathscr{C}^1$, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, donc différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*

$$Mat_{\mathscr{B}}(\,df(x,y)) = \begin{pmatrix} \cos(x+2y) & 2\cos(x+2y) \\ & \\ -2\sin(2x+y) & -\sin(2x+y) \end{pmatrix}$$

où $\mathscr{B}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et donc pour tout $(h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$

$$df(x,y)\cdot(h_1,h_2) = \big(\cos(x+2y)\,h_1 \;+\; 2\cos(x+2y)\,h_2\,,\; -2\sin(2x+y)\,h_1 \;-\; \sin(2x+y)\,h_2\big)\;.$$

2. *Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On veut montrer que $df(x,y)$ est 3-lipschitzienne.*
Comme l'application $df(x,y)$ est linéaire, il suffit de prouver que pour tout $(h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\big\|\,df(x,y)\cdot(h_1,h_2)\big\| \leq 3\;\;\|(h_1,h_2)\|$$

i.e. que

$$\big\|\,df(x,y)\cdot(h_1,h_2)\big\|^2 \leq 9\;\|(h_1,h_2)\|^2\;.$$

Soit $(h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$. D'après la question 1

$$\begin{aligned}
\big\|\,df(x,y)\cdot(h_1,h_2)\big\|^2 &= \Big\|\big(\cos(x+2y)\,h_1 \;+\; 2\cos(x+2y)\,h_2\,,\; -2\sin(2x+y)\,h_1 \;-\; \sin(2x+y)\,h_2\big)\Big\|^2 \\
&= \big(\cos(x+2y)\,h_1 \;+\; 2\cos(x+2y)\,h_2\big)^2 + \big(-2\sin(2x+y)\,h_1 \;-\; \sin(2x+y)\,h_2\big)^2 \\
&= \cos^2(x+2y)\,(h_1+2h_2)^2 + \sin^2(2x+y)(2h_1+h_2)^2 \\
&\leq (h_1+2h_2)^2 + (2h_1+h_2)^2 \qquad \big[\cos^2(x+2y) \leq 1 \textit{ et } \sin^2(2x+y) \leq 1\big] \\
&= 5\,h_1^2 + 8\,h_1\,h_2 + 5\,h_2^2
\end{aligned}$$

Puisque $(h_1-h_2)^2 \geq 0$, $h_1\,h_2 \leq \dfrac{1}{2}\,(h_1^2+h_2^2)$ et donc

$$\big\|\,df(x,y)\cdot(h_1,h_2)\big\|^2 \leq 5\,h_1^2 + 4\,(h_1^2+h_2^2) + 5\,h_2^2 = 9\,(h_1^2+h_2^2) = 9\;\;\|(h_1,h_2)\|^2\;.$$

Le résultat est donc démontré.

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 25. [Énoncé]

1. • **Étude de la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.**
Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. L'application

$$f(\cdot, y) : x \mapsto f(x,y) = x^3 - 3x + xy^2$$

est polynomiale, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. La dérivée partielle de f par rapport à x existe donc sur $\mathbb{R}^2$ tout entier et elle est donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \, ; \, (x,y) \mapsto 3x^2 - 3 + y^2$$

qui est continue sur $\mathbb{R}^2$.

• **Étude de la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.**
Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. L'application

$$f(x, \cdot) : y \mapsto f(x,y) = x^3 - 3x + xy^2$$

est polynomiale, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. La dérivée partielle de f par rapport à y existe donc sur $\mathbb{R}^2$ tout entier et elle est donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \, ; \, (x,y) \mapsto 2xy$$

• *D'après le critère $\mathscr{C}^1$, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, donc différentiable sur $\mathbb{R}^2$*

2. • *Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. D'après le cours, pour tout $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$*

$$\begin{aligned} df(x,y) \cdot (h_1, h_2) &= h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + h_2 \frac{\partial f}{\partial 2}(x,y) \\ &= h_1 \left(3x^2 - 3 + y^2\right) + h_2 \left(2xy\right) . \end{aligned}$$

