EXERCICES ADDITIONNELS

PRÉSENTATION. Dans le programme de calcul différentiel de MP, sont indiqués deux types d'exercices que l'on vous demande de savoir traiter, en prenant des initiatives : la recherche des extrema locaux éventuels d'une fonction différentiable sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, voire sur un compact de $\mathbb{R}^n$, et l'étude d'une équation aux dérivées partielles linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.

Voici plus explicitement les problématiques que nous considérons.

1. Extrema locaux.

Soit $n \geqslant 1$ un nombre entier et soit Ω une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$. On considère une application numérique

$$f \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & f(x_1, \dots, x_n) \end{array} \right.$$

Pour étudier les extrema locaux éventuels de f, la stratégie classique est la suivante.

(a) Nous justifions la différentiabilité de f sur Ω et nous calculons sa différentielle ou son gradient en tout point de Ω. Les deux objectifs peuvent être menés de front, si l'on applique le critère $\mathscr{C}^1$.

(b) Nous déterminons les point critiques de f sur Ω, en résolvant le sytème

$$\frac{\partial f}{x_1}(x_1, \dots, x_n) = \dots = \frac{\partial f}{x_n}(x_1, \dots, x_n) = 0$$

d'inconnue $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega$. Il est souvent sage de raisonner par analyse-synthèse.

(c) Nous appliquons la condition nécessaire d'existence d'un extremum. D'après ce résultat essentiel du programme, si la fonction f atteint un extremum local en un point $(x_1, \dots, x_n)$ de l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, alors $(x_1, \dots, x_n)$ est un point critique de f. Il reste alors à étudier si, chaque point critique est ou non un point en lequel un extremum local de f est atteint. Nous pouvons utiliser des outils algébriques, comme un développement à l'aide de la formule du binôme de Newton ou une factorisation à l'aide de la forme canonique d'un trinôme du second degré, ou des techniques analytiques, comme des développements limités.

2. Équation aux dérivées partielles linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.

Soient α et β deux réels fixés. Nous considérons l'équation aux dérivées partielles suivante

$$(E) \qquad \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

d'inconnue une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, qui est différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Nous cherchons à établir la forme d'une telle solution (ou à éliminer une des variables de f). Précisément, nous voulons démontrer qu'il existe deux constantes réelles γ et δ telles que toute solution de (E) est de la forme

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \varphi(\gamma x + \delta y) \end{array} \right.$$

où $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour atteindre cet objectif, la stratégie classique est la suivante.

(a) Nous effectuons le changement de variables

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & au & + & bv \\ y & = & cu & + & dv \end{array} \right.$$

où a, b, c, d sont des scalaires fixés, que l'on précisera en cours d'étude. Concrètement, nous introduisons la fonction g définie par

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & f(au+bv, cu+dv)\,. \end{array} \right.$$

(b) Nous démontrons que g est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ en remarquant que g est la composée de l'application linéaire

$$\theta \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \longmapsto & (au+bv, cu+dv) \end{array} \right.$$

par f et, grâce à la règle de la chaîne, nous exprimons $\dfrac{\partial g}{\partial v}$ à l'aide de a, b, c, d et de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

(d) Nous choisissons alors a, b, c, d pour que

- la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ soient inversible, afin de pouvoir exprimer u et v en fonction de x et y ;
- $\dfrac{\partial g}{\partial v} = 0$, ce qui nous livrera que pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $g(u,v) = g(u,0)$.

(e) Nous résolvons le problème posé en considérant la fonction

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & g(t,0)\,. \end{array} \right.$$

Nous rédigeons avec soin, en précisant les constantes γ et δ (indépendantes de f) et en justifiant la régularité de la fonction φ.

Énoncé

Exercice 1 ★☆☆☆☆

Étude des extrema locaux d'une fonction polynomiale en deux variables.

Soit l'application f définie par

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2 - y^2\,. \end{array} \right.$$

Démontrer que la fonction f n'est pas bornée sur $\mathbb{R}^2$ et que la fonction f n'admet aucun extremum local sur $\mathbb{R}^2$.

Énoncé

Exercice 2 ★★★☆☆

Équation aux dérivées partielles linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, qui sont différentiables sur $\mathbb{R}^2$ et qui vérifient

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0\,.$$