Exercice 1

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $(x,y) \mapsto x^2 - y^2$

- $f(x,0) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $f(0,y) \underset{y \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$ donc f est non bornée sur $\mathbb{R}^2$.
- f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale en 2 variables
- $\mathbb{R}^2$ est ouvert dans $\mathbb{R}^2$
- Critère d'existence d'un extremum local. Si f atteint un extremum en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ alors $\nabla f(x,y) = (0,0)$

$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right) = (2x, -2y)$.

(x,y) point critique de $f \iff (2x = 0$ et $-2y = 0)$

$\iff (x,y) = (0,0)$

. Etude du point $(0,0)$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. $f(x,y) - f(0,0) = x^2 - y^2$

– Supposons $f(0,0)$ est un minimum local.

$\exists r > 0, \ \forall (x,y) \in B((0,0),r) \quad f(x,y) \geq f(0,0) = 0$

pour $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^2$

Rq $B((0,0),r) =]-r,r[\times]-r,r[$

$(x,y) \in B((0,0),r) \iff \|(x,y)\|_\infty < r$

$\iff \max(|x|,|y|) < r$

$\iff |x| < r$ et $|y| < r$

En particulier $f(0,\frac{r}{2}) \geq 0$ $\lightning$ car $f(0,\frac{r}{2}) = -\frac{r^2}{4} < 0$.

– Supposons $f(0,0)$ est un maximum local.

$\exists r > 0, \ \forall (x,y) \in B((0,0),r) \ f(x,y) \leq f(0,0) \leq 0$.

$\lightning$ avec $(x,y) = (\frac{r}{2}, 0)$

<u>Conclusion</u> : f n'admet aucun extremum

$\boxed{\text{Exercice 2}}$

Résolution de $\dfrac{\partial f}{\partial x} - 2\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ (E), $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable

<u>Analyse</u> : Supposons f solution de (E).

- On fixe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On effectue le changement de variables suivant $\begin{cases} x = au + bv \\ y = cu + dv \end{cases}$.

Soit $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (u,v) \mapsto (\underbrace{au+bv}_{\sigma_1(u,v)}, \underbrace{cu+dv}_{\sigma_2(u,v)})$

σ est linéaire donc différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Soit $g = f \circ \sigma : (u,v) \mapsto f(au+bv, cu+dv)$

Par la règle de la chaîne

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \circ \sigma \times \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \circ \sigma \times \frac{\partial \sigma_2}{\partial v}$$

$$= b \frac{\partial f}{\partial x} \circ \sigma + d \frac{\partial f}{\partial y} \circ \sigma \underset{\substack{f \text{ sol} \\ \text{de (E)}}}{=} (2b+d) \frac{\partial f}{\partial y} \circ \sigma .$$

<ins>Rappel</ins> : $\dfrac{\partial g}{\partial v} = (2b+d)\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

On fixe $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \in Gl_2(\mathbb{R})$; $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Comme $\dfrac{\partial g}{\partial v} = 0$, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $v \mapsto g(u,v)$ constante sur $\mathbb{R}$. $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2 \quad g(u,v) = g(u,0)$. $(*)$

Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto g(t,0)$.

L'application $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t,0)$ est linéaire donc différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Par composition φ est différentiable sur $\mathbb{R}$ donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x = -u+v \\ y = u-2v \end{cases} \iff \begin{cases} u = -2x-y \\ v = -x-y \end{cases}$$

donc $\underbrace{g(-2x-y, -x-y)}_{f(x,y)} = g(-2x-y, 0) = \varphi(-2x-y)$

Si f est solution de (E), alors il existe $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \varphi(\underline{-2x-y})$

?

Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto -\frac{1}{2}t$. dérivable, bijective, C^1 difféo.

$h^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto -2t$.

$$\varphi = \varphi \circ h^{-1} \circ h \quad \text{donc} \quad \varphi(-2x-y) = \varphi \circ h^{-1}(h(-2x-y))$$

$$= \underbrace{\varphi \circ h^{-1}}_{\text{dérivable}}\left(x + \frac{y}{2}\right)$$

- Synthèse : Si $f : (x,y) \mapsto \varphi(-2x-y)$ avec $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable, alors f est sol de (E) .

Soit $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable (donc différentiable) sur $\mathbb{R}$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $(x,y) \mapsto \Psi(-2x-y)$.

- Soit $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $(x,y) \mapsto -2x-y$ linéaire donc différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $dL(x,y) = L$
- $f = \Psi \circ L$.

OMG!

- Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$

$$df(x,y).(h_1,h_2) = d\Psi(-2x-y)\cdot(\overbrace{dL(x,y)}^{L}\cdot(h_1,h_2))$$

$$= d\Psi(-2x-y)\cdot(-2h_1-h_2) = (-2h_1-h_2)\cdot\Psi'(-2x-y) = -2\Psi'(-2x-y)h_1 - h_2\Psi'(-2x-y)$$

$$df(x,y).(h_1,h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y).h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).h_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2\Psi'(-2x-y) + 2\Psi'(-2x-y) = 0$$