Donc

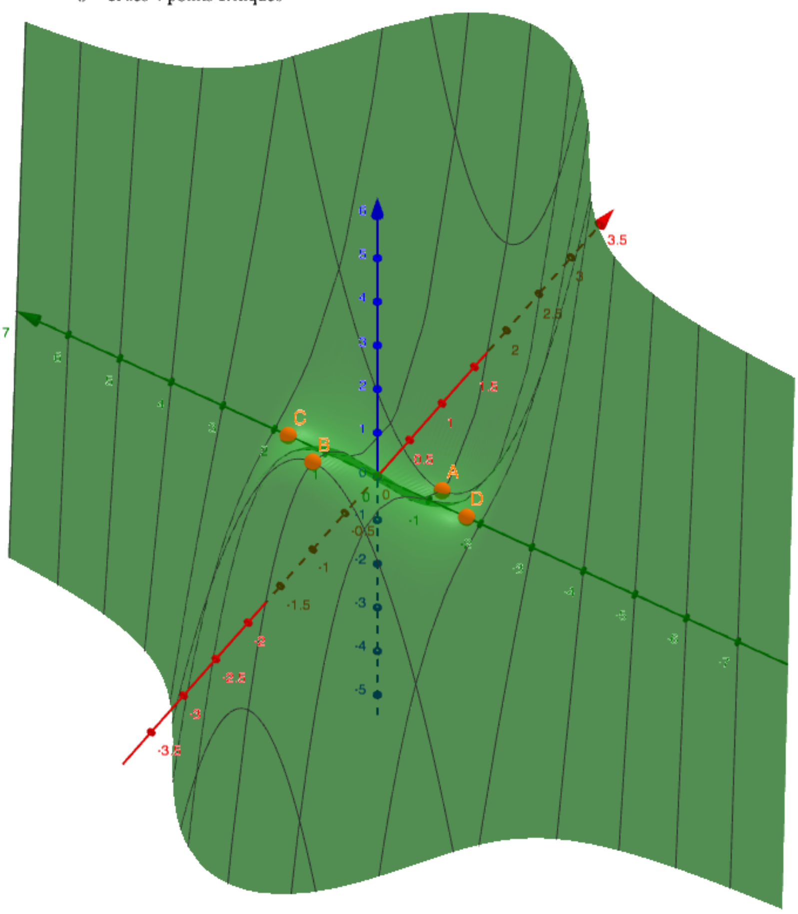
$$\begin{aligned} (x,y) \textit{ est un point critique de } f &\iff \left(3x^2 - 3 + y^2 = 0\right) \textit{ et } \left(2xy = 0\right) \\ &\iff \left(3x^2 - 3 + y^2 = 0\right) \textit{ et } \left(x = 0 \textit{ ou } y = 0\right) \\ &\iff \left(3x^2 - 3 + y^2 = 0 \textit{ et } x = 0\right) \textit{ ou } \left(3x^2 - 3 + y^2 = 0 \textit{ et } y = 0\right) \\ &\iff \left(x = 0 \textit{ et } y = \pm\sqrt{3}\right) \textit{ ou } \left(x = \pm 1 \textit{ et } y = 0\right) \end{aligned}$$

L'ensemble des points critiques de f est donc

$$\left\{ \left(0, -\sqrt{3}\right), \left(0, \sqrt{3}\right), (1,0), (-1,0) \right\} .$$

• *Le graphe de f et ses quatre points critiques* **[Geogebra3D]** .

$f : (x, y) \mapsto x^3 - 3x + xy^2$ et ses 4 points critiques



UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 26. [Énoncé]

1. • *On introduit l'arc γ défini par*

$$\gamma \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (x+t, y+t)\,. \end{array} \right.$$

L'arc γ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car ses fonctions composantes $t \mapsto x+t$ et $t \mapsto y+t$ le sont. De plus pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\gamma'(t) = (1,1)\,.$$

• *La fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Le résultat sur la dérivation le long d'un arc s'applique : la fonction $\tau = f \circ \gamma$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned} \tau'(t) &= df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \\ &= df(\gamma(t)) \cdot (1,1) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) \times 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x+t, y+t) \times 1 \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x+t, y+t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x+t, y+t)\,. \end{aligned}$$

2. (a) i. *Fixons $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et considérons à nouveau la fonction*

$$\tau \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(x+t, y+t) \end{array} \right.$$

introduite dans la question 1. Nous savons qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \tau'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x+t, y+t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x+t, y+t)\,.$$

De l'hypothèse faite sur f, nous déduisons

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \tau'(t) = 0\,.$$

En confrontant les deux formules obtenues, il vient

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x+t, y+t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x+t, y+t) = 0\,.$$

En spécialisant ce résultat à $t \leftarrow 0$, nous obtenons

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

ii. • *Soit L l'application définie par*

$$L \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \longmapsto & \Big(\underbrace{au+bv}_{L_1(u,v)}, \underbrace{cu+dv}_{L_2(u,v)}\Big) \end{array} \right.$$

qui est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Comme L est linéaire, elle est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$

$$dL(u,v) = L\,.$$

- *Comme l'application f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, l'application $g = f \circ L$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, comme composée de fonctions différentiables.*
- *D'après la règle de la chaîne, on obtient, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$*

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(au+bv, cu+dv) \times \frac{\partial L_1}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(au+bv, cu+dv) \times \frac{\partial L_2}{\partial v}(u,v) \\ &= b\,\frac{\partial f}{\partial x}(au+bv, cu+dv) + d\,\frac{\partial f}{\partial y}(au+bv, cu+dv)\,.\end{aligned}$$

iii. On applique le résultat de la question 2.(a).ii en spécialisant à

$$a \leftarrow 1 \quad ; \quad b \leftarrow 1 \quad ; \quad c \leftarrow 0 \quad ; \quad d \leftarrow 1\,.$$

Alors l'application

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & f(u+v,v) \end{array} \right.$$

est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(au+bv, cu+dv) + \frac{\partial f}{\partial y}(au+bv, cu+dv) = 0$$

d'après l'hypothèse faite sur f. Ainsi, si on introduit l'application φ définie par

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & g(u,0) \end{array} \right.$$

qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ (composée de l'application linéaire $u \in \mathbb{R} \mapsto (u,0) \in \mathbb{R}^2$, par l'application différentiable f) on a

$$\forall\,(u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad f(u+v,v) = g(u,v) = g(u,0) = \varphi(u)\,.$$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. En spécialisant le résultat précédent à $u \leftarrow x-y$ et $v \leftarrow y$ il vient

$$f(x,y) = \varphi(x-y)\,.$$

(b) **Synthèse.**

- *Comme φ est une application dérivable en une variable réelle, elle est différentiable sur $\mathbb{R}$.*
- *Soit Δ l'application définie par*

$$\Delta \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x-y\,. \end{array} \right.$$

  Comme Δ est linéaire, elle est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
- *L'application $f = \varphi \circ \Delta$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, comme composée de fonctions différentiables.*
- *Enfin, pour tout $(x,y,t) \in \mathbb{R}^3$*

$$f(x+t, y+t) = \varphi((x+t)-(y+t)) = \varphi(x-y) = f(x,y)\,.$$

(c) **Conclusion.**
D'après l'étude menée, une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et vérifie

$$\forall\,(x,y,t) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x+t,y+t) = f(x,y)$$

<u>si et seulement si</u> elle est de la forme

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \varphi(x-y) \end{array} \right.$$

où $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE 27. [Énoncé]

1. • *On munit* $\mathbb{R}^2$ *de la norme sup définie par*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \|(x, y)\| = \max(|x|, |y|) .$$

• *Soit* $(a, b) \in \mathcal{U}$. *On pose* $r := \min(a, b)$. *Comme* $(a, b) \in \mathcal{U}$, $r > 0$. *On remarque que*

$$\begin{aligned} B_{\|\cdot\|}((a, b), r) &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, \|(x, y) - (a, b)\| < r\right\} \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, \max|x - a|, |y - b| < r\right\} \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, |x - a| < r \text{ et } |y - b| < r\right\} \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, a - r < x < a + r \text{ et } b - r < y < b + r\right\} \\ &= \Big]\underbrace{a - r}_{\leq 0}, a + r\Big[\times \Big]\underbrace{b - r}_{>0}, b + r\Big[. \end{aligned}$$

Donc $B_{\|\cdot\|}((a, b), r) \subset \mathcal{U}$.

• *La partie* $\mathcal{U}$ *est donc une partie ouverte de* $\mathbb{R}^2$.

2. • *Soit* $(x, y) \in \mathcal{U}$. *Comme* $x > 0$ *et* $y > 0$

$$f(x, y) = xy + \frac{4}{x} + \frac{2}{y} \geq 0 .$$

Donc la fonction f *est minorée par* 0 *sur* $\mathcal{U}$.

• *Comme*

$$f(x, x) = x^2 + \frac{6}{x} \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x > 0}]{} +\infty$$

la fonction f *n'est pas majorée sur* $\mathcal{U}$.

3. • *Soit* $y \in]0, +\infty[$ *fixé. L'application*

$$f(\cdot, y) : x \longmapsto f(x, y) = xy + \frac{4}{x} + \frac{2}{y}$$

est dérivable, car c'est une fonction rationnelle. Donc la fonction f *admet une dérivée partielle par rapport à la variable* x *en tout point de* $\mathcal{U}$. *Celle-ci est donnée par*

$$\frac{\partial f}{\partial x} \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & y - \dfrac{4}{x^2} \end{array} \right.$$

qui est une fonction <u>*continue sur* $\mathcal{U}$</u>.

• *Soit* $x \in]0, +\infty[$ *fixé. L'application*

$$f(x, \cdot) : y \longmapsto f(x, y) = xy + \frac{4}{x} + \frac{2}{y}$$

est dérivable, car c'est une fonction rationnelle. Donc la fonction f *admet une dérivée partielle par rapport à la variable* y *en tout point de* $\mathcal{U}$. *Celle-ci est donnée par*

$$\frac{\partial f}{\partial y} \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x - \dfrac{2}{y^2} \end{array} \right.$$

qui est une fonction <u>*continue sur* $\mathcal{U}$</u>.

- *D'après le critère $\mathscr{C}^1$, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$, donc différentiable sur $\mathscr{U}$.*
- *De plus pour tout $(x,y)\in\mathscr{U}$, nous savons*

$$\nabla f(x,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,,\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=\left(y-\frac{4}{x^2}\,,\,x-\frac{2}{y^2}\right).$$

4. - **Analyse.**
Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ un point critique de f. Alors d'après la question 2

$$y-\frac{4}{x^2}=0\quad et\quad x-\frac{2}{y^2}=0$$

donc

$$y-\frac{4}{x^2}=0\quad et\quad x-\frac{x^4}{8}=0$$

Comme

$$x-\frac{x^4}{8}=x\left(1-\left(\frac{x}{2}\right)^3\right)=x\left(1-\frac{x}{2}\right)\left(\underbrace{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}}_{\Delta=-3/4<0}\right)$$

et $x>0$, il vient $x=2$. Comme $y-\dfrac{4}{x^2}=0$, $y=1$. Donc f possède au plus un point critique : $(2,1)$.

- **Synthèse.**
Vérifions si $(2,1)$ est un point critique de f.

$$\nabla f(2,1)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)\,,\,\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)\right)=(0,0).$$

Conclusion.
La fonction f possède un unique point critique : $(2,1)$.

5. (a)
- *La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ car c'est une fonction rationnelle.*
- *De plus*

$$\forall\, z>0,\quad g'(z)=2-\frac{2}{z^3}=\frac{2}{z^3}\,(z^3-1)=\frac{2}{z^3}\,(z-1)\left(\underbrace{z^2+z+1}_{\Delta=-3<0}\right)$$

- *La fonction g est donc strictement décroissante sur $]0,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.*
- *La fonction g atteint un mimimum au point 1, valant* 3.
- *Elle n'est pas ailleurs pas majorée, puisque*

$$g(z)=2z+\frac{1}{z^2}\xrightarrow[z\to+\infty]{}+\infty\,.$$

(b)
- *La fonction f_y est dérivable sur $]0,+\infty[$ car c'est une fonction rationnelle.*
- *De plus*

$$\forall\, x>0,\quad f_y'(x)=y-\frac{4}{x^2}=\frac{y}{x^2}\left(x^2-\frac{4}{y}\right)=\frac{y}{x^2}\left(x-\frac{2}{\sqrt{y}}\right)\left(x+\frac{2}{\sqrt{y}}\right).$$

- *La fonction f_y est donc strictement décroissante sur $\left]0,\dfrac{2}{\sqrt{y}}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\dfrac{2}{\sqrt{y}},+\infty\right[$.*

- *La fonction f_y atteint un mimimum au point $\frac{2}{\sqrt{y}}$, valant*

$$f_y\left(\frac{2}{\sqrt{y}}\right) = f\left(\frac{2}{\sqrt{y}}, y\right) = 4\sqrt{y} + \frac{2}{y} = 2\left(2\sqrt{y} + \frac{1}{y}\right) = 2\,g(\sqrt{y}) \geq 6$$

d'après la Question 5.(a).

- *Elle n'est pas ailleurs pas majorée, puisque*

$$f_y(y) = f(y, y) = y^2 + \frac{6}{y} \xrightarrow[y \to +\infty]{} +\infty\,.$$

6. - **Détermination des points à étudier.**
Comme $\mathscr{U}$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$, si la fonction f atteint un extremum local en un point, alors ce point est un point critique de f, d'après la condition nécessaire d'existence d'un extremum. Il y a donc un seul point à étudier, d'après la Question 4.

- **Étude du point critique $(2,1)$ de f.**
D'après la Question 5.(b)

$$\forall\,(x, y) \in \mathscr{U}, \quad f(x, y) = f_y(x) \geq 6 = f(2, 1)\,.$$

- *La fonction f atteint donc au point $(2,1)$ un minimum global, valant 6.*

- **Vérification de la cohérence.**
Les résultats obtenus sont cohérents avec le graphe de f ci-dessous **[Geogebra3D]** .